三次行列と幾何

藤　末　　宏

三次行列と二次座標平面上の点との対応関係にいては，既に，人文科学 自然科学 研究 2　一橋大学研究年報〔1960〕に於いて，述べられている．ただあの論文では群と曲線との対応についてであったが，ここでは変数 x, y の間に何等の函数関係をも付けない場合を書いた．

また何も断わらない場合は，P_1 は行列 X に対応する点であり，P_2 は行列 X^2 に対応する点であるときめておく．

$X^3=nX$ なる三次行列と幾何（I）

〔定理　1〕　行列　$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$　が

$X^3=nX$, $X^2 \neq \pm\sqrt{n}X$ $n \in$ field K.（指標は 2 でなく，$\frac{1}{n}$, $\sqrt{n}$ $\in K$）$\frac{1}{n}X^2 \neq E$　ならば，

$|X|=0$, $x_1+x_5+x_9=0$, が成立する．

〔証明〕　$e_1=\frac{1}{2\sqrt{n}}X+\frac{1}{2n}X^2$, $e_2=-\frac{1}{2\sqrt{n}}X+\frac{1}{2n}X^2$,

$e_3=\frac{1}{n}X^2$ は idempotent で，

$e_1e_2=e_2e_1=0$, $e_3=e_1+e_2$

e_3 が単位行列のときは，成立する．e_3 が単位行列でないならば，e_1, e_2 の対角元の和は 1 で，各行は比例をする．よって，

$X_1=x_1{}^2+x_2x_4+x_3x_7$, $X_2=x_1x_2+x_2x_5+x_3x_8$, $Y_1=x_4x_1+x_5x_4+x_6x_7$, $Y_2=x_4x_2+x_5{}^2+x_6x_8$

$$\frac{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_1+\frac{1}{2n}X_1}{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_4+\frac{1}{2n}Y_1}=\frac{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_2+\frac{1}{2n}X_2}{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_5+\frac{1}{2n}Y_2}$$

（複号同順）……（1）

また，$E-\frac{1}{n}X^2$ は idempotent 元である．故に，

$$\frac{1-\frac{1}{n}X_1}{\frac{1}{n}Y_1}=\frac{\frac{1}{n}X_2}{1-\frac{1}{n}Y_2} \quad \cdots\cdots(2)$$

(1) と (2) より，

$x_1+x_5+x_9=0$, or $x_1=x_5=x_9$

同様に，

$x_1x_3+x_2x_6+x_3x_9=X_3$,　$x_4x_3+x_5x_6+x_6x_9=Y_3$

とするならば

$$\frac{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_2+\frac{1}{2n}X_2}{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_5+\frac{1}{2n}Y_2}=\frac{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_3+\frac{1}{2n}X_3}{\pm\frac{1}{2\sqrt{n}}x_6+\frac{1}{2n}Y_3} \text{（複号同順）}$$

よって，$x_1+x_5+x_9=0$ or $x_3=0$,

〔定理　2〕 $x_1+x_5+x_9=0$, $|X|=0$ ならば，

（i）　$X^3=nX$

（ii）　$\begin{pmatrix} x_5x_9-x_6x_8 & x_3x_8-x_2x_9 & x_2x_6-x_3x_5 \\ x_6x_7-x_4x_9 & x_1x_9-x_3x_7 & x_3x_4-x_1x_6 \\ x_4x_8-x_5x_7 & x_2x_7-x_1x_8 & x_1x_5-x_2x_4 \end{pmatrix}=X^2-nE$（$E$ は単位行列）

である．ここに，$n=-x_1x_5-x_5x_9-x_9x_1+x_2x_4+x_3x_7+x_6x_8$ …（3）

である．

〔証明〕

$X_2Y_1-X_1Y_2=(x_1^2+x_1x_5+x_5^2+x_2x_4+x_3x_7+x_6x_8)(x_1x_5-x_2x_4)$

$X_3Y_2-X_2Y_3=(x_1^2+x_1x_5+x_5^2+x_2x_4+x_3x_7+x_6x_8)(x_2x_6-x_3x_5)$

が成立する.

〔定理　3〕 $x_1+x_5+x_9=0$, $|X|=0$ のとき，座標平面に於いて X, X^2, e_1, e_2 に対応する点それぞれ P_1, P_2, P_3, P_4 とするならば，$\overline{P_1P_2}$ は定直線 $\overline{P_3P_4}$ の上にあり，

$$(P_1P_2,\ P_3P_4)=-1$$

である.（以後，断りなければ $\overline{P_3P_4}$ は座標軸に平行でないとす.）

〔証明〕

$$\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_4}}=\frac{-1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(x_1x_7+x_8x_4+x_7x_9)x+(x_2x_7+x_5x_8+x_8x_9)y+x_3x_7+x_6x_8+x_9{}^2}{x_7x+x_8y+x_9}$$

$$\frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_2P_4}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(x_1x_7+x_8x_4+x_7x_9)x+(x_2x_7+x_5x_8+x_8x_9)y+x_3x_7+x_6x_8+x_9{}^2}{x_7x+x_8y+x_9}$$

〔定理　4〕

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix},\quad X^2=\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ U & V & W \end{pmatrix}$$

$$|X|=0,\quad x_1+x_5+x_9=0$$

のとき，

(i) $$\frac{YU}{V}-\frac{VZ}{Y}=\frac{X'Z}{Z'}-\frac{UZ'}{X'}=X-W,\quad \frac{VX'}{U}-\frac{UZ'}{X'}$$

$$=\frac{YZ'}{Z}-\frac{VZ}{Y}=Y'-W,\quad \frac{YZ'}{Z}-\frac{X'Z}{Z'}=\frac{VX'}{U}$$

$$-\frac{UY}{V}=Y'-X,$$

(ii) $UZ'Y=ZX'V$

(iii) $X+Y'+W=2n$

が成立する.

〔定理　5〕　$|X|=0$, $x_1+x_5+x_9=0$ のとき,

(x, y) と P_2 を結ぶ直線は定点,

$$Q\left(\frac{Y}{V}, \frac{X'}{U}\right)$$

を通る. Q は行列 x^2-nE に対応する点である.

〔定理　6〕　$X^3=nX(n\neq 0)$, $X^2\neq nE$

なるとき, P_1 と $(-x, y)$ を結ぶ直結が定点を通るための条件は,

$$x_8U+x_7V=0,\quad x_8X'+x_4V=0,\quad x_7Y=x_2U,\quad x_2x_6x_7=x_3x_4x_8$$

である. また定点は

$$\left(\frac{x_2}{x_8}, \frac{x_4}{x_7}\right)$$

である.

〔定理　7〕　$X^3=nX(n\neq 0)$, $X^2\neq nE$

なるとき, P_1 と $(x, -y)$ を結ぶ直線が定点を通るための条件は,

$$x_7V+x_8U=0,\quad x_4V=x_8X',\quad x_7Y+x_2U=0,\quad x_2x_6x_7=x_3x_4x_8$$

である. また定点は

$$\left(\frac{x_2}{x_8}, \frac{x_4}{x_7}\right)$$

である.

〔定理　8〕　$X^3=nX(n\neq 0)$, $X^2\neq nE$

なるとき, P_1 と $(-x, -y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は,

$$x_7V=x_8U,\quad x_7Y'+x_5U=0,\quad x_7Y+x_2U=0,\quad x_2x_6x_7=x_3x_4x_8$$

である.

〔定理　9〕　$X^3=\eta X(\eta\neq 0)$, $X^2\neq\eta E$

なるとき, P_2 と $(-x, y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は,

$$X=Z=Z'=V=Y=0,\quad Y'=W=n \text{ で, 定点は } \left(\frac{Y'}{U}, \frac{X'}{U}\right)$$

である.

〔定理 10〕　$X^3=nX(n\neq 0)$, $X^2\neq nE$

なるとき, P_2 と $(x_1\ -y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は,

$$W=X=n,\quad X'=U=Z=Y'=Z'=0$$

で，定点は

$$\left(\frac{Y}{V},\ \frac{X}{V}\right)$$

である．

〔定理 11〕 $X^3=nX(n\neq 0)$，$X^2\neq nE$

なるとき，P_2 と $(-x,\ -y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$Z=Y=W=X'=0,\quad X=Y'=n$$

で，定点は

$$(0,\ 0)$$

である

〔定理 12〕 $|X|=0$，$x_1+x_5+x_9=0$

のとき

$$\frac{X}{x_1}=\frac{X'}{x_4}=\frac{U}{x_7},\quad \frac{Y}{x_2}=\frac{Y'}{x_5}=\frac{V}{x_8},\quad \frac{Z}{x_3}=\frac{Z'}{x_6}=\frac{W}{x_9} \qquad \cdots\cdots(4)$$

ならば，

$(x,\ -y)$ と P_1 を結ぶ直線は，Q を通り，角 $\angle P_1QP_2$ の内角，外角は $\overline{QP_3}$, $\overline{QP_4}$ によって二等分される．逆にこのことが成立するのは (4) なるときである．

〔証明〕 逆の場合は，

$$\left(\frac{Y}{V}-\frac{\sqrt{n}\ x_2+Y}{\sqrt{n}\ x_8+V}\right)\left(\frac{Y}{V}-\frac{-\sqrt{n}\ x_2+Y}{-\sqrt{n}\ x_8+V}\right)$$

$$+\left(\frac{X'}{U}-\frac{\sqrt{n}\ x_4+X'}{\sqrt{n}\ x_7+U}\right)\left(\frac{X'}{U}-\frac{-\sqrt{n}\ x_4+X'}{-\sqrt{n}\ x_7+U}\right)$$

$$=\left\{-\frac{(x_8Y-x_2V)^2}{V^2(\sqrt{n}\ x_8+V)^2}-\frac{(x_7X'-x_4U^2)}{U^2(\sqrt{n}\ x_7+U)^2}\right\}n \quad (n\neq 0)$$

よりなる．

〔定理 13〕 $x_1:x_2:x_3\neq x_4:x_5:x_6$，$x_4:x_5:x_6\neq x_7:x_8:x_9$

$x_7:x_8:x_9\neq x_1:x_2:x_3$

〔証明〕 等号が成立するものとすれば，x は idempotent に K の元を掛けたものとなる.

〔定理 14〕 $X^3=nX,\ \dfrac{1}{n}X^2\neq E(n\neq 0)$

なるとき，$P_2(\xi_2,\ \eta_2)$ とするならば，P_1 と $(-\xi_2,\ 0)$ を結ぶ直線が定点を通るならば，

$$\frac{x_5X-x_4Y}{x_5U-x_4V}=\frac{x_1x_5-x_2x_4}{U},\quad =\frac{x_6Y-x_5Z}{x_6U-x_5W}=\frac{Z}{V},$$
$$=\frac{x_4Z-x_6X}{x_4W-x_6U}=\frac{Z}{x_5x_9-x_6x_8} \qquad \cdots\cdots(5)$$

である．定点は

$$\left(\frac{(x_5U-x_4V)(x_2X-x_1Y)}{(x_5X-x_4Y)(x_8U-x_7V)},\ \frac{x_5U-x_4V}{x_8U-x_7V}\right)$$

である．逆も成立する．

〔証明〕 P_1 と $(-\xi_2,\ 0)$ を通る直線の方程式は，

$$-\frac{x_4x+x_5y+x_6}{x_7x+x_8y+x_9}\xi+\left(\frac{Xx+Yy+Z}{Ux+Vy+W}+\frac{x_1x+x_2y+x_3}{x_7x+x_8y+x_9}\right)\eta$$
$$=\frac{x_4x+x_5y+x_6}{x_7x+x_8y+x_9}\cdot\frac{Xx+Yy+Z}{Ux+V\hat{n}+W}$$

である．よって，

$$-x_4U\xi+(x_7X+x_1U)\eta=x_4X$$
$$-(x_4V+x_5U)\xi+(x_8X+x_7Y+x_2U+x_1V)\eta=x_4Y+x_5X$$
$$-x_5V\xi+(x_8Y+x_2V)\eta=x_5Y$$
$$-(x_4W+x_6U)\xi+(x_9X+x_7Z+x_1W+x_3U)\eta=x_4Z+x_6X$$
$$-(x_5W+x_6V)\xi+(x_4Y+x_8Z+x_3V+x_2W)\eta=x_5Z+x_6Y$$
$$-x_6W\xi+(x_9Z+x_3W)\eta=x_6Z$$

従って

$$W(-x_6\xi+x_3\eta)=(x_6-x_9\eta)Z,\quad U(-x_4\xi+x_1\eta)=(x_4-x_7\eta))X,$$
$$V(-x_5\xi+x_2\eta)=(x_5-x_8\eta)Y$$
$$(U+V)(-x_4+x_6)\xi+(x_1+x_2)\eta)=(X+Y)\{x_4+x_5-(x_7$$
$$+x_8)\eta\}$$

$$(V+W)(-(x_5+x_6)\xi+(x_2+x_3)\eta)=(Y+Z)\{x_5+x_6-(x_8+x_9)\eta\}$$

$$(U+V)\{-(x_4+x_6)\xi+(x_1+x_3)\eta\}=(X+Z)\{x_4+x_6-(x_7+x_9)\eta\}$$

∴　$U\fallingdotseq 0$ であるから，

$$\frac{X}{-x_4\xi+x_1\eta}=\frac{Y}{-x_5\xi+x_2\eta}=\frac{Z}{-x_6\xi+x_3\eta}=\frac{U}{x_4-x_7\eta}$$
$$=\frac{V}{x_5-x_8\eta}=\frac{W}{x_6-x_9\eta}$$

〔定理 15〕　$X^3=nX(n\fallingdotseq 0)$，$X^2\fallingdotseq nE$

なるとき，P_2 と $(-\xi_1,\ 0)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は (5) である．定点は前定理と同じ点となる．

〔証明〕　$|X|=0$ ならば

$$x_4V-x_5U=x_7Y'-x_8X',\quad x_4Y-x_5X=x_1Y'-x_2X'$$

が成立する．故に前定理と同様に証明せられる．また定点も前定理と同じ点となる．

従って，次の定理を得る．

〔定理 16〕　$X^3=nX(n\fallingdotseq 0)$，$X^2\fallingdotseq nE$

なるとき，P_1 と $(\xi_2,\ 0)$ を結ぶ直線が定直線でなく定点を通る条件は，

$$\frac{x_1x_5-x_2x_4}{x_4x_8-x_5x_7}=\frac{x_3x_4-x_1x_6}{x_6x_7-x_4x_9}=\frac{x_2x_6-x_3x_5}{x_5x_9-x_6x_8}=\frac{x_5X-x_4Y}{x_4V-x_5U}$$
$$=\frac{x_6Y-x_5Z}{x_5W-x_6V}=\frac{x_4Z-x_6X}{x_6V-x_4W}\qquad\cdots\cdots(6)$$

である．定点は

$$\left(\frac{(x_2X-x_1Y)(x_4V-x_5U)}{(x_5x-x_4Y)(x_7V-x_8U)},\ \frac{x_4V-x_5U}{x_7V-x_8U}\right)$$

である．

〔証明〕　P_1 と $(\xi_2,\ 0)$ を通る直線の方程式より，

$$U(x_4\xi-x_1\eta)=X(x_4-x_7\eta)$$
$$V(x_5\xi-x_2\eta)=Y(x_5-x_8\eta)$$

$$W(x_6\xi-x_3\eta)=Z(x_6-x_9\eta)$$
$$(U+V)\{(x_4+x_5)\xi-(x_1+x_2)\eta\}=(x+Y)(x_4+x_5-(x_7+x_8)\eta)$$
$$(U+W)\{(x_4+x_6)\xi-(x_1+x_3)\eta\}=(x+Z)(x_4+x_6)-(x_7+x_9)\eta)$$
$$(V+W)\{(x_5+x_6)\xi-(x_2+x_3)\eta\}=(Y+Z)(x_5+x_6-(x_8+x_9)\eta)$$

を得る．よって，

$$\frac{x_4-x_7\eta}{x_4\xi-x_1\eta}=\frac{x_5-x_8\eta}{x_5-x_2\eta}=\frac{x_6-x_9\eta}{x_6\xi-x_3\eta}=\frac{U}{X}=\frac{V}{Y}=\frac{W}{Z} \quad \cdots\cdots(7)$$

か，または

$$\frac{X}{x_4\xi-x_1\eta}=\frac{Y}{x_5\xi-x_2\eta}=\frac{Z}{x_4-x_7\eta}=\frac{V}{x_5-x_8\eta}=\frac{W}{x_6-x_9\eta} \quad \cdots\cdots(8)$$

となるが，定理により（8）のみ成立する．

また，$|X|=0$ であるならば，

$$x_4V-x_5U:x_5W-x_6V:x_6U-x_4W$$
$$=x_7V-x_8U:x_8W-x_9V:x_9U-x_7W$$
$$=x_4Y-x_5X:x_5Z-x_6Y:x_6X-x_4Z$$
$$=x_1Y-x_2X:x_2Z-x_3Y:x_3X-x_1Z$$

が成立する故に，定理の結果を得る．

同様にして次の定理を得る．

〔定理 17〕 $X^3=nX(n\neq 0)$，$X^2\neq nE$

なるとき，P_2 と（ξ_1, 0）を結ぶ直線が定点を通る条件は（6）である．
また定点は，

$$\left(\frac{(x_1Y-x_2X)(x_8X'-x_7Y')}{(n_1Y'-x_2X')(x_8U-x_7V)},\ \left(\frac{x_8X'-x_7Y'}{x_8U-x_7V}\right)\right.$$

である．

〔定理 18〕 $X^3=nX(\mathrm{n}\neq 0)$，$X^2\neq nE$

なるとき，P_1 と（ξ_2, 0）を結ぶ直線が定直線でなく定点を通り，P_2 と（ξ_1, 0）を結ぶ直線が定直線でなく定点を通る条件は，（6）である．

また定点は，

$$\left(\frac{(x_2X-x_1Y)(x_4V-x_5U)}{(x_5X-x_4Y)(x_7V-x_8U)},\ \frac{x_4V-x_5U}{x_7V-x_8U}\right)$$

である.

〔定理 19〕 $X^3=nX(n\neq0)$, $X^2\neq nE$

なるとき，P_2 と $(\xi,\ \eta)$ を結ぶ直線上に $(-\xi_1,\ \eta_1)$ がある条件は，

$$\frac{X'}{x_4}=\frac{U}{x_7},\quad \frac{V}{x_8}=-\frac{Y}{x_2}$$

である.

〔定理 20〕 $X^3=nX\ (n\neq0)$, $X^2\neq nE$, $X^2\neq\pm\sqrt{n}X$

なるとき，P_2 と $(x^4\ y)$ を結ぶ直線上に，$(\xi_1,\ -\eta_1)$ がある条件は，

（1） $U=V=0$

（2） $x_2=x_8=0$

（3） $x_4=x_7=0$

（4） $x_7=x_8=0$

（5） $x_2V-x_8Y=x_4U+x_7X'=0$, $\dfrac{x_1V-x_7Y}{V}=\dfrac{-x_5U-x_8X'}{U}$

$$=\frac{x_6U+x_9X'}{X'}=\frac{x_9Y-x_3V}{Y}$$

である.

〔証明〕 $\left(y-\dfrac{X'}{U}\right)\left(\dfrac{x_1x+x_2y+x_3}{x_7x+x_8y+x_9}-\dfrac{Y}{V}\right)+\left(x-\dfrac{Y}{V}\right)$

$\left(\dfrac{x_4x+x_5y+x_6}{x_7x+x_8y+x_5}-\dfrac{X'}{U}\right)=0$ より

$$V(x_4U+x_7X^1)=0$$

$$U(x_1V-x_7Y)+V(x_5U+x_8X^1)=0$$

$$U(x_2V-x_8Y)=0$$

$$-X'(x_1V-x_7Y)+V(x_0U+x_9X')=0$$

$$U(x_3U-x_9Y)-X'(x_2V-x_8Y)-Y(x_5U+x_8X^1)=0$$

$$-X^1(x_3V-x_9Y)-Y(x_6U+x_9X')=0$$

よって，

（1）　$U=V=0$,　　（2）　$U=x_4U+x_7X'=0$,

（3）　$V=x_2V-x_8Y=0$,　　（4）　$x_2V-x_8Y=x_4U+x_7X'$

の場合に分けると，(1) の成立する行列 X はない．(2) より $x_4=x_7=0$ (3) より $x_2=x_8$, $x_8=x_7$, $x_4=x_7=0$ の条件を得る．(4) からは定理の (5) の条件を得る．

〔定理 21〕 Q と P_1 を結ぶ直線上に (x, y) が存在する条件は，

（1）　$U=V=0$　　か，または

（2）　$Y=V=0$　　か，または

（3）　$X'=U=0$　　か，または

（4）　$x_4U-x_7X^1=x_2V-x_8Y=0$,

$$\frac{x_1V-x_7Y}{V}=\frac{x_5U-x_8X'}{U}=\frac{x_9X'-x_3U}{X'}=\frac{x_9Y-x_3V}{Y}$$

である．

〔定理 22〕 Q と P_1 を結ぶ直線上に $(-x, y)$ が存在する条件は，

（1）　$U=V=0$　　か，または

（2）　$X'=U=0$　　か，または

（3）　$Y=V=0$　　か，または

（4）　$x_4U-x_7X'=x_2V-x_8Y=0$

$$\frac{x_1V-x_7Y}{V}=\frac{x_8X'-x_5U}{U}=\frac{x_3U-x_9X'}{X'}=\frac{x_3V-x_9Y}{Y}$$

である．

〔定理 23〕 Q と P_1 を結ぶ直線上に $(x, -y)$ が存在する条件は，

（1）　$U=V=0$　　か，または

（2）　$Y=V=0$　　か，または

（3）　$X'=U=0$　　か，または

（4）　$x_4U-x_7X'=x_2V-x_8Y=0$

$$\frac{x_7Y-x_1V}{V}=\frac{x_5U-x_8X'}{U}=\frac{x_3U-x_9X'}{X'}=\frac{x_3V-x_9Y}{Y}$$

〔定理 24〕 Q と P_1 を結ぶ直線上に，$(-x, -y)$ が存在する条件は，

（1）　$U=V=0$　　か，または

（2）　$Y=U=0$　　か，または

（3）　$X'=U=0$　　か，または

（4）　$x_4U-x_7X'=x_2V-x_8Y=0$

$$\frac{x_1V-x_7Y}{V}=\frac{x_5U-x_8X'}{U}=\frac{x_3U-x_9X'}{X'}=\frac{x_3V-x_9Y}{Y}$$

である．

〔定理 25〕（1）$U=V=0$,（2）$X'=U=0$,（3）$Y=V=0$ は成立しない．

〔証明〕 定理 21, 22, 23, 24 より，Q と P_1 が一致する．よって，行列 X は idempotent 元に K の元を掛けたものとなる．

〔定理 26〕（x, y）と Q を結ぶ直結と，ξ 軸との交点が，（ξ_1, 0）である条件は，

$$x_1=x_9,\quad x_3=x_7=0$$

〔定理 27〕（x, y）と Q を結ぶ直線と，ξ 軸との交点が（$-\xi_1$, 0）である条件は，

$$x_1+x_9=0,\quad x_3=x_7=0$$

〔定理 28〕（x, y）と P_2 を結ぶ直線と，P_1 より η 軸に平行に引いた直線の交点が，

$$\left(\frac{x_1x+x_2y+x_3}{x_7x+x_8y+x_9},\quad \frac{x_1x+x_2y+x_3}{x_4x+x_5y+x_6}\right)$$

である条件は，

$$x_3=x_5=x_7=0,\quad UY=X'Y',\quad ZU=Y'Z'$$

$$\frac{\frac{1}{Z}}{\left(\frac{X'}{U}x_4-x_1\right)x_9}=\frac{\frac{1}{Z'}}{x_6\left(\frac{Y}{V}x_7-x_1\right)}=\frac{-\frac{Z}{YZ'}}{x_8\left(\frac{X'}{U}x_4-x_1\right)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{Z'}}{x_2\left(x_4\frac{X'}{U}-x_7\frac{Y}{V}\right)}=\frac{-\frac{U}{ZX'}}{x_4\left(\frac{Y}{V}x_7-x_1\right)}=\frac{\frac{1}{Z}}{x_1\left(x_4\frac{X'}{U}-x_7\frac{Y}{V}\right)}$$

である．

〔証明〕 $(x,\ y)$ と P_2 上の定点を $(\xi_0,\ \eta_0)$ とする.

$$A=-Uxy-Vy^2+X'n+(Y'-W)y+Z'$$
$$B=-Ux^2-Vxy+(X-W)x+Yy+Z$$
$$C=Xx^2+(Y'-X)xy-Yy^2+xZ'-yZ$$

とする.

$$\xi_0 A-\eta_0 B=C$$

また,

$$\frac{C}{x_1x+x_2y+x_3}+\frac{B}{x_4x+x_5y+x_6}-\frac{A}{x_7x+x_8y+x_9}=0$$

よって,

$$\frac{A}{(x_7x+x_8y+x_9)(x(\xi_0x_4-x_1)+y(\xi_0x_5-x_2)+\xi_0x_6-x_5)}$$
$$=\frac{B}{(x_4x+x_5y+x_6)(x(\eta_0x_7-x_1)+y(\eta_0x_8-x_2)+\eta_0x_9-x_5)}$$
$$=\frac{C}{(x_1x+x_2\eta+x_3)(x(\xi_0x_4-\eta_0xy)+y(\xi_0x_5-\eta_0x_8)+\xi_0x_6-\eta_0x_9)} \qquad \cdots\cdots(9)$$

である.

$$Ax-By=C$$

より,

$$x(x_7x+x_8y+x_9)(x(\xi_0x_4-x_1)+y(\xi_0x_5-x_2)+\xi_0x_6-x_3)$$
$$+y(x_4x+x_5y+x_6)(x(\eta_0x_7-x_1)+y(\eta_0x_8-x_2)+\eta_0x_9-x_3)$$
$$=(x_1x+x_2y+x_3)(x(\xi_0x_4-\eta_0x_7)+y(\xi_0x_5-\eta_0x_8)+\xi_0x_6-\eta_0x_9)$$

よって,

$$x_7(\xi_0x_4-x_1)=0$$
$$x_7(\xi_0x_5-x_2)+x_8(\xi_0x_4-x_1)-x_4(\eta_0x_7-x_1)=0$$
$$x_8(\xi_0x_5-x_2)-x_4(\eta_0x_8-x_2)-x_6(\eta_0x_7-x_1)=0$$
$$-x_5(\eta_0x_8-x_2)=0$$
$$x_7(\xi_0x_6-x_3)+x_9(\xi_0x_4-x_1)=x_1(\xi_0x_4-\eta_0x_7)$$

$$x_9(\xi_0x_5-x_2)+x_8(\xi_0x_0-x_3)-x_4(\xi_0x_7-x_3)-x_6(\eta_0x_7-x_1)$$
$$=x_1(\xi_0x_6-\eta_0x_8)+x_2(\xi_0x_4-\eta_0x_7)$$
$$-x_6(\eta_0x_8-x_2)-x_5(\eta_0x_9-x_3)=x_2(\xi_0x_5-\eta_0x_8)$$
$$-x_6(\eta_0x_8-x_2)-x_5(\eta_0x_9-x_3)=x_2(\xi_0x_5-\eta_0x_8)$$
$$x_7(\xi_0x_6-x_3)=x_1(\xi_0x_6-\eta_0x_9)+x_3(\xi_0x_6-\eta_0x_7)$$
$$-x_6(\eta_0x_9-x_3)=x_2(\xi_0x_6-\eta_0x_9)+x_3(\xi_0x_5-\eta_0x_8)$$
$$x_3(\xi_0x_6-\eta_0x_9)=0$$

従って,

$$(\xi_0x_4-x_1)(\eta_0x_3-x_2)\{(\xi_6x_7-x_1)(\xi_0x_5-x_2)-(\eta_0x_8-x_2)(\xi_0x_4-x_1)\}=0$$
$$(\eta_0x_8-x_2)(\xi_0x_6-\eta_0x_9)\{(\xi_0x_5-\eta_0x_8)(\eta_0x_9-x_3)-(\eta_0x_8-x_2)(\xi_0x_6-\eta_0x_9)\}=0$$
$$(\xi_0x_6-\eta_0x_9)(\xi_0x_4-x_1)\{(\xi_0x_4-\eta_0x_7)(\xi_0x_6-x_3)-(\xi_0x_6-\eta_0x_9)(\xi_0x_4-x_1)\}=0$$

が成立する.

$(\xi_0x_7-x_1)(\xi_0x_5-x_2)-(\eta_0x_8-x_2)(\xi_0x_4-x_1)$, $(\xi_0x_5-\eta_0x_8)(\eta_0x_9-x_3)-(\eta_0x_8-x_2)(\xi_0y_6-\eta_0x_9)$, $(\xi_0x_4-\eta_0x_7)(\xi_0x_6-x_3)-(\xi_0x_6-\eta_0x_9)(\xi_0x_4-x_1)$ が 0 でないとすれば,

$$\xi_0x_4-x_1=\eta_0x_8-x_2=0 \text{ または } \eta_0x_8-x_2=\xi_0x_6-\eta_0x_9=0$$

または, $\xi_0x_6-\eta_0x_9=\xi_0x_4-x_1=0$ となる. この場合は, いづれも

$$\xi_0x_4-x_1=\eta_0x_8-x_2=\xi_0x_6-\eta_0x_9=0$$

に帰着する. よって,

$$x_1:x_4:x_7=x_2:x_5:x_8=x_3:x_6:x_9=x_3-\xi_0x_6:\xi_0x_5-x_2:\eta_0x_7-x_1$$

となる. よって, この場合は除外する.

$(\xi_0x_7-x_1)(\xi_0x_5-x_2)-(\eta_0x_8-x_2)(\xi_0x_4-x_1)$, $(\xi_0x_5-\eta_0x_8)(\eta_0x_9-x_3)-(\eta_0x_8-x_2)(\xi_0x_6-\eta_0x_9)$, $(\xi_0x_4-\eta_0x_6)(\xi_0x_6-x_7)-(\xi_0x_6-\eta_0x_9)(\xi_0x_4-x_1)$ のいづれかが 0 となるならば,

$$X'Y'=UY,\quad Y'Z'=ZV$$

故に

$$A=(Z'Yy+X'Zx+ZZ')\left(-\frac{Z}{Z'Y}y+\frac{1}{Z}\right)$$

$$B=(Z'Yy+X'Zx+ZZ')\left(-\frac{U}{ZX'}x+\frac{1}{Z'}\right)$$

$$C=(ZX'x+YZ'y+ZZ')\left(\frac{1}{Z}x-\frac{1}{Z'}y\right)$$

(9) より

$$\frac{\dfrac{1}{Z}-\dfrac{Z}{YZ'}y}{\left(\dfrac{X'}{U}x_4-x_1\right)(x_7x+x_8y+x_9)}=\frac{\dfrac{1}{Z'}-\dfrac{U}{ZX'}x}{\left(\dfrac{Y}{V}x_7-x_1\right)(x_4x+x_5y+x_6)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{Z}x-\dfrac{1}{Z'}y}{(x_1x+x_2y+x_3)\left(x_4\dfrac{X'}{U}-x_7\dfrac{Y}{V}\right)}$$

が得られる.

〔定理 29〕 $X=Y\pm\dfrac{\sqrt{n}}{2}E$ とするならば

$$Y^2\left(Y\pm\frac{3}{2}\sqrt{n}\ E\right)=\frac{n}{4}\left(Y\pm\frac{3\sqrt{n}}{2}E\right)$$

となる.

三次行列と幾何（II）

〔定理　1〕

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$X_3=aX^2\ \ (a\neq 0)$$

が成立するならば, $e_0=X^2-aX$ は nilpotent, $e=\dfrac{1}{a^2}X^2$ は idempotent である. $ee_0=e_0e=e$ また次のいづれかが成立する.

（1）　$X=aE$

（2）　$|X|=0$

である．（2）の場合は更に次の（3），（4）の場合に分れる．

（3）　$x_1+x_5+x_9=a$ で，

$$e_0=\begin{pmatrix} x_5x_9-x_6x_8 & x_3x_8-x_2x_9 & x_2x_6-x_3x_5 \\ x_6x_7-x_4x_9 & x_1x_9-x_3x_7 & x_3x_4-x_1x_6 \\ x_4x_8-x_5x_7 & x_2x_7-x_1x_8 & x_1x_5-x_2x_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1x_9+x_5x_9+x_1x_5=x_2x_4+x_3x_7+x_6x_8$$

e の対角元の和は 1 である．

$$X^2=\begin{pmatrix} U & V & W \\ U' & V' & W' \\ U'' & V'' & W'' \end{pmatrix}$$

とするならば

$$U:V:W=U':V':W'=U'':V'':W''$$

である．

（4）　$x_1+x_5+x_9=2a$ で，

$e_0=0$

e_1 の対角元の和は 2

$$X=\frac{1}{a}X^2$$

である．逆も成立する．

〔証明〕

$$X^2=\begin{pmatrix} U & V & W \\ U' & V' & W' \\ U'' & V'' & W'' \end{pmatrix}$$

とする．（4）は，

$$a^2=x_1x_5+x_5x_9+x_9x_1-x_3x_7-x_6x_8-x_2x_4$$

$$VW'-WV'=(x_2x_6-x_3x_5)a^2$$

$$\frac{-\frac{1}{a^2}V}{1-\frac{1}{a^2}V'}=\frac{-\frac{1}{a^2}W}{-\frac{1}{a^2}W'}$$

従って

$$W=x_3x_5-x_2x_6,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} x_5x_9-x_6x_8 & x_3x_8-x_2x_9 & x_2x_6-x_3x_5 \\ x_6x_7-x_4x_9 & x_1x_9-x_3x_7 & x_3x_4-x_1x_6 \\ x_4x_8-x_5x_7 & x_2x_7-x_1x_8 & x_1x_5-x_2x_4 \end{pmatrix}=E-\frac{1}{a^2}X^2$$

$$\therefore\quad 0=XY=X-\frac{1}{a^2}X^3=X-aX^2$$

〔定理　2〕 $x_1+x_5+x_9=a$, $|X|=0$, で, e_0 に対応する点を Q とする（以下常にかかる場合を扱う). このとき P_2 は定直線上にある.

〔証明〕 e と e_0 とは相異なる 2 定点に対応する.

〔定理　3〕 $x_1+x_5+x_9=a$, $e_0\fallingdotseq 0$, $|X|=0$

なるとき, 行列 X に対応する点 P_1 は定点でない.

〔定理　4〕 P_1 と $(-x,\ y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は,

$$x_2x_6x_7=x_3x_4x_8,\quad \frac{x_6x_7}{x_4}=2x_1+x_9,\quad \frac{x_4x_8}{x_7}=2x_1+x_5,$$

$$\frac{x_2x_7}{x_8}=-x_1$$

である. 定点は $\left(\frac{x_2}{x_8},\ \frac{x_4}{x_7}\right)$ である.

〔証明〕 直線の方程式は,

$$\xi\left(\frac{x_4x+x_5y+x_6}{x_7x+x_8y+x_9}-y\right)-\eta\left(\frac{x_1x+x_2y+x_3}{x_7x+x_8y+x_9}+x\right)$$
$$=\frac{-x(x_4x+x_5y+x_6)}{x_7x+x_8y+x_9}-\frac{y(x_1x+x_2y+x_3)}{x_7x+x_8y+x_9}$$

である. よって,

$$\begin{cases} -x_7\eta=-x_4 \\ -x_7\xi-x_8\eta=-x_1-x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_8\xi=-x_2 \\ -x_4\xi=(x_1+x_9)\eta=-x_6 \\ (x_5-x_9)\xi-x_2\eta=-x_3 \\ x_6\xi-x_3\eta=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{x_8}{V''-2ax_8}=\frac{-x_7}{U''}=\frac{-x_4}{U'}=\frac{-x_2}{V}=\frac{1}{K}$$

$$\therefore\quad \frac{x_6x_7}{x_4}=-K-x_1-x_5,\quad \frac{x_4x_8}{x_7}=-K-x_1-x_9,$$

$$\frac{x_2x_7}{x_8}=K+2x_1+x_5+x_9$$

$$x_2x_4+x_3x_7+x_6x_8=x_1x_5+x_5x_9+x_9x_1$$

より，

$K=-x_1-x_4-x_9$ 或は $K=-3x_1-x_5-x_9$

となる．

$K=-x_1-x_5-x_9$ ならば，$x_1x_3=x_2x_7$，$x_6x_7=x_1x_9$，$x_4x_8=x_5x_7$

となる．

〔定理　5〕 P_1 と $(x,\ -y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$x_2x_6x_7=x_3x_4x_8,\quad \frac{x_2x_7}{x_8}=x_1+2x_5,\quad \frac{x_6x_7}{x_4}=2x_5+x_9,$$

$$\frac{x_4x_8}{x_7}=-x_5$$

である．定点は，

$$\left(\frac{x_2}{x_8},\ \frac{x_4}{x_7}\right)$$

である．

〔定理　6〕 P_1 と $(x,\ y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$\frac{x_6x_7}{x_4}=\frac{-2x_1-2x_5+x_9}{3},\quad \frac{x_4x_8}{x_7}=\frac{-2x_1-2x_5+x_9}{3},$$

$$\frac{x_2x_7}{x_8}=\frac{x_1-2x_5-2x_9}{3}$$

$$x_2x_6x_7=x_7x_4x_8$$

である．定点は $\left(\dfrac{x_2}{x_8},\ \dfrac{x_4}{x_7}\right)$ である．

〔定理　7〕 P_1 と $(-x,\ -y)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$x_2x_6x_7=x_3x_4x_8,\quad \frac{x_2x_7}{x_8}=x_1+2x_9,\quad \frac{x_4x_8}{x_7}=x_5+2x_9,$$

$$\frac{x_6x_7}{x_4}=-x_9$$

である．定点は $\left(\dfrac{x_2}{x_8},\ \dfrac{x_4}{x_7}\right)$ である．

〔定理　8〕 行列 e に定応する点を P とする．$P_1(\xi_1,\ \eta_1)$ とするとき

$$\overline{P_1Q}:\overline{P_1P}=\xi_1:\eta_1$$

となる条件は，

$$x_4x_5x_6\neq 0\quad U'=V'=W'=0 \text{ か，または}$$

$$\frac{x_4(x_1U''-x_7U)}{U''-ax_7}=\frac{x_1(x_1U''-x_7U)}{U''},\quad \frac{x_5(x_1V''-x_7V)}{U''-ax_7}$$
$$=\frac{x_2(x_2U''-x_8U)}{U''},\quad \frac{x_6(x_1W''-x_7W)}{U''-ax_7}=\frac{x_3(x_3U''-x_9U)}{U''}$$

である．

〔証明〕 条件より

$$x_4\left(x_1-\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}x_7\right)=x_1\left(x_1-x_7\frac{U}{U''}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$x_5\left(x_2-x_8\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}\right)=x_2\left(x_2-x_8\frac{U}{U''}\right) \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$x_6\left(x_3-x_9\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}=x_3\left(x_3-x_9\frac{U}{U''}\right)\right. \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$x_5\left(x_1-\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}x_7\right)+x_4\left(x_2-\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}x_8\right)$$
$$=x_2\left(x_1-x_7\frac{U}{U''}\right)+x_1\left(x_2-x_8\frac{U}{U''}\right) \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$x_6\left(x_1-\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}x_7\right)+x_4\left(x_3-\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}x_9\right)$$

$$=x_1\left(x_3-x_9\frac{U}{U''}\right)+x_3\left(x_1-x_7\frac{U}{U''}\right) \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$x_6\left(x_2-\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}x_8\right)+x_5\left(x_3-\frac{U-ax_1}{U''-ax_7}x_9\right)$$

$$=x_2\left(x_3-x_9\frac{U}{U''}\right)+x_3\left(x_2-x_8\frac{U}{U''}\right) \qquad \cdots\cdots(6)$$

$x_4x_5 \fallingdotseq 0$ のとき (1), (2) を (4) に代入して,

$$U'(x_1x_5-x_2x_4)(x_2x_7-x_1x_8)=0$$

$x_5x_6 \fallingdotseq 0$ のとき. (2), (3) を (5) に代入して,

$$U'(x_1x_6-x_3x_4)(x_1x_9-x_3x_7)=0$$

$x_6x_4 \fallingdotseq 0$ のとき, (3), (1) を (6) に代入して,

$$U'(x_2x_6-x_3x_5)(x_2x_7-x_1x_8)=0$$

U' は V', W' に置き換えることが出来る.

$x_4x_5x_6=0$ のときは, ない.

〔定理 9〕

$$\overline{P_1Q}:\overline{P_1P}=\xi_1:-\eta_1$$

となる条件は

$$x_4x_5x_6 \fallingdotseq 0, \quad U'=V'=W'=0,$$

$$\frac{-x_4(x_1U''-x_7U)}{U''-ax_7}=\frac{x_1(x_1U''-x_7U)}{U''}, \quad \frac{x_5(x_1V''-x_7V)}{U''-ax_7}$$

$$=\frac{x_2(x_2U''-x_3U)}{U''}, \quad \frac{-x_6(x_1W''-x_7W)}{U''-ax_7}$$

$$=\frac{x_3(x_3U''-x_9U)}{U''}$$

である.

〔定理 10〕 $\overline{P_1Q}:\overline{P_1P}=\eta_1:\xi_1$

となる条件は,

$$U=V=W=0, \quad x_1x_2x_3 \fallingdotseq 0$$

$$\frac{x_4(x_1U''-x_7U)}{U''-ax_7}=\frac{x_1(x_1U''-x_7U)}{U''},\quad \frac{x_5(x_1V''-x_7V)}{U''-ax_7}$$
$$=\frac{x_2(x_2U''-x_8U)}{U''},\quad \frac{x_6(x_1W''-x_7W)}{U''-ax_7}=\frac{x_3(x_3U''-x_9U)}{U''}$$

である.

〔定理 11〕 $\overline{P_1Q}:\overline{P_1P}=-\eta_1:\xi_1$

となる条件は,

$$U=V=W=0,\quad x_1x_2x_3\fallingdotseq 0$$

$$-\frac{x_4(x_1U''-x_7U)}{U''-ax_7}=\frac{x_1(x_1U''-x_7U)}{U''},\quad -\frac{x_5(x_1V''-x_7V)}{U''-ax_7}$$
$$=\frac{x_2(x_2U''-x_3U)}{U''},\quad -\frac{x_6(x_1W''-x_7W)}{U''-ax_7}$$
$$=\frac{x_3(x_3U''-x_9U)}{U''}\quad .$$

である.

〔定理 12〕

$$\frac{x_7V'-x_4V''}{x_7U'-x_4U''}=\frac{x_8V-x_2V''}{x_8U-x_2U''}=\frac{x_6V-x_5V'}{x_6U-x_3U'}$$

〔定理 12〕 行列 $X-aE$ に対応する点を R とする.
$\overline{QR}$ は定直線である.

〔証明〕 Q と R は相異なる点である. $\overline{QR}$ の方向係線は, $-\dfrac{V''}{U''}$

である.

〔定理 14〕 $Y=X-aE$ は

$$Ye_0=e_0Y=-ae_0,\quad e_1Y=Ye_1=0,\quad Y^2+aY=e_0,$$
$$Y^3=-2aY^2-a^2Y$$

なる元である.

またこの直線上に Q がある.

〔定理 15〕 R は P_1 と $(x,\ y)$ を結ぶ直線上にある.

〔定理 16〕 $|X|=0,\ x_1+x_5+x_9=a$ ならば,

$$\frac{a^2-V'-W''}{U''}=\frac{V}{V''}=\frac{W}{a^2-U-V'},\quad \frac{U''}{U'}=\frac{V''}{a^2-U-W''}$$
$$=\frac{a^2-U-V'}{W'}$$

である.

〔定理 17〕 $E-\dfrac{1}{a^2}X^2$ に対応する点は，定直線

$$(a^2-V'-W'')\xi+V\eta+W=0$$

の上にある.

〔定理 18〕 $X-nE$ に対応する点が定直線上にある条件は，

$$n=a$$

である.

〔定理 19〕 $X=Y+\dfrac{a}{2}E$ とするならば

$$Y^2\left(Y+\frac{a}{2}E\right)=\frac{1}{4}a^2\left(Y+\frac{a}{2}E\right)$$

となる.

三次の行列と幾何（III）

〔定理 1〕 X を三次の行列する.

$$R=\{xX+yX^2 \mid x,\ y\in \text{field } K,\ X^3=aX^2+bX,$$
$$\frac{1}{b},\ \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\in K,\ X^2\neq\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}X,\ K\text{ の指標は }0\}$$

に於いては，3 つの idempotent element$_1$ e_1, e_2, e_3 が存在する.

$$e_1=-\frac{a}{b}X+\frac{1}{b}X^2,\quad e_2=\left(-\frac{a}{2b}-\frac{a^2+2b}{2b}\ \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\right)X$$
$$+\left(\frac{1}{2b}+\frac{a}{2b}\ \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\right)X^2,\quad e_3=\left(-\frac{a}{2b}\right.$$
$$\left.+\frac{a^2+2b}{2b}\ \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\right)X+\left(\frac{1}{2b}-\frac{a}{2b}\ \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\right)X^2$$

$$e_1=e_2+e_3,\quad e_2e_3=e_3e_2=0$$

また，$x_1+x_5+x_9=a$，　$b=x_2x_4+x_3x_7+x_6x_8-x_1x_5-x_5x_9-x_9x_1$　$|X|=0$ である．idempotent 元 e_1，e_2 の対角元の和は 1 である．

$$Y=\begin{pmatrix} x_5x_9-x_6x_8 & x_3x_8-x_2x_9 & x_2x_6-x_3x_5 \\ x_6x_7-x_4x_9 & x_1x_9-x_3x_7 & x_3x_4-x_1x_6 \\ x_4x_8-x_5x_7 & x_2x_7-x_1x_8 & x_1x_5-x_2x_4 \end{pmatrix}$$

とする．

$e=-\dfrac{1}{b}Y$ は対角元の和が 1 なる idempotent 元である．また，

$$ee_2=e_2e=ee_3=e_3e=0$$

$$E=e+e_2+e_3$$

$$Y=X^2-aX+bE$$

である．

〔定理　2〕　$|X|=0$ のとき，

$$\frac{x_4}{x_7}=\frac{x_5}{x_8}=\frac{x_6}{x_9} \text{ 或は } \frac{x_1}{x_7}=\frac{x_2}{x_8}=\frac{x_3}{x_9}$$

なることはない．

〔証明〕　$\overline{P_1P_2}$ は定直線であるから，成立するならば，X は idempotent に体 K の元を掛けたものになる．

〔定理　3〕　X^2 に対応する点をそれぞれ P_2 とするならば $\overline{P_1P_2}$ は定直線である．

〔定理　4〕　$P_1=(\xi_1,\ \eta_1)$，とする．$(x,\ y)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が，定点を通る条件は，

$$x_6=x_5-x_9=x_8=0 \text{ で定点は } \left(\frac{-x_5}{x_7},\ \frac{x_4}{x_7}\right)$$

である．

〔定理　5〕　$(-x,y)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$x_6=x_8=x_5-x_9=0 \text{ で定点は } \left(\frac{x_5}{x_7},\ \frac{x_4}{x_7}\right)$$

である．

〔定理　6〕　$(x,\ -y)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$x_6=x_8=x_5+x_9=0 \text{ で定点は } \left(\frac{x_5}{x_7},\ \frac{x_4}{x_7}\right)$$

である．

〔定理 7〕 $(-x,\ -y)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は

$$x_6=x_8=x_5+x_9=0 \text{ で定点は } \left(-\frac{x_5}{x_7},\ \frac{x_4}{x_7}\right)$$

である．

〔定理 8〕 $(y,\ x)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$x_6=x_7=x_4-x_9=0 \text{ で，定点は } \left(-\frac{x_4}{x_8},\ \frac{x_5}{x_8}\right)$$

である．

〔定理 9〕 $(-y,\ x)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$x_4-x_9=x_6=x_7=0 \text{ で，定点は} \left(\frac{x_4}{x_8},\ \frac{x_5}{x_8}\right)$$

である．

〔定理 10〕 $(y,\ -x)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$x_7=x_6=x_4-x_9=0 \text{ で，定点は } \left(-\frac{x_4}{x_8},\ \frac{x_5}{x_8}\right)$$

である．

〔定理 11〕 $(-y,\ -x)$ と $(0,\ \eta_1)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は

$$x_7=x_6=x_4+x_9=0 \text{ で，定点は } \left(-\frac{x_4}{x_8},\ \frac{x_5}{x_8}\right)$$

である．

〔定理 12〕 $|X|=0$ のとき，e_2，e_3，X^n に対応する点を A, B, P_n とするならば，

$$\frac{\overline{P_nA}}{\overline{P_nB}} : \frac{\overline{P_{n+1}A}}{\overline{P_{n+1}B}} = 1 : \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{a-\sqrt{a^2+4b}}$$

である．

〔証明〕 $A_1=-\dfrac{a}{2b}-\dfrac{a^2+2b}{2b\sqrt{a^2+4b}}$, $B_1=\dfrac{1}{2b}+\dfrac{a}{2b\sqrt{a^2+4b}}$

$$A_2=-\frac{a}{2b}+\frac{a^2+2b}{2b\sqrt{a^2+4b}},\quad B_2=\frac{1}{2b}-\frac{a}{2b\sqrt{a^2+4b}}$$

とすれば

$$e_2=A_1X+B_1X^2,\quad e_3=A_2X+B_2X^2$$

$$X^n=\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n e_2+\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n e_3$$

〔定理 13〕 $|X|=0$ のとき，Y に対応する点を Q とする．(x, y) と Q を結ぶ直線と ξ 軸との交点が $(\eta_1, 0)$ である条件は

$$x_6=x_4-x_9=x_7=0$$

である．

〔定理 14〕 $|X|=0$ のとき，(x, y) と Q を結ぶ直線と ξ 軸との交点が $(-\eta_1, 0)$ である条件は，

$$x_7=x_4+x_9=x_6=0$$

である．

$|X|=0$ のとき，X が点 P_1 に対応するならば $x_4x_8\neq x_5x_7$，$x_1x_8\neq x_2x_7$

である．

〔証明〕 $x_4x_8=x_5x_7$，$x_1x_8=x_2x_7$ ならば，定理 2 より，

$$x_1x_5\neq x_2x_4,\quad x_7=x_8=0$$

$|X|=0$ より $x_9=0$ となる．

$x_4x_8=x_5x_7$，$x_1x_8\neq x_2x_7$ ならば，$x_6x_7=x_4x_9$，$x_5x_9=x_6x_8$ が成立し，定理 6 に反する．

$x_2x_7=x_1x_8$ ときも同様である．

〔定理 15〕 K を実数体とする．e_2, e_3 に対応する点をそれぞれ A, B とする．三角形 ABQ に於て，

$$AQ=BQ$$

なる条件は，

$$x_8(a^2+2b)=aV''$$

か，または

$$x_4U''-x_7U'=x_2V''-x_8V$$

である.

〔証明〕

$$A\left(\frac{A_1x_2+B_1V}{A_1x_8+B_1V''},\ \frac{A_1x_4+B_1U'}{A_1x_7+B_1U''}\right),$$

$$B\left(\frac{A_2x_2+B_2V}{A_2x_8+B_2V''},\ \frac{A_2x_4+B_2U'}{A_2x_7+B_2U''}\right)$$

ここに

$$A_1=-\frac{a}{2b}-\frac{a^2+2b}{2b\sqrt{a^2+4b}},\quad A_2=-\frac{a}{2b}+\frac{a^2+2b}{2b\sqrt{a^2+4b}}$$

$$B_1=\frac{1}{2b}+\frac{a}{2b\sqrt{a^2+4b}},\quad B_2=\frac{1}{2b}-\frac{a}{2b\sqrt{a^2+4b}}$$

$$Q\left(\frac{x_3x_8-x_2x_9}{x_2x_7-x_1x_8},\ \frac{x_6x_7-x_4x_9}{x_4x_8-x_5x_9}\right)$$

よって，二等辺三角である条件は，

$$\left(\frac{A_1x_1+B_1U}{A_1x_7+B_1U''}-\frac{A_2x_1+B_2U}{A_2x_7+B_2U''}\right)\left(\frac{A_1x_2+B_1V}{A_1x_8+B_1V''}\right.$$
$$\left.+\frac{A_2x_2+B_2V}{A_2x_8+B_2V''}-2\frac{x_3x_8-x_2x_9}{x_2x_7-x_1x_8}\right)+\left(\frac{A_1x_4+B_1U'}{A_1x_7+B_1U''}\right.$$
$$\left.-\frac{A_2x_4+B_2U'}{A_2x_7+B_2U''}\right)\left(\frac{A_1x_4+B_1U'}{A_1x_7+B_1U'}+\frac{A_2x_4+B_2U'}{A_2x_7+B_2U''}\right.$$
$$\left.-2\frac{x_6x_7-x_4x_9}{x_4x_8-x_5x_7}\right)=0$$

である.

$$\frac{A_ix_4+B_iV}{A_ix_8+B_iV''}-\frac{x_3x_8-x_2x_9}{x_2x_7-x_1x_8}=\frac{(A_i+aB_i)(x_2V''-x_8V)}{(A_ix_8+B_iV'')(x_2x_7-x_1x_8)}(i$$
$$=1,\ 2)$$

$$\frac{A_ix_4+B_iU'}{A_ix_7+B_iU'}-\frac{x_6x_7-x_4x_9}{x_4x_8-x_5x_7}=\frac{(A_i+aB_i)(x_4U''-x_7U')}{(A_ix_7+B_iU'')(x_4x_8-x_5x_7)}(i$$
$$=1,\ 2)$$

より，

$$\frac{A_1+aB_1}{A_1x_8+B_1V''}+\frac{A_2+aB_2}{A_2x_8+B_2V''}=0$$

か，または，

$$\frac{(x_1U''-x_7U)(x_2V''-x_8V)}{x_2x_7-x_1x_8}+\frac{(x_4U''-x_7U')^2}{x_4x_8-x_5x_7}=0$$

$$\frac{x_4U''-x_7U'}{x_1U''-x_7U}=\frac{x_4x_8-x_5x_7}{x_1x_8-x_2x_7}$$

である．

〔定理 16〕 $E-e_1$ に対応する点を P，e_2 に対応する点を Q，e_3 に対応する点を R とするならば，

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)E+\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}X \text{ に対応する点は，}$$

直線 $\overline{PR}$ の上にある．

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)E-\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}X \text{ に対応する点は，直線 } \overline{PQ}$$

の上にある．

〔定理 17〕 $P_n(\xi_n,\ \eta_n)$，$P_{n+1}(\xi_{n+1},\ \eta_{n+1})$ とする．$(\xi_n,\ 0)$ と P_{n+1} を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$\frac{x_iV'-x_2U'}{x_1x_5-x_2x_4}=\frac{x_7V''-x_8U''}{x_5x_7-x_4x_8},\quad \frac{x_2W'-x_3V'}{x_2x_6-x_3x_5}$$

$$=\frac{x_8W''-x_9V''}{x_6x_8-x_5x_9},\quad \frac{x_3U'-x_1W'}{x_3x_4-x_1x_6}=\frac{x_9U''-x_3W''}{x_4x_9-x_6x_7}$$

で，定点は，

$$\left(\frac{(x_1V-x_2U)(x_7V'-x_8U')}{(x_1V'-x_2U')(x_7V''-x_8U''},\ \frac{x_7V'-x_8U'}{x_7V''-x_8U''}\right)$$

である．また，

$$\frac{x_7V'-x_8U'}{x_7V''-x_8U''}=\frac{x_8W'-x_9U'}{x_8W''-x_9V''}=\frac{x_9U'-x_7W'}{x_9U''-x_7W''},$$

$$\frac{x_1V-x_2U}{x_1V'-x_2U'}=\frac{x_2W-x_3V}{x_2W'-x_3V'}=\frac{x_3U-x_1W}{x_3U'-x_1W'}$$

が成立する．

〔定理 18〕 e_1 に対応する点の ξ 座標を ξ_0 とする．P_1 と $(\xi_0,\ 0)$ を結ぶ直線が定点を通る条件は，

$$\frac{x_4x_8-x_5x_7}{x_8U''-x_7U''}=\frac{x_5x_9-x_6x_8}{x_9V''-x_8W''}=\frac{x_6x_7-x_4x_9}{x_7W''-x_9U''}$$

$$\frac{Ux_2-Vx_1}{x_2x_4-x_1x_5}=\frac{Vx_3-Wx_2}{x_5x_3-x_2x_6}=\frac{Wx_1-Ux_3}{x_1x_6-x_3x_4}$$

$$\frac{x_5U-x_4V}{x_2x_4-x_1x_5}=\frac{x_5U''-x_4V''}{x_4x_8-x_4x_7},\quad \frac{x_6V-x_5W}{x_3x_5-x_2x_6}=\frac{x_6V''-x_5W''}{x_5x_9-x_8x_6},$$

$$\frac{x_4W-x_6U}{x_1x_6-x_4x_3}=\frac{x_4W''-x_6U''}{x_6x_7-x_4x_9}$$

である．その定点は，

$$\left(\frac{(Ux_2-Vx_1)\{(x_4x_8-x_5x_7)a+x_5U''-x_4V''\}}{\{Ux_5-Vx_4+a(x_2x_4-x_1x_5)\}(x_8U''-x_7V'')},\right.$$
$$\left.\frac{a(x_4x_8-x_5x_7)+x_5U''-x_4V''}{x_8U''-x_7V''}\right)$$

である．

〔定理 19〕 (x, y) と Q を結ぶ直線の ξ 軸との交点の原点に関する対称点を P_1 に結ぶ直線が定直線に平行である条件は，

（i） $x_7=0,\quad \dfrac{x_1+x_9}{x_4}=\dfrac{x_3}{x_6}$

（ii） $\dfrac{x_1+x_9}{x_4}=\dfrac{x_8(x_5x_9-x_6x_8)}{x_5(x_4x_8-x_5x_7)}+\dfrac{x_2}{x_5}=\dfrac{x_9(x_5x_9-x_6x_8)}{x_6(x_4x_8-x_5x_9)}+\dfrac{x_3}{x_6}$

である．

〔定理 20〕 X^n に対応する点を P^n とする．$\overline{QP_n}$ と ξ 軸との交点の原点に関する対称点を P_{n+1} と結ぶ直線が定直線に平行である条件は，

$Q(\xi_0, \eta_0)$ とするとき，

$$\frac{x_4-x_7\eta_0}{U''}=\frac{x_5-x_8\eta_0}{V''}=\frac{x_6-x_9\eta_0}{W''}$$
$$=\frac{\eta_0(x_2U'-x_1V')-\xi_0(x_5U'-x_4V')}{VU'-UV'}$$
$$=\frac{\eta_0(x_3V'-x_2W')-\xi_0(x_6V'-x_5W')}{WV'-VW'}$$
$$=\frac{\eta_0(x_1W'-x_3U')-\xi_0(x_4W'-x_6U')}{UW'-WU'}$$

で，その方向係数は，

$$\frac{\eta_0(x_2U-x_1V)-\xi_0(x_5U-x_4V)}{\eta_0(x_2U'-x_1V')-\xi_0(x_5U'-x_4V')}$$

$$=\left(\frac{\eta_0(x_3V-x_2W)-\xi_0(x_6V-x_5W)}{\eta_0(x_3V'-x_2W')-\xi_0(x_6V'-x_5W')}\right.$$

$$\left.=\frac{\eta_0(x_1W-x_3U)-\xi_0(x_4W-x_6U)}{\eta_0(x_1W'-x_3U')-\xi_0(x_4W'-x_6U')}\right)$$

である．

〔証明〕 $n=1$ のとき成立する．また，

$$X^{n+2}=aX^{n+1}+bX^n,$$

$$X^n=\begin{pmatrix} x_1{}^{(n)} & x_2{}^{(n)} & x_3{}^{(n)} \\ x_4{}^{(n)} & x_5{}^{(n)} & x_6{}^{(n)} \\ x_7{}^{(n)} & x_8{}^{(n)} & x_9{}^{(n)} \end{pmatrix}$$

とすると

$$Y^n=\begin{pmatrix} x_5{}^{(n)}x_9{}^{(n)}-x_6{}^{(n)}x_8{}^{(n)} & x_3{}^{(n)}x_8{}^{(n)}-x_2{}^{(n)}x_9{}^{(n)} & x_2{}^{(n)}x_6{}^{(n)}-x_3{}^{(n)}x_5{}^{(n)} \\ x_6{}^{(n)}x_7{}^{(n)}-x_4{}^{(n)}x_9{}^{(n)} & x_1{}^{(n)}x^{9(n)}-x_3{}^{(n)}x_7{}^{(n)} & x_3{}^{(n)}x_4{}^{(n)}-x_1{}^{(n)}x_6{}^{(n)} \\ x_4{}^{(n)}x_8{}^{(n)}-x_5{}^{(n)}x_7{}^{(n)} & x_2{}^{(n)}x_7{}^{(n)}-x_1{}^{(n)}x_8{}^{(n)} & x_1{}^{(n)}x_5{}^{(n)}-x_2{}^{(n)}x_4{}^{(n)} \end{pmatrix}$$

であることより，

$$\frac{x_4{}^{(n)}-\eta_0x_7{}^{(n)}}{x_7{}^{(n+1)}}=\frac{x_5{}^{(n)}-\eta_0x_8{}^{(n)}}{x_8{}^{(n+1)}}=\frac{x_6{}^{(n)}-\eta_0x_9{}^{(n)}}{x_9{}^{(n+1)}}$$

$$=\frac{\eta_0(x_2{}^{(n)}x_4{}^{(n+1)}-x_1{}^{(n)}x_5{}^{(n+1)})-\xi_0(x_5{}^{(n)}x_4{}^{(n+1)}-x_4{}^{(n)}x_5{}^{(n+1)})}{x_2{}^{(n+1)}x_4{}^{(n+1)}-x_1{}^{(n+1)}x_5{}^{(n+1)}}$$

$$=\frac{\eta_0(x_3{}^{(n)}x_5{}^{(n+1)}-x_2{}^{(n)}x_6{}^{(n+1)})-\xi_0(x_6{}^{(n)}x_5{}^{(n+1)}-x_5{}^{(n)}x_6{}^{(n+1)})}{x_3{}^{(n+1)}x_5{}^{(n+1)}-x_2{}^{(n+1)}x_6{}^{(n+1)}}$$

$$=\frac{\eta_0(x_1{}^{(n)}x_6{}^{(n+1)}-x_3{}^{(n)}x_4{}^{(n+1)})-\xi_0(x_4{}^{(n)}x_6{}^{(n+1)}-x_6{}^{(n)}x_4{}^{(n+1)})}{x_1{}^{(n+1)}x_6{}^{(n+1)}-x_3{}^{(n+1)}x_4{}^{(n+1)}}$$

$$=\frac{x_4-x_7\eta_0}{U''}$$

〔定理 21〕 $\overline{AB}$ と $\overline{BQ}$ が直交する条件は，

$$\frac{(x^2V''-x_8V)^2}{(A_1x_8+B_1V'')(A_2x_8+B_2V'')^2(x_2x_7-x_1x_8)}+\frac{(x_4U''-x_7U')^2}{(A_1x_7+B_1U'')(A_2x_7+B_2U'')^2(x_4x_8-x_5x_7)}=0$$

$\overline{AB}$ と $\overline{AQ}$ が直交する条件は

$$\frac{(x_2V''-x_8V)^2}{(A_1x_8+B_1V'')^2(A_2x_8+B_2V'')(x_2x_7-x_1x_8)}+\frac{(x_4U''-x_7U')^2}{(A_1x_7+B_1U'')^2(A_2x_7+B_2U'')(x_4x_8-x_5x_7)}=0$$

である．

〔定理 22〕 $X=Y_1+\frac{a}{2}E$ とするならば，

$$Y_1^2\left(Y_1+\frac{a}{2}E\right)=\left(\frac{1}{4}a^2+b\right)\left(Y_1+\frac{a}{2}E\right)$$

$X=Y_2+\frac{\alpha}{2}E$ とするならば

$$Y_2^2\left(Y_2+\left(\frac{3\alpha}{2}-a\right)E\right)=\frac{\alpha^2}{4}\left(Y_2+\left(\frac{3\alpha}{2}-a\right)E\right)$$

$X=Y_3+\frac{\beta}{2}E$ とするならば

$$Y_3^2\left(Y_3+\left(\frac{3\beta}{2}-a\right)E\right)=\frac{\beta^2}{4}\left(Y_3+\left(\frac{3\beta}{2}-a\right)E\right)$$

となる．ここに， α, β は二次方程式

$$t^2-at=b=0$$

の根である．

三次の行列と幾何（IV）

〔定理 1〕 環 R

$$\left\{xX+yX^2 \mid x,\ y\in \text{real number field } K,\right.$$

$$X^3=aX^2-\frac{a^2}{4}X,\quad K\ni\frac{1}{a},\quad\Big\}$$

に於いて，X が K の元を element とする三次行列であるならば，

$$|X|=0$$

である．

〔証明〕 R の $|X|\neq 0$ とするならば

$$X^2=aX-\frac{a^2}{4}E \ (E\ は単位行列)$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\\ x_7 & x_8 & x_9\end{pmatrix},\quad X^2=\begin{pmatrix}U & V & W\\ U' & V' & W'\\ U'' & V'' & W''\end{pmatrix}$$

とおく．

$$\left.\begin{array}{l}1=\dfrac{4}{a}x_1-\dfrac{4}{a^2}U,\quad V=ax_2,\quad W=ax_3\\[2ex] U'=ax_4,\quad 1=\dfrac{4}{a}x_5-\dfrac{4}{a^2}V',\quad W'=ax_6,\\[2ex] U''=ax_7,\quad V''=ax_8,\quad 1=\dfrac{4}{a}x_9-\dfrac{4}{a^2}W'\end{array}\right\}\qquad\cdots\cdots(1)$$

$$(x_2x_6-x_3x_5)U+(x_3x_4-x_1x_6)V+(x_1x_5-x_2x_4)W=x_3|X|.$$

$$\therefore\quad x_2x_6-x_3x_5=-\frac{4x_3}{a^2}|X|$$

同様にして，結局

$$X^{-1}=\frac{1}{|X|}\begin{pmatrix}x_5x_9-x_6x_8 & x_3x_8-x_2x_9 & x_2x_6-x_3x_5\\ x_6x_7-x_4x_9 & x_1x_9-x_3x_9 & x_3x_4-x_1x_6\\ x_4x_8-x_5x_7 & x_2x_7-x_1x_8 & x_1x_5-x_2x_4\end{pmatrix}=-\frac{4}{a^2}X$$

$$\therefore\quad |X|^2=-\frac{a^6}{64}<0$$

〔定理 2〕 環 R の idempotent 元 $e_1=\dfrac{4}{a}X-\dfrac{4}{a^2}X^2$ の対角元の和は 2 であるか，または，$\dfrac{2}{a}X$ が idempotent である．(以後，$\dfrac{2}{a}X$ が idempotent である場合は除く)

〔証明〕 前定理より $e_1 \neq E$, e_1 の対角元の和が 1 とする.
$e_0 = X - \frac{2}{a} X^2$ は nilpotent である.

$$\therefore \quad x_1 + x_5 + x_9 = \frac{a}{2}$$

$$x_1 - \frac{2}{a} U : x_2 - \frac{2}{a} V : x_3 - \frac{2}{a} W = x_4 - \frac{2}{a} U' : x_5 - \frac{2}{a} V' :$$

$$x_6 - \frac{2}{a} W' = x_7 - \frac{2}{a} U^4 : x_8 - \frac{2}{a} V'' : x_9 - \frac{2}{a} V''' \quad \cdots (2)$$

$$x_1 - \frac{2}{a} U + x_5 - \frac{2}{a} V' + x_9 - \frac{2}{a} W'' = 0 \qquad \cdots\cdots (3)$$

(3) より $x_1x_5 + x_1x_9 + x_5x_9 = x_2x_4 + x_3x_7 + x_6x_8$

$$\therefore \quad \frac{2}{a} e_0 = \begin{pmatrix} x_5x_9 - x_6x_8 & x_3x_8 - x_2x_9 & x_2x_6 - x_3x_5 \\ x_6x_7 - x_4x_9 & x_1x_9 - x_3x_7 & x_3x_4 - x_1x_6 \\ x_4x_8 - x_5x_7 & x_2x_7 - x_1x_8 & x_1x_5 - x_2x_4 \end{pmatrix}$$

また (1) より,

$$\frac{x_2(x_1 + x_5 + x_9) + x_2x_9 - x_3x_8}{x_5(x_1 + x_5 + x_9) + x_3x_7 - x_1x_9} = \frac{x_3(x_1 + x_5 + x_9) + x_3x_5 - x_2x_6}{x_6(x_1 + x_5 + x_9) + x_1x_6 - x_3x_4},$$

$$\therefore \quad x_2x_6 - x_3x_5 = -\frac{1}{x_1 + x_5 + x_9} \big(x_2(x_1x_6 - x_3x_4) + x_6(x_2x_9 - x_3x_8)$$
$$- x_3(x_3x_7 - x_1x_9) - x_5(x_3x_5 - x_2x_6)\big) = -x_2x_6 + x_3x_5$$

$$\therefore \quad x_2x_6 = x_3x_5, \quad \cdots\cdots$$

よって, $e_0 = 0$ となる.

〔定理 3〕 idempotent 元 e, の対角元の和が 2 であるならば,

$$x_1 + x_5 + x_9 = a$$

$$x_1x_5 + x_5x_9 + x_9x_1 - x_2x_4 - x_3x_7 - x_6x_8 = \frac{a^2}{4}$$

が成立する. 逆に (4) が成立するならば,

$$X^3 = aX^2 - \frac{a^2}{4} X$$

が成立する.

〔定理　4〕（4）が成立するならば，X, X^2 に対応する点 P_1, P_2 は x, y の如何に関せず定直線上にある.

〔証明〕

$$e_0\longrightarrow\left(\frac{ax_1-2U}{ax_7-2U''},\quad\frac{ax_4-2U'}{ax_7-2U''}\right)$$

$$e_1\longrightarrow\left(\frac{(x_1x_5+x_1x_9-x_2x_4)x+(x_2x_9-x_3x_8)y+x_3x_5-x_2x_6}{(x_5x_7-x_4x_8)x+(x_1x_8-x_2x_7)y+x_1x_5+x_1x_9-x_2x_4}\right),$$

$$\left.\frac{(x_4x_9-x_6x_7)x+(x_1x_5+x_5x_9)y+x_1x_6-x_3x_4}{(x_5x_7-x_4x_8)x+(x_1x_8-x_2x_7)y+x_1x_5+x_1x_9-x_2x_4}\right)$$

ここで

$$\frac{(ax_7-2U'')(x_1x_5+x_1x_9-x_2x_4)-(ax_1-2U)(x_5x_7-x_4x_8)}{(ax_7-2U'')(x_4x_9-x_6x_7)-(ax_4-2U')(x_5x_7-x_4x_8)}$$
$$=\frac{(ax_7-2U'')(x_2x_9-x_3x_8)-(ax_1-2U)(x_1x_8-x_2x_7)}{(ax_7-2U'')(x_1x_5+x_5x_9)-(ax_4-2U')(x_1x_8-x_2x_7)}$$
$$=\frac{(ax_7-2U'')(x_3x_5-x_2x_6)-(ax_1-2U)(x_1x_9+x_5x_9-x_6x_8)}{(ax_7-2U'')(x_1x_6-x_3x_4)-(ax_4-2U')(x_1x_9+x_5x_9-x_6x_8)}$$

が成立する.

〔定理　5〕　$X^3=aX^2-\dfrac{a^2}{4}X\ (a\neq 0)$

なるとき，X, X^2 に対応する点を P_1, P_2 とする.

$P_1(\xi_1,\ \eta_1)$,　$P_2(\xi_2,\ \eta_2)$

（ξ_1, 0）と P_2 を結ぶ直線が摩擦軸に平行でなく，また定点を通る条件は，

$$\frac{x_1V'-x_2U'}{x_1x_5-x_2x_4}=\frac{x_7V-x_8U}{x_5x_7-x_4x_8}$$
$$\frac{x_2W'-x_3V'}{x_2x_6-x_3x_5}=\frac{x_3W'-x_9V'}{x_6x_8-x_5x_9}$$
$$\frac{x_3U'-x_1W'}{x_3x_4-x_1x_6}=\frac{x_9U'-x_3W'}{x_4x_9-x_6x_7}$$

で，定点は，

$$\left(\frac{(x_1V-x_2U)(x_7V'-x_8U')}{(xV'-x_2U')(x_7V''-x_8U'')},\quad\frac{x_7V'-x_8U'}{x_7V''-x_8U''}\right)$$

である.

〔証明〕（ξ, 0）と P_2 を結ぶ直線の方程式より

$$x_7U'\xi-(x_7U-x_1U'')\eta=x_1U'$$
$$(x_7V'+x_8U')\xi-(x_8U+x_7V-x_1V''-x_2U'')\eta=x_1V'+x_2U'$$
$$x_8V'\xi-(x_8V-x_2V'')\eta=x_2V'$$
$$(x_9U'+x_7W')\xi-(x_9U+x_7W-x_1W''-x_3U'')\eta=x_1W'+x_3U'$$
$$(x_9U'+x_8W')\xi-(x_9V+x_8W-x_3V''-x_2W'')\eta=x_2W'+x_3V'$$
$$x_9W'\xi-(x_9W-x_3W'')\eta=x_3W'$$

よって

$$\frac{X_1}{x_7}=\frac{x_2}{x_8}=\frac{x_3}{x_9}=\frac{U'\xi-U\eta}{U'-U''\mu}=\frac{V'\xi-V\eta}{V'-V''\eta}=\frac{W'\xi-W\eta}{W'-W''\eta} \quad \cdots\cdots(6)$$

または

$$\frac{x_1}{U'\xi-U\eta}=\frac{x_2}{V'\xi-V\eta}=\frac{x_3}{W'\xi-W\eta}=\frac{x_7}{U'-U''\eta}=\frac{x_8}{V'-V''\eta}=\frac{x_9}{W'-W''\eta} \quad \cdots\cdots(7)$$

が成立する.（6）より $\xi_1=k_1$ となり，$\dfrac{2}{a}X$ は idempotent となる.（7）より，

$$\eta=\frac{x_7V'-x_8U'}{x_7V''-x_8U''}=\frac{x_8W'-x_9V'}{x_8W''-x_9V''}=\frac{x_9U'-x_7W'}{x_9U''-x_7W''} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\frac{\xi}{\eta}=\frac{x_1V-x_2U}{x_2V'-x_2U'}=\frac{x_2W-x_3V}{x_2W'-x_3V'}=\frac{x_3U-x_1W}{x_3U'-x_1W'} \quad \cdots(9)$$

ここに（8），（9）の等式は $|X|=0$ のとき常に成立する.

〔定理 6〕（x, $-y$）が（ξ_1, 0）と P_2 を結ぶ直線上にある条件は，
$x_5=x_5=x_7=x_8=0$，$x_1=x_9$，である.

〔証明〕

$$\frac{xU'+yV'+W'}{xU''+yV''+W''}\xi-\left(\frac{xU+yV+W}{xU''+xV''+W''}-\frac{x_1x+x_2y+x_3}{x_7x+x_8y+x_9}\right)\eta$$

$$=\frac{(x_1x+x_2y+x_3)(xU'+yV'+W')}{(x_7x+x_8y+x_9)(xU''+yV''+W'')}$$

に $\xi=x$, $\eta=-y$ を代入して,

$$\left.\begin{aligned}
&x_7U'=0\\
&x_8U'+x_7V'+x_7U-x_1U''=0\\
&x_8V'+x_8U+x_7V-x_2U''-x_1V''=0\\
&x_8V-x_2V''=0\\
&x_9U'+x_7W'-x_1U'=0\\
&x_9V'+x_8W'+x_9U+x_7W-x_3U''-x_1W''-x_1V'-x_2U'=0\\
&x_9V+x_8W-x_3V''-x_2W''-x_2V'=0\\
&x_9W'-x_3U'-x_1W'=0\\
&x_9W-x_3W''-x_2W'-x_3V'=0\\
&-x_3W'=0
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

が成立する．よって,

$$(x_9+x_7)(U'+W')=(x_1x_3)(U'+W')$$

$\therefore$　$U'+W'=0\cdots\cdots(11)$　か　または $x_9+x_7=x_1+x_3\cdots\cdots(12)$

(11) の場合, $U'=W'=0$ ならば $E-e_1$ が対角線の和が 1 なる idempotent 元であるから,

$$\begin{cases}
\dfrac{x_6x_7-x_4x_9}{x_4}=\dfrac{x_3x_4-x_1x_6}{x_6},\quad \dfrac{x_5x_9-x_6x_8}{x_4}=\dfrac{x_2x_6-x_3x_5}{x_6},\\[2mm]
\dfrac{x_4x_8-x_5x_7}{x_4}=\dfrac{x_1x_5-x_2x_4}{x_6} \qquad\cdots\cdots(13)\\[2mm]
x_5-\dfrac{2}{a}V'=0 \qquad\cdots\cdots(14)
\end{cases}$$

よって,　$x_5\fallingdotseq 0$, $x_4=x_6=0$, $x_1+x_9=x_5$

これは不成立.

$W'=U'=0$ の不成立のときは,

$$x_7W'=(x_1-x_9)U',\quad (x_9-x_1)W'=x_3U'$$

より $x_1=x_9$, が成立する.

$U'+W'=0$　$U\fallingdotseq 0$ の場合は,

$$X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & x_5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(15)$$

となる.

$x_9+x_7=x_1+x_3$, の場合は $x_1=x_9$ より $x_3=x_7=0$ が成立する. よって $|X|=0$ と (10) より ($x5$) と定理の結果を得る.

〔定理 7〕 行列 $e_2=\dfrac{4}{a^2}X^2-\dfrac{4}{a}X+E$ は idempotent である. 行列の対角元の和は 1 である.

$$X^2-aX+\frac{a^2}{4}E=\begin{pmatrix}x_5x_9-x_6x_8 & x_3x_8-x_2x_9 & x_2x_6-x_3x_5\\ x_6x_7-x_4x_9 & x_1x_9-x_3x_7 & x_3x_4-x_1x_6\\ x_4x_8-x_5x_7 & x_2x_7-x_1x_8 & x_1x_5-x_2x_4\end{pmatrix}$$

e e_2, に対応する点と (x, y) は同一直線上にある.

〔証明〕 $\dfrac{1}{a}X-\dfrac{4}{a^2}X^2$ の対角元の和は 2 である.

$$\therefore \quad U+V'+W''=\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{4}{a^2}(U+U'+W'')-\frac{4}{a}a+3=1$$

〔定理 8〕 行列 e_2 に対応する点を R とする. R と (x, y) を結ぶ直線と ξ 軸との交点が, (ξ_1, 0) である条件は,

$$x_3=x_5=x_7=0, \quad x_1=x_9$$

である.

〔定理 9〕 R と (x, y) を結ぶ直線と ξ 軸との交点が, ($-\xi$, 0) である場合はない.

〔証明〕 前定理と同じようにすれば $x_1=x_5=x_7=0$, $x_1+x_9=0$ となる.

$$\therefore \quad a=0$$

〔定理 10〕 行列 e_0, e_1 に対応する点を, それぞれ P, Q とするならば,

$$\frac{\overline{P_1P}}{P_1Q}:\frac{\overline{P_2P}}{P_2Q}=2:a^2$$

もっと一般に

$$\frac{\overline{P_nP}}{\overline{P_nQ}} : \frac{\overline{P_{n+1}P}}{P_{n+1}Q} = 2 : a^2$$

が成立する．ここに，P_n, P_{n+1} は行列 X_n, X_{n+1} に対応する点である．

〔証明〕（4）より次式が成立するからである．

$$\frac{a}{2} = \frac{a(x_7V - x_1V'') + 2(UV'' - U''V)}{a(x_2x_7 - x_1x_8) + 2(x_8U - x_2U'')}$$
$$= \frac{a(x_7W - x_1W'') + 2(UW'' - U''W)}{a(x_3x_7 - x_1x_9) + 2(x_9U - x_3U'')}$$

〔定理 11〕 $X+E$ に対応する点を S とするならば，S は定直線上にある．

〔証明〕 e_0 と e_2 に対応する点を結ぶ直線上に S が存在する．

〔定理 12〕 $\overline{SP_2}$ と $\overline{P_1R}$ と，$\overline{P_0P}$ は一点で交わる．この点は行列 $E - \frac{2}{a}X + \frac{4}{a^2}X^2$ に対応する点である．ここに P_0 は (x, y) である．

〔定理 13〕

$$\frac{\overline{QP_{n+1}}}{\overline{QP}} : \frac{\overline{P_nP_{n+1}}}{\overline{P_nP}} = 2 : a$$

〔定理 14〕 $X = Y_1 + \frac{a}{2}E$ とするならば

$$Y_1^2\left(Y_1 + \frac{a}{2}E\right) = 0$$

$X = Y_2 + \frac{a}{4}E$ とするならば

$$Y_2^2\left(Y_2 - \frac{1}{4}aE\right) = \frac{a^2}{16}\left(Y_2 - \frac{1}{4}aE\right)$$

となる．