ある条件の付いた五次行列式

藤末　宏

三次の行列群

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1^2+x_4^2-x_7^2=x_2^2+x_5^2-x_8^2=x_9^2-x_3^2-x_6^2\neq 0 \\ x_1x_2+x_4x_5=x_7x_8,\ x_1x_3+x_4x_6=x_7x_9,\ x_2x_3+ \\ x_5x_6=x_8x_9 \end{array}\right\}$$

の条件

$$F\equiv x_1^2+x_4^2-x_7^2-(x_9^2-x_3^2-x_6^2)=0$$

$$G\equiv x_2^2+x_5^2-x_8^2-(x_9^2-x_3^2-x_6^2)=0$$

$$H\equiv x_1x_2+x_3x_5-x_7x_8=0$$

$$I\equiv x_1x_3+x_4x_6-x_7x_9=0$$

$$J\equiv x_2x_3+x_5x_6-x_8x_9=0$$

より得られる五次の行列式，例えば

$$\begin{vmatrix} F_{x_1} & G_{x_1} & H_{x_1} & I_{x_1} & J_{x_1} \\ F_{x_2} & G_{x_2} & H_{x_2} & I_{x_2} & J_{x_2} \\ F_{x_4} & G_{x_4} & H_{x_4} & I_{x_4} & J_{x_4} \\ F_{x_5} & G_{x_5} & H_{x_5} & I_{x_5} & J_{x_5} \\ F_{x_6} & G_{x_6} & H_{x_6} & I_{x_6} & J_{x_6} \end{vmatrix}$$

の変数を入れ変えたものを列挙すると次の様になる．行列式の横に書かれた最初の多項式は行列式そのままの値であり，次に書かれたものは，行列群の条件から得られる

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=x_4^2+x_5^2-x_6^2=x_9^2-x_7^2-x_8^2$$

$$x_1x_4+x_2x_5=x_3x_6,\quad x_1x_7+x_2x_8=x_3x_9,\quad x_4x_7+x_5x_8=x_6x_9$$

なる条件を使って式を簡単化したものである．五次行列式中の係数 4 は省略した．

変数　　五次行列式

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \end{vmatrix} = x_3\{(x_1x_5-x_2x_4)^2-(x_1x_6-x_3x_4)^2-(x_2x_6-x_3x_5)^2\} = (x_5x_7-x_4x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} = x_2\{(x_1x_6-x_3x_4)^2-(x_1x_5-x_2x_4)^2+(x_2x_6-x_3x_5)^2\} = (x_4x_9-x_6x_7)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_7 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_3 & -x_9 & 0 \end{vmatrix} = (x_3^2-x_2^2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & -x_3 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = x_7(x_2^2-x_3^2)(x_1x_6-x_3x_4) + x_8(2x_1x_2x_3x_4+x_3^3x_5-x_1^2x_3x_5 - x_1^2x_2x_6-x_2x_3^2x_6)+x_9(x_1^2x_2x_5 + x_1^2x_3x_6+x_2^2x_3x_6-x_2^2x_1x_4 - x_3^2x_2x_5-x_3^2x_1x_4) = x_1x_2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = x_7(x_3^2-x_2^2)(x_1x_5-x_2x_4)$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}$$
$$+x_8(x_1^2x_3x_6+x_1^2x_2x_5+x_2^2x_3x_6$$
$$-x_2^2x_1x_4-x_3^2x_1x_4-x_3^2x_2x_5)$$
$$+x_9(2x_1x_2x_3x_4-x_1^2x_2x_6-x_1^2x_3x_5$$
$$-x_2^3x_6+x_2^2x_3x_5)$$
$$=-x_1x_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \end{vmatrix}$$
$$=x_1\{(x_1x_5-x_2x_4)^2-(x_1x_6-x_3x_4)^2-(x_2x_6$$
$$-x_3x_5)^2\}=(x_5x_9-x_6x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=x_7(x_1x_3^2x_6-x_3^3x_4+x_1x_2^2x_6$$
$$+x_2^2x_3x_4-2x_1x_2x_3x_5)+x_8(x_1^2x_3x_5$$
$$-x_1^2x_2x_6+x_2x_3^2x_6-x_3^3x_5)$$
$$+x_9(x_1^2x_2x_5-x_1^2x_3x_6-x_2^2x_1x_4$$
$$-x_2^2x_3x_6+x_1x_3^2x_4+x_2x_3^2x_5)$$
$$=x_1x_2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}$$
$$=(x_3^2-x_1^2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=x_7(x_1^2x_2x_5-x_1^2x_3x_6-x_1x_2^2x_4$$

$$
\begin{vmatrix}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8
\end{vmatrix}
\begin{aligned}
&-x_2^2x_3x_6+x_1x_3^2x_4+x_2x_3^2x_5) \\
&+x_3(x_1^2x_2x_4-x_1^3x_5-x_2x_3^2x_4 \\
&+x_1x_3^2x_5)+x_9(x_1^3x_6-x_1^2x_3x_4 \\
&+x_1x_2^2x_6+x_2^2x_3x_4-2x_1x_2x_3x_5)
\end{aligned}
$$

$$
=-x_2x_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0
\end{vmatrix}
\begin{aligned}
&=x_7(x_1x_2^2x_5-x_2^3x_4+x_3x_3^2x_4 \\
&+x_1x_3^2x_5-2x_1x_2x_3x_4)+x_8(x_1^2x_3x_6 \\
&-x_1^2x_2x_5-x_2^2x_3x_6+x_1x_3^2x_4 \\
&-x_1x_3^2x_4+x_2x_3^2x_5)+x_9(x_1^2x_2x_6 \\
&-x_1^2x_3x_5+x_2^3x_6-x_2^2x_3x_5
\end{aligned}
$$

$$
=-x_1x_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9
\end{vmatrix}
\begin{aligned}
&=x_7(x_1^2x_3x_6-x_1^2x_2x_5+x_1x_2^2x_4 \\
&-x_2^2x_3x_6-x_1x_3^2x_4+x_2x_3^2x_5) \\
&+x_8(x_1^3x_5-x_1^2x_2x_4-x_1x_3^2x_5 \\
&-x_2x_3^2x_4+2x_1x_2x_3x_6) \\
&+x_9(x_1^2x_3x_4-x_1^3x_6+x_2^2x_3x_4 \\
&-x_1x_2^2x_6)=-x_2x_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\
x_3 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5
\end{vmatrix}
=(x_1^2+x_2^2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$x_9 \quad \begin{vmatrix} -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_2\{(x_1x_9-x_3x_7)^2+(x_2x_9 - x_3x_8)^2-(x_1x_8-x_2x_7)^2\} = (x_6x_7-x_4x_9) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_1\{(x_2x_7-x_1x_8)^2+(x_1x_9 - x_3x_7)^2-(x_2x_9-x_3x_8)^2\} = (x_6x_8-x_5x_9) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} = x_6\{(x_1x_5-x_2x_4)^2-(x_1x_6-x_3x_4)^2-(x_2x_6 - x_3x_5)^2\} = (x_1x_8-x_2x_7) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_8 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix} = (x_2x_6-x_3x_5) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \end{vmatrix} = (x_3x_4-x_1x_6) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$x_8 \quad \begin{vmatrix} 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_9 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} \begin{matrix} =x_7(x_1x_6-x_3x_5)(x_1x_5-x_2x_4) \\ -x_8(x_1x_5-x_2x_4)(x_1x_6-x_3x_4) \\ +x_9\{(x_1x_6-x_3x_4)^2+(x_2x_6 \\ -x_3x_5)^2\}=0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} \begin{matrix} =x_7(x_1x_3x_6^2-x_1x_2x_5x_6+x_2x_3x_4x_5 \\ -x_3^2x_4x_6)+x_3(x_1^2x_5x_6+x_2x_3x_6^2 \\ -x_3^2x_5x_6-x_2x_3x_4^2)+x_9(x_2x_3x_5x_6 \\ +x_2^2x_4^2+x_1x_3x_4x_6-x_1x_2x_4x_5 \\ -x_2^2x_6^2-x_1^2x_6^2) \end{matrix}$$

$$=-x_2x_4 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_9 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_6 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} \begin{matrix} =x_7(x_1x_2x_5^2-x_2^2x_4x_5-x_1x_3x_5x_6 \\ +x_2x_3x_4x_6)+x_8(x_2^2x_4^2-x_2^2x_6^2 \\ -x_1^2x_6^2-x_1x_2x_4x_5+x_2x_3x_5x_6 \\ +x_1x_3x_4x_6)+x_9(x_1^2x_5x_6-x_2x_3x_4^2 \\ -x_2x_3x_5^2+x_2^2x_5x_6) \end{matrix}$$

$$=x_1x_6 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_7 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix} =(x_2x_9-x_3x_8) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$x_8 \quad \begin{vmatrix} 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_3 \end{vmatrix} = (x_2x_8 - x_3x_9) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_4\ (x_2^2x_7x_9 + x_1x_3x_9^2 - x_3^2x_7x_9 - x_1x_3x_8^2) + x_5(x_1x_3x_7x_8 - x_1x_2x_7x_9 - x_3^2x_8x_9 + x_2x_3x_9^2) + x_6(-x_1x_2x_7x_8 + x_1x_3x_7x_9 + x_2x_3x_8x_9 - x_1^2x_9^2 + x_1^2x_8^2 - x_2^2x_9^2) = -x_1x_8 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix} = x_7(x_3^2x_4x_6 + x_1x_3x_5^2 - x_2^2x_4x_6 - x_1x_3x_6^2) + x_8(x_1x_2x_4x_6 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_6^2 + x_3^2x_5x_6) + x_9(x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_6 - x_2x_3x_5x_6 + x_1^2x_6^2 - x_1^2x_5^2 + x_2^2x_6^2) = -x_1x_5 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \end{vmatrix} = (x_1x_4 - x_3x_6) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{matrix} x_6 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}$$
$$= x_7(x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_6 - x_2x_3x_5x_6 + x_1^2x_6 - x_1^2x_5^2) + x_8(x_1^2x_4x_5 - x_1x_2x_4^2 + x_2^2x_6^2) + x_2x_3x_4x_6 - x_1x_3x_5x_6) + x_9(-x_1^2x_4x_6 + x_1x_3x_4^2 - x_2^2x_4x_6 + x_1x_3x_5^2) = x_2x_6\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = (x_3x_7 - x_1x_9)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x^8 \end{vmatrix}$$
$$= x_4(x_1x_2x_8x_9 - x_2x_3x_7x_8 + x_3^2x_7x_9 - x_1x_3x_9^2) + x_5(-x_1^2x_8x_9 - x_2x_3x_9^2 + x_3^2x_8x_9 + x_2x_3x_7^2) + x_6(x_1x_2x_7x_8 - x_2x_3x_8x_9 - x_1x_3x_7x_9 - x_1^2x_9^2 + x_2^2x_9^2 - x_2^2x_7x^2) = -x_2x_7\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = (x_1x_7 - x_3x_9)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_5 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{matrix}\right| \qquad \left|\begin{matrix} x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\left|\begin{matrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{matrix}\right| \begin{aligned} &= x_4(x_1x_3x_8{}^2+x_2{}^2x_7x_9 \\ &-x_1x_2x_7x_9-x_2x_3x_7x_8) \\ &+x_5(x_2x_3x_7{}^2-x_1x_2x_7x_9 \\ &-x_1x_3x_7x_8+x_1{}^2x_8x_9) \\ &+x_6(2x_2x_3x_8x_9+2x_1x_3x_7x_9 \\ &-x_1{}^2x_9{}^2-x_2{}^2x_9{}^2-x_3{}^2x_7{}^2 \\ &-x_3{}^2x_8{}^2)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}\left|\begin{matrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{matrix}\right| \begin{aligned} &= x_4(x_1x_3x_8x_9-x_1x_2x_8{}^2 \\ &-x_2x_3x_7x_9+x_2{}^2x_7x_8) \\ &+x_5(x_1x_2x_7x_8-x_2x_3x_8x_9 \\ &-x_1x_3x_7x_9+x_1{}^2x_9{}^2-x_2{}^2x_7{}^2+x^2{}_2 \\ &x_9{}^2)+x_6(-x_2{}^2x_8x_9 \\ &+x_2x_3x_8{}^2-x_1{}^2x_8x_9+x_2x_3x_7{}^2) \\ &=x_1x_9\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\left|\begin{matrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{matrix}\right| \begin{aligned} &= x_4(-x_1x_2x_7x_8+x_1x_3x_7x_9 \\ &+x_2x_3x_8x_9+x_1{}^2x_8{}^2-x_1{}^2x_9{}^2 \\ &-x_2{}^2x_9{}^2)+x_5(-x_2x_3x_7x_9 \\ &+x_1x_2x_7{}^2+x_1x_3x_8x_9-x_1{}^2x_7x_8) \\ &+x_6(x_2{}^2x_7x_9-x_1x_3x_8{}^2+x_1{}^2x_7x_9 \\ &-x_1x_3x_7{}^2)=x_2x_9\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{matrix}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =x_9\{(x_1x_9-x_3x_7)^2+(x_2x_9 \\
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & -x_3x_8)^2-(x_1x_8-x_2x_7)\} \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & =(x_1x_5-x_2x_4)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =x_5\{(x_3x_4-x_1x_6)^2+(x_3x_5-x_2x_6)^2-(x_2x_4 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_1x_5)^2\}=(x_3x_7-x_1x_9)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =(x_3x_6-x_2x_5)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =x_7(-x_1x_3x_6^2+x_1x_2x_5x_6+x_3^2x_4x_6 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_2x_3x_4x_5)+x_8(x_2x_3x_4^2+x_5x_6x_3^2 \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & -x_2x_3x_6^2-x_1^2x_5x_6) \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & +x_9(-x_1x_2x_4x_5-x_3^2x_5^2 \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & +x_2x_3x_5x_6+x_1^2x_5^2+x_1x_3x_4x_6 \\
 & & & & & & -x_3^2x_4^2)=x_1x_5\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =x_7(x_1x_3x_5x_6-x_1x_2x_5^2 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_2x_3x_4x_6+x_2^2x_4x_5)
\end{array}
$$

$$\begin{matrix} x_4 \\ x_5 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}\begin{aligned} &+x_8(-x_1x_2x_4x_5-x_3{}^2x_5{}^2 \\ &+x_2x_3x_5x_6+x_1{}^2x_5{}^2+x_1x_3x_4x_6 \\ &-x_3{}^2x_4{}^2)+x_9(x_2x_3x_4{}^2-x_1{}^2x_5x_6 \\ &-x_2{}^2x_5x_6+x^2{}_2x_3x_5{}^2) \\ &=-x_3x_4\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix}=(x_3x_5-x_1x_6)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}\begin{aligned} &=x_7(x_3x_5-x_2x_6)(x_3x_4-x_1x_6) \\ &+x_8\{(x_3x_5-x_2x_6)^2-(x_1x_5 \\ &-x_2x_4)^2\}+x_9(x_3x_4-x_1x_6)(x_2x_4 \\ &-x_1x_5)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}=(x_2x_4-x_1x_5)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_7 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix}=(x_3x_9-x_2x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$x_8 \quad \begin{vmatrix} 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = (x_3x_8 - x_2x_9) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_4(x_1x_2x_8^2 + x_3^2x_7x_8 - x_1x_2x_9^2 - x_2^2x_7x_8) + x_5(x_1x_2x_7x_8 - x_1x_3x_7x_9 - x_2x_3x_8x_9 + x_1^2x_9^2 - x_1^2x_8^2 + x_3^2x_8^2) + x_6(x_1x_2x_7x_9 - x_1x_3x_7x_8 - x_2x_3x_8^2 + x_2^2x_8x_9)$$

$$= x_1x_9 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix} = x_7(x_1x_2x_6^2 + x_2^2x_4x_5 - x_1x_2x_5^2 - x_3^2x_4x_5) + x_8(x_1^2x_5^2 + x_1x_3x_4x_6 - x_1^2x_6^2 - x_1x_2x_4x_5 - x_3^2x_5^2 + x_2x_3x_5x_6) + x_9(x_1x_3x_4x_5 - x_1x_2x_4x_6 + x_2x_3x_5^2 - x_2^2x_5x_6)$$

$$= x_1x_5 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} = x_7(-x_1^2x_6^2 + x_1^2x_5^2 - x_3^2x_5^2 - x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_6 + x_2x_3x_5x_6) + x_8(-x_1^2x_4x_5 + x_3^2x_4x_5 + x_1x_2x_4^2 - x_1x_2x_6^2) + x_9(-x_2x_3x_4x_5$$

$$x_8 \quad \begin{vmatrix} 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} + x_1x_2x_5x_6 - x_1x_3x_4^2 + x_1^2x_4x_6)$$
$$= x_3x_5 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_9 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_7(x_1x_3x_4x_5 - x_1x_2x_4x_6$$
$$+ x_2x_3x_5^2 - x_2^2x_5x_6)$$
$$+ x_8(-x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_5x_6$$
$$- x_1x_3x_4^2 + x_1^2x_4x_6)$$
$$+ x_9(-x_1^2x_4x_5 + x_1x_2x_4^2$$
$$+ x_2^2x_4x_5 - x_1x_2x_5^2)$$
$$= -x_3x_6 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = x_4(-x_1x_2x_8x_9 + x_1x_3x_9^2$$
$$+ x_2x_3x_7x_8 - x_3^2x_7x_9)$$
$$+ x_5(-x_2x_3x_7^2 - x_3^2x_8x_9$$
$$+ x_2x_3x_9^2 + x_1^2x_8x_9)$$
$$+ x_6(x_1x_2x_7x_8 + x_3^2x_8^2$$
$$- x_2x_3x_8x_9 - x_1^2x_8^2 + x_3^2x_7^2$$
$$- x_1x_3x_7x_9) = x_1x_8 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_4(x_3x_7 - x_1x_9)(x_2x_9 - x_3x_8)$$
$$- x_5\{(x_2x_9 - x_3x_8)^2 - (x_1x_8$$
$$- x_2x_7)^2\} + x_6(x_3x_7$$
$$- x_1x_9)(x_1x_8 - x_2x_7) = 0$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =x_4(x_1{}^2x_9{}^2+x_1x_2x_7x_8-x_1{}^2x_8{}^2 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_1x_3x_7x_9+x_3{}^2x_8{}^2-x_2x_3x_8x_9) \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & +x_5(x_1{}^2x_7x_8-x_1x_2x_7{}^2+x_1x_2x_9{}^2 \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & -x_3{}^2x_7x_8)+x_6(-x_1x_2x_8x_9 \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & +x_2x_3x_7x_8+x_1x_3x_7{}^2-x_1{}^2x_7x_9)
\end{array}
$$

$$
=x_3x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =x_4(x_1x_2x_8{}^2-x_1x_3x_8x_9 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_2{}^2x_7x_8+x_2x_3x_7x_9) \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & +x_5(x_1x_2x_7x_8+x_3{}^2x_8{}^2 \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & -x_2x_3x_8x_9-x_1{}^2x_8{}^2) \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & +x_6(x_2{}^2x_8x_9-x_2x_3x_8{}^2-x_2x_3x_7{}^2 \\
 & & & & & & +x_1{}^2x_8x_9)
\end{array}
$$

$$
=-x_3x_7\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =(x_2x_7-x_1x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_1 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & =x_4(x_1x_2x_7x_9-x_1x_3x_7x_8 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_2x_3x_8{}^2+x_2x_8x_9) \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & +x_5(-x_1x_2x_8x_9+x_2x_3x_7x_8 \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & +x_1x_3x_9{}^2-x_1{}^2x_7x_9)
\end{array}
$$

$$x_9 \quad \begin{vmatrix} -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} + x_6(-x_2^2x_7x_8 + x_1x_2x_8^2 + x_1^2x_7x_8 - x_1x_2x_7^2) = -x_3x_9 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_8\{(x_1x_8 - x_2x_7)^2 - (x_1x_9 - x_3x_7)^2 - (x_2x_9 - x_3x_8)^2\} = (x_3x_4 - x_1x_6) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix} = (y_6^2 - y_5^2) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_8 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = x_7(x_1x_5^2x_6 - x_1x_6^3 - x_3x_4x_5^2 + x_3x_4x_6^2) + x_8(-2x_1x_4x_5x_6 + x_3x_4^2x_5 - x_2x_6^3 + x_3x_5x_6^2 + x_2x_4^2x_6) + x_9(x_1x_4x_5^2 + x_2x_5x_6^2 - x_3x_5^2x_6 - x_2x_4^2x_5 + x_1x_4x_6^2 - x_3x_4^2x_6) = x_4x_5 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \end{vmatrix} = x_7(-x_1x_5^3 + x_1x_5x_6^2 + x_2x_4x_5^2 - x_2x_4x_6^2) + x_8(x_2x_5x_6^2 - x_3x_5^2x_6 - x_2x_4^2x_5 + x_1x_4x_6^2 - x_3x_4^2x_6$$

$$
\begin{matrix} x_6 \\ x_9 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&+x_1x_4x_5^2)+x_9(-2x_1x_4x_5x_6 \\
&+x_3x_4^2x_5+x_2x_4^2x_6-x_2x_5^2x_6 \\
&+x_3x_5^3)=-x_4x_6
\end{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_3 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}
=(x_6x_8-x_5x_9)
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&=(x_6x_9-x_5x_8) \\
&=x_4x_7
\end{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&=x_4(-x_1x_6x_8^2+x_1x_6x_9^2 \\
&+x_3x_4x_8^2-x_3x_4x_9^2) \\
&+x_5(x_1x_6x_7x_8-x_3x_4x_7x_8 \\
&+x_1x_5x_7x_9+x_2x_6x_9^2-x_3x_5x_9^2 \\
&-x_2x_4x_7x_9)+x_6(-x_1x_5x_7x_8 \\
&-x_2x_6x_8x_9+x_3x_5x_8x_9 \\
&+x_2x_4x_7x_8-x_1x_6x_7x_9 \\
&+x_3x_4x_7x_9)=x_4x_8
\end{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = (x_5x_8 - x_6x_9)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$= -x_4x_7\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = (x_5x_9 - x_6x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_1(-x_4x_5x_9^2 - x_5^2x_7x_8$$
$$+ x_4x_5x_8^2 + x_6^2x_7x_8) + x_2(x_4^2x_9^2$$
$$+ x_4x_5x_7x_8 - x_4^2x_8^2 - x_4x_6x_7x_9$$
$$+ x_6^2x_8^2 - x_5x_6x_8x_9)$$
$$+ x_3(x_4x_5x_7x_9 - x_4x_6x_7x_8$$
$$- x_5x_6x_8^2 + x_5^2x_8x_9)$$
$$= -x_4x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = (x_9^2 - x_8^2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$x_1 \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = x_1(x_4x_6x_8^2 + x_6^2x_7x_9 - x_4x_6x_9^2$$

$$
\begin{array}{l}
x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\
x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
-x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\
0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
-x_5{}^2x_7x_9)+x_2(-x_4x_6x_7x_8 \\
+x_4x_5x_7x_9+x_6{}^2x_8x_9-x_5x_6x_9{}^2) \\
+x_3(-x_4x_5x_7x_8-x_6{}^2x_7{}^2 \\
+x_4x_6x_7x_9+x_5{}^2x_7{}^2-x_6{}^2x_8{}^2 \\
+x_5x_6x_8x_9) \\
=-x_5x_7\left|\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{array}\right|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_1 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_9
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\
0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\
x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
-x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\
-x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
=x_1(-x_4x_5x_8{}^2-x_6{}^2x_7x_8 \\
+x_5{}^2x_7x_8+x_4x_5x_9{}^2) \\
+x_2(-x_5x_6x_8x_9-x_5{}^2x_7{}^2 \\
+x_5{}^2x_9{}^2+x_4x_5x_7x_8-x_4x_6x_7x_9 \\
+x_6{}^2x_7{}^2)+x_3(-x_4x_5x_7x_9 \\
+x_4x_6x_7x_8-x_5{}^2x_8x_9 \\
+x_5x_6x_8{}^2)=x_6x_7\left|\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{array}\right|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_1 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\
0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\
x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\
-x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
=x_1\{(x_5x_7-x_4x_8)^2-(x_4x_9 \\
-x_6x_7)^2\}+x_2(x_4x_9 \\
-x_6x_7)(x_6x_8-x_5x_9) \\
+x_3(x_6x_8-x_5x_9)(x_5x_9-x_4x_8) \\
=0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_1 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\
0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\
-x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\
0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\
-x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
=x_1(-x_6x_7x_8{}^2+2x_5x_7x_8x_9 \\
+x_4x_9{}^3-x_6x_7x_9{}^2-x_4x_8{}^2x_9) \\
+x_2(-x_5x_7{}^2x_9+x_5x_9{}^3 \\
+x_6x_8x_7{}^2-x_6x_8x_9{}^2) \\
+x_3(-x_5x_7{}^2x_8-x_4x_9{}^2x_7
\end{array}
$$

$$+x_6x_7^2x_9+x_4x_8^2x_7+x_6x_8^2x_9$$
$$-x_5x_8x_9^2)=x_7x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}=x_1(-x_4x_8x_9^2-x_5x_7x_8^2$$
$$+x_4x_8^3+x_6x_7x_8x_9-x_5x_7x_9^2$$
$$+x_6x_7x_8x_9)+x_2(x_4x_7x_9^2$$
$$+x_5x_7^2x_8-x_4x_7x_8^2-x_6x_7^2x_9$$
$$+x_6x_8^2x_9-x_5x_8x_9^2)$$
$$+x_3(x_5x_7^2x_9-x_6x_7^2x_8-x_6x_8^3$$
$$+x_5x_8^2x_9)$$
$$=-x_7x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \end{vmatrix}=x_4\{(x_1x_5-x_2x_4)^2-(x_1x_6-x_3x_4)^2-(x_2x_6$$
$$-x_3x_5)^2\}=(x_3x_8-x_2x_9)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \end{vmatrix}=x_7(-x_1x_3x_5^2-x_3^2x_4x_6+x_1x_3x_6^2$$
$$+x_2^2x_4x_6)+x_8(-x_1x_2x_4x_6$$
$$+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_6^2-x_3^2x_5x_6)$$
$$+x_9(x_1x_2x_4x_5+x_3^2x_4^2-x_1x_3x_4x_6$$
$$-x_2^2x_4^2-x_2x_3x_5x_6+x_3^2x_5^2)$$
$$=x_2x_4\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9
\end{array}
=(x_3x_6-x_1x_4)
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8
\end{array}
\begin{aligned}
&=x_4(x_1^2x_6x_9+x_1x_2x_5x_7-x_1^2x_5x_8 \\
&-x_1x_3x_6x_7+x_1x_2x_4x_8+x_3^2x_4x_7 \\
&-x_1x_3x_4x_9-x_2^2x_4x_7) \\
&+x_5(-x_2x_3x_6x_7+x_3^2x_5x_7 \\
&+x_1x_2x_6x_9-x_1x_3x_5x_9) \\
&+x_6(-x_2x_3x_4x_8+x_1x_3x_5x_8 \\
&-x_1x_2x_5x_9+x_2^2x_4x_9) \\
&=-x_3x_5
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0
\end{array}
\begin{aligned}
&=x_7(x_1x_2x_5^2+x_3^2x_4x_5-x_2^2x_4x_5 \\
&-x_1x_2x_6^2)+x_8(-x_1x_2x_4x_5-x_3^2x_4^2 \\
&+x_1x_3x_4x_6+x_2^2x_4^2-x_2^2x_6^2 \\
&-x_2x_3x_5x_6)+x_9(-x_1x_3x_4x_5 \\
&+x_1x_2x_4x_6+x_2^2x_5x_6-x_2x_3x_5^2) \\
&=-x_3x_4
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0
\end{array}
\begin{aligned}
&=x_7(x_2x_3x_5x_6+x_2^2x_4^2-x_2^2x_6^2 \\
&-x_1x_2x_4x_5+x_1x_3x_4x_6-x_3^2x_4^2) \\
&+x_8(-x_1x_2x_4^2+x_1x_2x_6^2+x_1^2x_4x_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_6 \\ x_8
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
-x_3^2x_4x_5)+x_9(x_2x_3x_4x_5-x_1x_2x_5x_6 \\
-x_1^2x_4x_6+x_1x_3x_4^2)
\end{array}
$$

$$
=-x_2x_6\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_9
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\
x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\
-x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
=x_7(-x_1x_3x_4x_5+x_1x_2x_4x_6 \\
+x_2^2x_5x_6-x_2x_3x_5^2)+x_8(x_2x_3x_4x_5 \\
-x_1x_2x_5x_6-x_1^2x_4x_6+x_1x_3x_4^2) \\
+x_9(-x_1x_2x_4^2+x_1^2x_4x_5+x_1x_2x_5^2 \\
-x_2^2x_4x_5)=-x_3x_6
\end{array}
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_8
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\
-x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\
0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
=x_4(x_1x_3x_8^2+x_3^2x_7x_9-x_1x_3x_9^2 \\
-x_2^2x_7x_9)+x_5(-x_1x_3x_7x_8 \\
+x_1x_2x_7x_9+x_3^2x_8x_9-x_2x_3x_9^2) \\
+x_6(-x_1x_2x_7x_8-x_3^2x_7^2 \\
+x_1x_3x_7x_9+x_2^2x_7^2-x_3^2x_8^2 \\
+x_2x_3x_8x_9=x_2x_7
\end{array}
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_9
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccc}
0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\
x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\
x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\
-x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\
-x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
=x_4(-x_1x_2x_8^2-x_3^2x_7x_8 \\
+x_2^2x_7x_8+x_1x_2x_9^2) \\
+x_5(-x_2x_3x_8x_9-x_2^2x_7^2 \\
-x_2^2x_9^2+x_1x_2x_7x_8-x_1x_3x_7x_9 \\
+x_3^2x_7^2)+x_6(-x_1x_2x_7x_9 \\
+x_1x_3x_7x_8-x_2^2x_8x_9+x_2x_3x_8^2) \\
=-x_3x_7\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{vmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =x_4(-x_1^2x_9^2+2x_1x_3x_7x_9-x_3^2x_7^2 \\ x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & +x_1^2x_8^2-2x_1x_2x_7x_8+x_2^2x_7^2) \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & +x_5(-x_1x_2x_9^2+x_2x_3x_7x_9 \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & +x_1x_3x_8x_9-x_3^2x_7x_8) \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & +x_6(x_2x_3x_7x_3-x_1x_3x_8^2 \\ & & & & & & \quad +x_1x_2x_8x_9-x_2^2x_7x_9)=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =x_7\{(x_1x_6-x_3x_4)^2-(x_1x_5 \\ x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_2x_4)^2\}+x_3(x_1x_6-x_3x_4)(x_2x_6 \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & -x_3x_5)+x_9(x_2x_4-x_1x_5)(x_2x_6 \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & -x_3x_5)=0 \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =(x_1x_6-x_3x_4)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\ x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =(x_2x_4-x_1x_5)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\ x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =(x_3x_9-x_1x_7)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix} \\ x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \end{array}$$

$$\begin{matrix} x_5 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_4(-x_2x_3x_8x_9-x_2^2x_7^2 + x_2^2x_9^2+x_1x_2x_7x_8-x_1x_3x_7x_9 + x_3^2x_9^2)+x_5(x_1x_2x_7^2-x_1x_2x_9^2 - x_1^2x_7x_8+x_3^2x_7x_8) + x_6(x_1x_2x_8x_9-x_2x_3x_7x_8 + x_1^2x_7x_9-x_1x_3x_7^2)$$

$$= -x_2x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = (x_1x_9-x_3x_7)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = x_6(x_1x_3x_8^2-x_2^2x_7x_9-x_1^2x_7x_9 + x_1x_9x_7^2)+x_4(-x_3^2x_8^2 + x_2x_3x_8x_9-x_1x_2x_7x_8-x_3^2x_7^2 + x_1x_3x_7x_9+x_2^2x_7^2) + x_5(-x_1x_2x_7^2+x_2x_3x_7x_9 + x_1^2x_7x_8-x_1x_3x_8x_9)$$

$$= -x_3x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =x_4(-x_1x_2x_7x_9+x_1x_3x_7x_8 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_2{}^2x_8x_9+x_2x_3x_8{}^2) \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & +x_5(x_1x_2x_8x_9-x_2x_3x_7x_8 \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & +x_1{}^2x_7x_9-x_1x_3x_7{}^2) \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & +x_6(-x_1x_2x_8{}^2+x_2{}^2x_7x_8 \\
 & & & & & & +x_1x_2x_7{}^2-x_1{}^2x_7x_8) \\
 & & & & & & =x_3x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =(x_2x_7-x_1x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =x_7\{(x_1x_9-x_3x_7)^2+(x_2x_9 \\
x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & -x_3x_8)^2-(x_1x_8-x_2x_7)^2\} \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & =(x_3x_5-x_2x_6)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|l}
x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =x_7(2x_2x_4x_5x_6-x_3x_4x_5{}^2+x_1x_6{}^2 \\
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & -x_3x_4x_6{}^2)+x_8(-x_2x_6x_4{}^2+x_2x_6{}^3 \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & +x_3x_4{}^2x_5-x_3x_5x_6{}^2)+x_9(-x_2x_4{}^2x_5 \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & -x_1x_4x_6{}^2+x_3x_4{}^2x_6+x_1x_4x_5{}^2 \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & -x_2x_5x_6{}^2+x_3x_5{}^2x_6) \\
 & & & & & & =x_4x_5\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = (x_6^2 - x_4^2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_1(-x_4^2x_5x_8 - x_4x_6^2x_7 + x_4^2x_6x_9 + x_4x_5^2x_7 - x_5^2x_6x_9) + x_2(x_4^3x_8 + x_4x_5x_6x_9 - x_4x_6^2x_8 - x_4^2x_5x_7 + x_4x_5x_6x_9 - x_5x_6^2x_7) + x_3(-x_4x_5^2x_9 + x_5^2x_6x_7 + x_4^2x_6x_7 - x_4^3x_9) = -x_5x_6\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = (x_4x_9 - x_6x_7)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_1(-x_4x_6x_9^2 + x_4x_5x_8x_9 + x_6^2x_7x_9 - x_5x_6x_7x_8) + x_2(-x_4^2x_8x_9 - x_5x_6x_9^2 + x_6^2x_8x_9 + x_5x_6x_7^2) + x_3(x_4x_5x_7x_8 + x_5^2x_9^2 - x_5x_6x_8x_9 - x_5^2x_7^2 - x_4x_6x_7x_9 - x_4^2x_9^2) = x_5x_7\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = (x_6x_9 - x_4x_7)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} = x_5x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = x_1(-x_4x_5x_8x_9 + x_4x_6x_9^2 + x_5x_6x_7x_8 - x_6^2x_7x_9) + x_2(-x_5x_6x_7^2 - x_6^2x_8x_9 + x_5x_6x_7^2 + x_4^2x_8x_9) + x_3(x_4x_5x_7x_8 + x_6^2x_8^2 - x_5x_6x_8x_9 - x_4^2x_8^2 + x_6^2x_7^2 - x_4x_6x_7x_9) = x_4x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_1(x_6x_7 - x_4x_9)(x_5x_9 - x_6x_8) + x_2\{(x_5x_7 - x_4x_8)^2 - (x_5x_9 - x_6x_8)^2\} + x_3(x_4x_9 - x_6x_7)(x_5x_7 - x_4x_8) = 0$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_1(-x_4^2x_8^2 - x_5x_6x_8x_9 + x_6^2x_8^2 + x_4x_5x_7x_8 - x_4x_6x_7x_9 + x_4^2x_9^2) + x_2(x_4^2x_7x_8 - x_6^2x_7x_8 - x_4x_5x_7^2 + x_4x_5x_9^2) + x_3(-x_4x_5x_8x_9 + x_5x_6x_7x_8$$

$$+x_4x_6x_7^2-x_4^2x_7x_9)$$
$$=-x_6x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}$$
$$=x_1(x_4x_8^2x_9-x_4x_9^3-x_6x_7x_8^2$$
$$+x_6x_7x_9^2)+x_2(x_6x_8x_7^2$$
$$-2x_4x_7x_8x_9-x_5x_7^3+x_6x_8x_9^2$$
$$+x_5x_7^3x_9)+x_3(x_4x_7x_8^2$$
$$+x_5x_6x_9^2-x_6x_8^2x_9-x_5x_7^2x_8$$
$$-x_6x_7^2x_9+x_4x_7x_9^2)$$
$$=x_7x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}$$
$$=(x_4x_7-x_6x_9)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$
$$=-x_5x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}$$
$$=x_1(-x_5x_6x_8x_9-x_5^2x_7^2$$
$$+x_5^2x_9^2+x_4x_5x_7x_8-x_4x_6x_7x_9$$
$$-x_6^2x_7^2)+x_2(x_4x_5x_7^2-x_4x_5x_9^2$$
$$-x_4^2x_1x_8+x_6^2x_7x_8)$$
$$+x_3(x_4x_5x_8x_9-x_5x_6x_7x_8$$
$$+x_4^2x_7x_9-x_4x_6x_7^2)$$
$$=x_5x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =(x_6x_7-x_4x_9)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =(x_9^2-x_7^2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_2 & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 & =x_1(x_4x_7x_9^2+x_5x_7^2x_8-x_4x_7x_8^2 \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & -x_6x_7^2x_9+x_6x_8^2x_9-x_5x_8x_9^2) \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & +x_2(-2x_6x_7x_8x_9-x_5x_7^3 \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & +x_5x_7x_9^2+x_4x_7^2x_8+x_4x_8x_9^2) \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & +x_3(-x_4x_8^2x_9-x_6x_7x_8^2 \\ & & & & & & -x_4x_7^2x_9+x_6x_{73}) \\ & & & & & & =-x_8x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & =x_7(-x_1x_5x_6^2-x_2x_4x_5^2+x_1x_5^3 \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & +2x_3x_4x_5x_6-x_2x_4x_6^2)+x_8(x_1x_4x_6^2 \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & +x_2x_4^2x_5-x_1x_4x_5^2-x_3x_4^2x_6 \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & +x_3x_5^2x_6-x_2x_5x_6^2)+x_9(-x_3x_4^2x_5 \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & +x_2x_4^2x_6-x_3x_5^3+x_2x_5^2x_6) \\ & & & & & & =-x_4x_6\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & =x_7(x_1x_4x_6^2+x_2x_4^2x_8-x_1x_4x_5^2 \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & +x_3x_5^2x_6-x_2x_5x_6^2) \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & +x_8(-2x_3x_4x_5x_6-x_2x_4^3+x_2x_4x_6^2 \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & +x_1x_4^2x_5+x_1x_5x_6^2)+x_9(x_3x_4x_5^2 \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & -x_1x_5^2x_6-x_1x_4^2x_6+x_3x_4^3) \end{array}$$

$$=-x_5x_6\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & =(x_4^2+x_5^2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & =x_1(x_5x_7-x_4x_8)(x_5x_9-x_6x_8) \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & +x_2(x_5x_7-x_4x_8)(x_6x_7-x_4x_9) \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & -x_3\{(x_5x_9-x_6x_8)^2+(x_4x_9 \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & -x_6x_7)^2\}=0 \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ccccc|l} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 & =x_1(x_4x_6x_8x_9-x_4x_5x_8^2 \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & -x_5x_6x_7x_9+x_5^2x_7x_8) \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & +x_2(x_4x_5x_7x_8+x_5^2x_9^2 \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & -x_5x_6x_8x_9-x_5^2x_7^2-x_4x_6x_7x_9 \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 & +x_4^2x_9^2)+x_3(-x_4^2x_8x_9 \\ & & & & & & +x_5x_6x_7^2-x_5^2x_8x_9+x_5x_6x_8^2) \end{array}$$

$$=-x_4x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}$$

$$=x_1(-x_4x_5x_7x_8-x_4{}^2x_9{}^2+x_4x_6x_7x_9+x_4{}^2x_8{}^2+x_5x_6x_8x_9-x_5{}^2x_9{}^2)+x_2(-x_4{}^2x_7x_8+x_4x_5x_7{}^2+x_4x_6x_8x_9-x_5x_6x_7x_9)+x_3(x_5{}^2x_7x_9-x_4x_6x_8{}^2+x_4{}^2x_7x_9-x_4x_6x_7{}^2)$$

$$=-x_5x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix}$$

$$=x_1(x_4x_5x_8{}^2-x_4x_6x_8x_9-x_5{}^2x_7x_8+x_5x_6x_7x_9)+x_2(x_6{}^2x_7{}^2-x_4x_6x_7x_9+x_4x_5x_7x_8+x_6{}^2x_8{}^2-x_5x_6x_8x_9-x_4{}^2x_8{}^2)+x_3(x_5{}^2x_8x_9-x_5x_6x_8{}^2-x_5x_6x_7{}^2+x_4{}^2x_8x_9)=x_6x_7\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}=(x_4x_8-x_5x_7)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=(x_4x_7+x_5x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_6x_9\begin{vmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} = x_6x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix} = x_4(x_1x_8x_9^2+x_2x_7x_8^2-x_1x_8^3 - x_3x_7x_8x_9+x_2x_7x_9^2 - x_3x_7x_8x_9)+x_5(-x_1x_7x_9^2 - x_2x_7^2x_8+x_1x_7x_8^2+x_3x_7^2x_9 - x_3x_8^2x_9+x_2x_8x_9^2) + x_6(-x_2x_7^2x_9+x_3x_7^2x_8 + x_3x_8^3-x_2x_8^2x_9) = -x_7x_9\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \end{vmatrix} = x_1(-x_4x_5x_7x_8-x_6^2x_7^2 + x_4x_6x_7x_9+x_5^2x_7^2-x_6^2x_8^2 + x_5x_6x_8x_9)+x_2(-x_4x_5x_7^2 + x_5x_6x_7x_9+x_4^2x_7x_8 - x_4x_6x_8x_9)+x_3(x_4x_6x_8^2-x_5^2x_7x_9 - x_4^2x_7x_9+x_4x_6x_7^2) = x_6x_8\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix}\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \end{vmatrix} = x_1(-x_4x_5x_7x_9+x_4x_6x_7x_8 - x_5^2x_8x_9+x_5x_6x_8^2) + x_2(x_4x_5x_8x_9-x_5x_6x_7x_8$$

$$
\begin{matrix} x_7 \\ x_9 \end{matrix}
\begin{vmatrix} -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
\begin{aligned} &+x_4{}^2x_7x_9-x_4x_6x_7{}^2) \\ &+x_3(-x_4x_5x_8{}^2-x_5{}^2x_7x_8 \\ &+x_4x_5x_7{}^2-x_4{}^2x_7x_8) \\ &=-x_6x_9 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \end{aligned}
$$

$$
\begin{matrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
=(x_4x_8-x_5x_7) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
\begin{aligned} &=x_1(-x_5x_7{}^2x_8-x_4x_7x_9{}^2 \\ &+x_6x^2{}_7x_9+x_4x_7x_8{}^2+x_6x_8{}^2x_9 \\ &+x_5x_8x_9{}^2)+x_2(x_5x_7{}^3-x_5x_7x_9{}^2 \\ &-x_4x_7{}^2x_8+x_4x_8x_9{}^2) \\ &+x_3(-x_6x_7x_8{}^2+2x_5x_7x_8x_9 \\ &-x_4x_8{}^2x_9+x_4x_7{}^2x_9-x_6x_7{}^3) \\ &=-x_8x_9 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \end{aligned}
$$

$$
\begin{matrix} x_3 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_3 & x_3 & 0 & x_1 & x_2 \\ x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
=(x_7{}^2+x_8{}^2) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} x_4 \end{matrix}
\begin{vmatrix} x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 \end{vmatrix}
=x_6\{(x_4x_8-x_5x_7)^2-(x_6x_9
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|l}
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & -x_4x_7)^2-(x_6x_8-x_5x_9)^2\} \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & =(x_2x_9-x_1x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|l}
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & =x_5\{(x_4x_9-x_6x_7)^2+(x_5x_9 \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & -x_6x_8)^2-(x_4x_8-x_5x_7)^2\} \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & =(x_1x_9-x_3x_7)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|l}
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & =x_4\{(x_4x_8-x_5x_7)^2-(x_4x_9 \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & -x_6x_7)^2-(x_6x_8-x_5x_7)^2\} \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & =(x_2x_9-x_3x_8)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|l}
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & =x_9\{(x_6x_7-x_4x_9)^2+(x_6x_8 \\
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & -x_5x_9)^2-(x_5x_7-x_4x_8)^2\} \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & =(x_1x_5-x_2x_4)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|l}
x_4 & x_4 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & =x_8(x_5x_7-x_4x_8)^2-(x_6x_7 \\
x_6 & x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 & -x_4x_9)^2-(x_5x_9-x_6x_8)^2\} \\
x_7 & -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 & =(x_3x_4-x_1x_6)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} \\
x_8 & 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 & \\
x_9 & -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ccccc|l}
x_5 & 0 & x_5 & x_4 & 0 & x_6 & =x_7\{(x_4x_9-x_6x_7)^2+(x_5x_9
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} x_6 & x_6 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_7 & 0 & -x_8 & -x_9 & 0 \\ 0 & -x_8 & -x_7 & 0 & -x_9 \\ -x_9 & -x_9 & 0 & -x_7 & -x_8 \end{vmatrix}
\left\{-x_6x_8)^2-(x_4x_8-x_5x_7)^2\right\}
$$

$$
=(x_3x_5-x_2x_6)
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix}
$$