

円周上の点集合と可換群

藤 末 宏

1 円周上の点集合と可換群,

円周上の点の集合に適当な結合を付けると可換群になる. これに類することは既に一橋論叢第 37 巻第 1 号に於いて述べた.

〔定理 1〕 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ に於いて, これに属する 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対して,

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \left(\frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{r}, \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{r} \right)$$

なる点を対応させる結合を定めるならば, この円周上の点の集合は可換群となる.

〔証明〕 この積が可換であることは明かである単位元は,

$$\begin{cases} x_1 x_2 - y_1 y_2 = r x_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 = r y_2 \end{cases}$$

より $x_1 = r, y_1 = 0$ である.

次に, (x, y) の逆元は,

$$\begin{aligned} (x, y)(x', y') &= (r, 0) \\ \begin{cases} x x' - y y' = r^2 \\ x y' + x' y = r^2 \end{cases} \end{aligned}$$

より, $x' = x, y' = -y$ である.

Associative law の証明は省略する.

定理 1 を一般化したものが次の定理である.

〔定理 2〕 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ に於いて, それに属する 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対して,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) &= (a(x_1 x_2 - y_1 y_2) + b(x_1 y_2 + x_2 y_1), -b(x_1 x_2 \\ &\quad - y_1 y_2) + a(x_1 y_2 + x_2 y_1)) \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{r^2}$$

なる点を対応させる結合を定めるならば、この円周上の点の集合は可換群となる。

〔証明〕 まず 2 点の積が同一円周上にあることは明か。またこの積が可換であることも明か。

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1, y_1) \\ \begin{cases} a(x_1x_2 - y_1y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1) = x_1 \\ -b(x_1x_2 - y_1y_2) + a(x_1y_2 + x_2y_1) = y_1 \end{cases}$$

を解くと、

$$x_2 = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

となり、単位元が存在することが解る。

$$(x, y) \circ (x', y') = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\begin{cases} x'(ax + by) + y'(-ay + bx) = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ x'(-bx + ay) + y'(by + ax) = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

を解くと、

$$x' = \frac{(a^2 - b^2)x + 2aby}{(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2)} = \frac{(a^2 - b^2)x + 2aby}{a^2 + b^2} \\ y' = \frac{2abx + (b^2 - a^2)y}{(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2)} = \frac{2abx + (b^2 - a^2)y}{a^2 + b^2}$$

となり、 (x, y) の逆元が唯一存在する。

associative law の証明は、一橋論叢第 39 巻第 6 号に載せられているものを使用すれば得られる。(訂正、一橋論叢第 39 巻第 6 号 694 頁、上段四行目 $x_1x_2 + y_1x_3 = x_1x_3 + y_3x_2$ は、 $x_1x_2 + y_2x_3 = x_1x_3 + y_3x_2$ の誤に付き訂正する。)

$\left(-\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$ なる元に付いては次の性質がある。即ち、

$$\left(-\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\right)\circ(x, y)=(-x, -y)$$

次にこの定理の実例を挙げて置き度い。原点を中心として、半径 r , r' ($r' < r$) なる二つの同心円を描く。半径 r なる円周上の 1 点 (x, y) と原点とを結び、半径 r' なる円周と交わる点に於いて、この円に接線を引く。その半径なる円周との 1 交点を求めると、それは

$$\left(\frac{xr'-y\sqrt{r^2-r'^2}}{r}, \frac{yr'+x\sqrt{r^2-r'^2}}{r}\right)$$

である。円周上の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ をとり定理 1 による結合で (x_3, y_3) が得られたとする。

$$(x_1, y_1)\circ(x_2, y_2)=(x_3, y_3)$$

(x_3, y_3) に対応する点 (x_4, y_4) を同心円を使うことによって定める。

$$(x_3, y_3)\longrightarrow(x_4, y_4)$$

故に最初の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ より、 (x_4, y_4) という点を同一円周上に於いて定め得た。

$$(x_1, y_1)\circ(x_2, y_2)=\left(\frac{(x_1x_2-y_1y_2)r'-(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{r^2-r'^2}}{r}, \frac{(x_1y_2+x_2y_1)r'+(x_1x_2-y_1y_2)\sqrt{r^2-r'^2}}{r}\right)$$

円 $X^2+Y^2=1$ 上の 2 点 $(X, Y), (X', Y')$ が

$$aX+bY+cX'+dY'=0 \quad a^2+b^2=c^2+d^2\neq 0 \dots\dots\dots (I)$$

なる関係にあるとする。この関係より、

$$(X, Y)\longleftrightarrow(X', Y')$$

$$(i) \quad \begin{cases} X' = \frac{-c(bY+aX)+d(aY-bX)}{c^2+d^2} \\ Y' = \frac{-d(bY+aX)-c(aY-bX)}{c^2+d^2} \end{cases} \quad \text{或は}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} X' = \frac{-c(bY+aX)-d(aY-bX)}{c^2+d^2} \\ Y' = \frac{-d(aX+bY)+c(aY-bX)}{c^2+d^2} \end{cases}$$

が成立する. (i) 式は (ii) の場合をとれば, 円周上の点集合の中で,

$$(X, Y) \longleftrightarrow (X', Y')$$

なる一対一対応をなし, 且つ (I) が成立する. この一対一関係より $(X_1, Y_1) \cdot (X_2, Y_2) = (X_1 X_2 - Y_1 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1)$ なる結合を有する可換群と同型な可換群が得られる. 即ち,

$$\begin{aligned} & (X_1, Y_1) \longleftrightarrow (X'_1, Y'_1) \\ & (X_2, Y_2) \longleftrightarrow (X'_2, Y'_2) \\ & (X_1, Y_1) \cdot (X_2, Y_2) \longleftrightarrow (X'_1 Y'_1) \cdot (X'_2, Y'_2) \\ & (X'_1, Y'_1) \cdot (X'_2, Y'_2) \\ & = \left(\frac{-(ac+bd)(XX'-YY')+(ad-bc)(XY'+X'Y)}{c^2+d^2}, \right. \\ & \quad \left. \frac{(bc-ad)(XX'-YY')-(ac+bd)(XY'+X'Y)}{c^2+d^2} \right) \dots (II) \end{aligned}$$

或は

$$\begin{aligned} & (X'_1, Y'_1) \cdot (X'_2, Y'_2) \\ & = \left(\frac{(bd-ac)(XX'-YY')(bc+ad)(XY'+X'Y)}{c^2+d^2}, \right. \\ & \quad \left. \frac{-(bc+ad)(XX'-YY')-(ca+bd)(XY'+X'Y)}{c^2+d^2} \right) \dots (III) \end{aligned}$$

が成立する. ここに,

$$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right)^2 + \left(\frac{ad-bc}{c^2+d^2} \right)^2 = 1$$

である. よって,

[定理 3] 円周上の点集合が, $(X, Y) \longleftrightarrow (X', Y')$ なる自己一対一対応をなし, 且

$$aX+bY+cX'+dY'=0 \quad a^2+b^2=c^2+d^2$$

なる関係があるときは, 円周上の点集合が $(X_1, Y_1) \cdot (X_2, Y_2) = (X_1 X_2 - Y_1 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1)$ なる結合で群をなせば, (II) 或は (III) のどちらか一方の結合を有する可換群が, 円周上の点集合の上で成立する.

この群は定理 2 の群の実例である.

定理 1 の結合とこの結合とを使うと, 一橋論叢第 37 巻 1 号に述べ

たと同様な結果が得られる。

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) \\ &\dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) &= ((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) \\ &\dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &\dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

が成立する。これは次の定理による。

〔定理 4〕 定理 2 を満す二つのアーベル群の結合記号を $\cdot$, $\circ$ とする。このとき, 3 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) とすれば, $\circ$ と $\cdot$ を一度づつ使って 3 点を結合して得られる結果は総て等しい。

証明するには,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (a(x_1x_2 - y_1y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1), -b(x_1x_2 \\ &\quad - y_1y_2) + a(x_1y_2 + x_2y_1)) \\ (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) &= (c(x_1x_2 - y_1y_2) + d(x_1y_2 + x_2y_1), -d(x_1x_2 \\ &\quad - y_1y_2) + c(x_1y_2 + x_2y_1)) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) &= (a(x_1x_2 - y_1y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1), \\ &\quad -b(x_1x_2 - y_1y_2) + a(x_1y_2 + x_2y_1)) \circ (x_3, y_3) = (c[a(x_1x_2 - y_1y_2) \\ &\quad + b(x_1y_2 + x_2y_1)]x_3 - \{-b(x_1x_2 - y_1y_2) + a(x_1y_2 + x_2y_1)\}y_3 \\ &\quad + d[a(x_1x_2 - y_1y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1)]y_3 + \{-b(x_1x_2 - y_1y_2) \\ &\quad + a(x_1y_2 + x_2y_1)\}x_3], -d[a(x_1x_2 - y_1y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1)]x_3 \\ &\quad - \{-b(x_1x_2 - y_1y_2) + a(x_1y_2 + x_2y_1)\}y_3 + c[a(x_1x_2 - y_1y_2) \\ &\quad + b(x_1y_2 + x_2y_1)]y_3 + \{-b(x_1x_2 - y_1y_2) + a(x_1y_2 + x_2y_1)\}x_3]) \\ &= (ac - bd)x_1x_2x_3 + (ad + bc)(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) + (bd \\ &\quad - ac)(x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3) - (bc + ad)y_1y_2y_3, \\ &\quad - (ad + bc)x_1x_2x_3 + (ac - bd)(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) + (ad \\ &\quad + bc)(x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3) + (bd - ca)y_1y_2y_3) \end{aligned}$$

となり, 残りの総ての積も同じ結果を得る。 (x, y) を円周上の点と限

らず, Decartes 座標上のすべての点とすれば, 体が得られる.

即ち

定理 5] 集合 $\{(x, y) \mid x, y \text{ 実数}\}$ に於いて $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (a(x_1x_2 - y_1y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1), -b(x_1x_2 - y_1y_2) + a(x_1y_2 + x_2y_1))$ を積の算とし, 和の演算を

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

とすれば, この集合は可換体をなす. 零元は $(0, 0)$, 単位元は

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right) \text{ である. } (x, y) \text{ の逆元は } \left(\frac{(a^2 - b^2)x + 2aby}{(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2)}, \frac{2abx + (b^2 - a^2)y}{(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2)} \right) \text{ である.}$$

distributive law の成立は明か.

半径 1 なる円周上のすべての点は

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2} \right) \text{ と } (0, 1)$$

で表わされ得る.

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^2-1}{1+t^2}$$

とおけば, (x, y) に対応する t の値は,

$$y \geq 0 \text{ のとき } t = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$y < 0 \text{ のとき } t = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$(0, -1) \text{ には } t=0$$

となる. $(0, 1)$ には ∞ が対応することにする.

すべての実数の集合に ∞ を加えた集合 (いまこれを R_∞ と書く.) と円周上の点が一対一対応 (one-to-one correspondet) である. R_∞ の 2 つの元を t, t' とし, これに対応する円周上の 2 点を $(x, y), (x', y')$ とする.

$$t \longleftrightarrow (x, y), \quad t' \longleftrightarrow (x', y')$$

さらに, の定理 2 を使って $(x, y) \circ (x', y')$ に対応する R_∞ の元を

t'' とする. そして R_∞ に於いて,

$$t \cdot t' = t' \cdot t = t''$$

なる結合を定める. R_∞ は定理 2 の可換群に同型な可換群である.

今後何も云わない場合は, 定理 2 に於いて $a \neq 0$, $b \neq \pm 1$ であるとする. まず R_∞ の単位元を求めよう. それは $\frac{a}{1-b}$ である.

$$\frac{a}{1-b} \longleftrightarrow (a, b)$$

故に, すべての R_∞ の元 t に対して (1) が成立する.

$$\frac{a}{1-b} \cdot t = t \cdot \frac{a}{1-b} = t \quad \dots\dots\dots (1)$$

R_0 に含まれる $-\frac{a}{b+1}$ なる元に就いても特別な性質がある. これは, $(-a, -b)$ に対応する元である. 対応する円周上の点の結合を求めそれに対応する R_0 の元を求めることによってすべての R_∞ の元 t に対して,

$$-\frac{a}{b+1} \cdot t = \begin{cases} -\frac{1}{t} & \text{ただし } 0 < |t| \leq 1 \\ -t & \text{ただし } |t| < 1 \dots\dots\dots (2) \\ 0 & \text{ただし } t = \infty \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

次に, $\frac{a}{1-b}$ でも $-\frac{a}{b+1}$ でも ∞ でもない R_0 の元に付いての結合の値を求めてみる.

$$p = t + t', \quad q = tt' - 1$$

とすれば, $t \cdot t'$ に対応する円周上の点の座標は,

$$t \cdot t' \longleftrightarrow \left(\frac{a(p^2 - q^2) + 2bpq}{p^2 + q^2}, \frac{-b(p^2 - q^2) + 2apq}{p^2 + q^2} \right)$$

である.

$ap + (b+1)q = 0$ の場合には

$$\frac{a(p^2 - q^2) + 2bpq}{p^2 + q^2} = 0, \quad \frac{-b(p^2 - q^2) + 2apq}{p^2 + q^2} = -1$$

より

$$t \cdot t' = 0$$

となる. $ap + (b-1)q = 0$ の場合には, $t \cdot t' = \infty$, $(1+b)p - aq = 0$ のときは $t \cdot t' = \infty$, $(1-b)p + aq = 0$ のときは $t \cdot t' = 0$ が得られる. 逆に結合が 0, ∞ になるのはこの場合と (2) 以外には無い.

$ap + (b+1)q \neq 0$, $ap + (b-1)q \neq 0$, $(1+b)p - aq \neq 0$, $(1-b)p + aq \neq 0$ の場合には,

$$t \cdot t' = \begin{cases} \frac{(1+b)p - aq}{ap + (b+1)q} & \text{ただし } -b(p^2 - q^2) + 2apq \geq 0 \\ \frac{(1-b)p + aq}{ap + (b-1)q} & \text{ただし } -b(p^2 - q^2) + 2apq < 0 \end{cases} \quad (3)$$

となる.

また, ∞ の元を含む演算に於いては,

$$t \cdot \infty \longleftrightarrow \left(-a \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} + b \frac{2t}{1 + t^2}, b \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} + a \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

より,

$$t \cdot \infty = \begin{cases} \frac{(1+b)t + a}{-at + b + 1} & \text{ただし } bt^2 + 2at - b \geq 0 \\ \frac{(1-b)t - a}{-at + b - 1} & \text{ただし } bt^2 + 2at - b < 0 \end{cases} \quad (4)$$

となる. さらに,

$$\infty \cdot \infty = \begin{cases} \frac{1+b}{-a} & b \geq 0 \\ \frac{1-b}{-a} & b < 0 \end{cases}$$

が得られる.

次に逆元に就いて論じてみよう.

$$(a, b) = (0, -1) \circ (x, y) = (ay - bx, -by - ax)$$

より, $x = -2ab$, $y = a^2 - b^2$ となり, 0 の逆元は

$$|a| \geq |b| \quad \text{のとき} \quad -\frac{a}{b}$$

$$|a| < |b| \quad \text{のとき} \quad -\frac{a}{b}$$

となる. $b=0$, $a=\pm 1$ の場合は 0 の逆元は ∞ となる.

∞ の逆元は,

$$(a, b) = (0, 1) \circ (x, y) = (bx - ay, ax + by)$$

より,

$$|a| \geq |b| \quad \text{のとき} \quad \frac{b}{a}$$

$$|a| < |b| \quad \text{のとき} \quad \frac{a}{b}$$

となる. 特に $b=0$ $a=\pm 1$ のときは 0 である.

$$-\frac{a}{b+1} \quad \text{の逆元は}$$

$$(-a, -b) \circ (x, y) = (-x, -y)$$

より, $-\frac{a}{b+1}$ 自身であることが解る.

以上に述べた元以外の元 t の逆元を求める.

まず (x, y) の元の逆元は, 定理 2 より

$$((a^2 - b^2)x + 2aby, (b^2 - a^2)y + 2abx)$$

である. これに対応する R_0 の元は,

$$(b^2 - a^2)y + 2abx \geq 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{1 + (b^2 - a^2)y + 2abx}{(a^2 - b^2)x + 2aby}$$

$$(b^2 - a^2)y + 2abx < 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{1 - (b^2 - a^2)y - 2abx}{(a^2 - b^2)x + 2aby}$$

(ここに, $(a^2 - b^2)x + 2ab \neq 0$ である.)

よって t の逆元は,

$$(b^2 - a^2)(1 - t^2) + 4abt \geq 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{(bt + a)^2}{(a^2 - b^2)t + ab(t^2 - 1)}$$

$$(b^2 - a^2)(1 - t^2) + 4abt < 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{(at - b)^2}{(a^2 - b^2)t + ab(t^2 - 1)}$$

である.

以上の結果を $a=1, 0$ の場合についてまとめると次の様になる.

〔定理 6〕 実数の集合に ∞ を加えた集合に次のような交換可能な結

合を定めるとそれは可換群となる.

(i) 単位元は 1,

$$(ii) \quad -1 \cdot t = \begin{cases} -\frac{1}{t} & (|t| \leq 1) \\ -t & (|t| > 1) \\ 0 & (t = \infty) \\ \infty & (t = 0) \end{cases}$$

(iii) t, t' が ± 1 に等しからざる実数で,

$$t \cdot t' = 0 \quad (t + t' + tt' - 1 = 0)$$

$$t \cdot t' = \infty \quad (t + t' - tt' + 1 = 0)$$

(iv) t, t' が 1, -1 に等しからざる実数とする. $(t+t')^2 \neq (tt' - 1)^2$ とする.

$$t \cdot t' = \frac{tt' - 1 - t - t'}{t + t' + tt' - 1} \quad ((t+t')(tt'-1) \geq 0)$$

$$t \cdot t' = \frac{t + t' + tt' - 1}{t + t' - tt' + 1} \quad ((t+t')(tt'-1) < 0)$$

(v) t が実数ならば, ± 1 に等しからざる

$$t \cdot \infty = \frac{t+1}{1-t} \quad (t \geq 0)$$

$$t \cdot \infty = \frac{t-1}{-1-t} \quad (t < 0)$$

$$\infty \cdot \infty = -1$$

また $a = -1, 0$ の場合には次の様になる.

〔定理 7〕 実数の集合に ∞ を加えた集合に, 次の様な交換可能な結合を定めると, 可換群が得られる.

(i) 単位元は -1,

$$(ii) \quad 1 \cdot t = \begin{cases} -\frac{1}{t} & (|t| \leq 1) \\ -t & (|t| > 1) \\ 0 & (t = \infty) \\ \infty & (t = 0) \end{cases}$$

(iii) t, t' が ± 1 に等しからざる実数とする.

$$t \cdot t' = 0 \quad (-t - t' + tt' - 1 = 0)$$

$$t \cdot t' = \infty \quad (t + t' + tt' - 1 = 0)$$

(iv) t, t' が ± 1 に等しからざる実数とする. $(t+t')^2 \neq (tt'-1)^2$ とする.

$$t \cdot t' = \frac{t+t'+tt'-1}{-t-t'+tt'-1} \quad (-(t+t')(tt'-1) \geq 0)$$

$$t \cdot t' = \frac{t+t'-tt'+1}{-t-t'-tt'+1} \quad (-(t+t')(tt'-1) < 0)$$

(v) t が ± 1 に等しからざる実数とする.

$$t \cdot \infty = \frac{t-1}{t+1} \quad (-t \geq 0)$$

$$t \cdot \infty = \frac{t+1}{-t-1} \quad (-t < 0)$$

(vi) $\infty \cdot \infty = 1$

残された $a=0, b=\pm 1$ の場合については次の定理が成立する.

〔定理 8〕 実数の集合に ∞ を加えた集合に於いて, 次の様な交換可能な結合を定めると可換群が得られる.

(i) 単位元は ∞ である.

$$(ii) \quad 0 \cdot t = \begin{cases} -\frac{1}{t} & (0 < |t| \leq 1) \\ -t & (|t| > 1) \\ \infty & (t=0) \end{cases}$$

(iii) $t \neq 0, \infty$ のとき,

$$t \cdot \frac{1}{t} = \infty$$

$$t \cdot (-t) = 0$$

(iv) $t \neq 0, \infty$ で且つ, $(1-tt')(t+t') \neq 0$ とする.

$$t \cdot t' = \frac{tt'-1}{t+t'} \quad ((tt'-1)^2 \geq (t+t')^2)$$

$$t \cdot t' = \frac{t+t'}{tt'-1} \quad ((tt'-1)^2 < (t+t')^2)$$

〔定理 9〕 実数の集合に ∞ を加えた集合に於いて次の様な交換可能な結合を定めると、アーベル群が得られる。

(i) 単位元は 0 である。

$$(ii) \quad \infty \cdot t = \begin{cases} -\frac{1}{t} & (0 < |t| \leq 1) \\ -t & (|t| < 1) \end{cases}$$

(iii) $t \neq 0, \infty$ のとき,

$$t \cdot \frac{1}{t} = \infty$$

$$t \cdot (-t) = 0$$

(iv) $t \neq 0, \infty$ 且つ, $(t+t')(tt'-1) \neq 0$ のとき,

$$t \cdot t' = -\frac{t+t'}{tt'-1} \quad ((t+t')^2 \geq (tt'-1)^2)$$

$$t \cdot t' = -\frac{tt'-1}{t+t'} \quad ((t+t')^2 < (tt'-1)^2)$$

2 円 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ の交点 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通って 2 円と交わる直線を引く。その交点は,

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}x}{1+x^2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x(1-\sqrt{3}x)}{1+x^2}\right),$$

$$\left(-\frac{1+\sqrt{3}x}{1+x^2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x(1+\sqrt{3}x)}{1+x^2}\right)$$

で表わされる。この 2 点を平行移動して、円 $x^2 + y^2 = 1$ の上にもって来ると、円周上の点集合の中で自己一対一対応が得られる。即ち、その対応は、

$$(X, Y) \longleftrightarrow (X', Y') \dots\dots\dots (I)$$

$$X = -\frac{1}{2} + \frac{1-\sqrt{3}x}{1+x^2}, \quad X' = \frac{1}{2} - \frac{1+\sqrt{3}x}{1+x^2}$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x(1-\sqrt{3}x)}{1+x^2}, \quad Y' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x(1+\sqrt{3}x)}{1+x^2}$$

である。よって

$$x = \frac{Y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{X + \frac{1}{2}} = \frac{Y' - \frac{\sqrt{3}}{2}}{X' - \frac{1}{2}} \left(x \neq -\frac{1}{2}, x' \neq \frac{1}{2} \right) \cdots (\text{II})$$

また,

$$X + \sqrt{3} Y + X' - \sqrt{3} Y' = 0 \cdots \cdots \cdots (\text{III})$$

故に, 定理 3 より次の結果が得られる.

〔定理〕 円周上の 2 点を, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$, それに対応する 2 点を $(X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2)$ とする. さらに, $(X'_1, Y'_1) \cdot (X'_2, Y'_2)$ なる点を, $(X_1, Y_1) \cdot (X_2, Y_2) = (X_1 X_2 - Y_1 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1)$ に対応する点とすれば,

$$\begin{aligned} (X'_1, Y'_1) \cdot (X'_2, Y'_2) = & \left(\frac{1}{2}(X'_1 X'_2 - Y'_1 Y'_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(X'_1 Y'_2 \right. \\ & \left. + X'_2 Y'_1), -\frac{\sqrt{3}}{2}(X'_1 X'_2 - Y'_2 Y'_2) + \frac{1}{2}(X'_1 Y'_2 + X'_2 Y'_1) \right) \end{aligned}$$

なる結合を得る. 且つこの結合によって, 円周上の点は可換群となる.

また,

(II) より,

$$\begin{aligned} (X, Y) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad X \neq -\frac{1}{2} & \longleftrightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \infty \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \longleftrightarrow \infty \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

によって, 円集上の点集合と, 実数の集合に ∞ を加えた集合 R_∞ とは一対一対応が得られる. この対応より円周上の点の集合上の可換群と同型なる可換群を, R_∞ の上に於いて得られる. 即ち,

〔定理〕 集合 R_∞ に於いて次の結合を定めるならば, R_∞ は可換群となる.

$$(i) \quad x, y \neq \infty, \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x \neq -y \quad \text{のとき}$$

$$x \cdot y = \frac{xy - \sqrt{3}(x+y) - 1}{x+y + \sqrt{3} \quad xy - \sqrt{3}} (x+y + \sqrt{3} \quad xy - \sqrt{3} = 0 \text{ のとき})$$

は ∞

(ii) $x \neq \infty, \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$x \cdot (-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(iii) $x \neq \infty, \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$x \cdot \infty = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}x} \quad (x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のときは } \infty)$$

(iv) $x \neq \infty, \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき,

$$x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}x^2 - 4x - \sqrt{3}}{3x^2 - 1}$$

(v) $\infty \cdot \infty = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \infty,$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \infty = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{単位元})$$

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点集合と、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点よる $(0, \pm 1)$ なる 2 点を除いた点集合 (これを G と書く) とは、次の対応によって一対一に対応させることが出来る。

$$(x, y) \text{ } x^2 - y^2 = 1 \longleftrightarrow \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x} \right)$$

双曲線上の点の集合は次の結合によって、可換群となる。

$$(x, y) \cdot (x', y') = (a(xx' + yy') + b(xy' + x'y), b(xx' + yy') + a(xy' + x'y)) \quad a^2 - b^2 = 1.$$

この可換群と同型な可換群が G の上で得られる。

〔定理〕 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点の集合より、 $0, \pm 1$ を除いた集合を G とする。 G に於いて、次の様な和を定めると G は可換群となる。

$$(x, y) \cdot (x', y') = \left(\frac{xx'}{a(1 + yy') - b(y + y')}, \right.$$

$$\frac{b(1+yy')-a(y+y')}{a(1+yy')-b(y+y')}$$

ここに $a^2-b^2=1$

(註, $a(1+yy')-b(y+y') \neq 0$, また群の単位元は $(\frac{1}{a}, \frac{b}{a})$ である.)

双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点集合と G との一対一対応が,

$$(x, y)x^2-y^2=1 \longleftrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

の場合には次の定理を得る.

[定理] G に於いて次の様な和を定めると, G は可換群となる.

$$(x, y)(x', y') = \left(\frac{xx'}{a(1+yy')+b(y+y')}, \frac{b(1+yy')+a(y+y')}{a(1+yy')+b(y+y')} \right)$$

$$a^2-b^2=1$$

(註 $a(1+yy')+b(y+y') \neq 0$, また群の単位元は $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ である.)

双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点集合と G との一対一対応が,

$$(x, y)x^2-y^2=1 \longleftrightarrow \left(-\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$$

の場合には次の定理を得る.

[定理] G に於いて次の様な和を定めると, G は可換群となる.

$$(x, y)(x', y') = \left(-\frac{xx'}{a(1+yy')-b(y+y')}, \frac{b(1+yy')-a(y+y')}{a(1+yy')-b(y+y')} \right)$$

$$a^2-b^2=1$$

(註, $a(1+yy')-b(y+y') \neq 0$, また群の単位元は, $(-\frac{1}{a}, \frac{b}{a})$ である.)

双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点集合と G との一対一対応が,

$$(x, y)x^2-y^2=1 \longleftrightarrow \left(-\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

の場合には次の定理を得る.

〔定理〕 G に於いて次の様な和を定めるならば, G は可換群となる.

$$(x, y)(x', y') = \left(-\frac{xx'}{a(1+yy') + b(y+y')}, \frac{b(1+yy') + a(y+y')}{a(1+yy') + b(y+y')} \right)$$

(註, 群の単位元は, $\left(-\frac{1}{a} - \frac{b}{a}\right)$ である.)

2 円周上の点と行列の群

$x^2 + y^2 = 1$ なる円に於いて, (x, y) に対応する点として,

$\left(\frac{px+qy+r}{ax+by+c}, \frac{p'x+q'y+r'}{ax+by+c}\right)$ なる点を考える.

これが円周上にあるための条件は,

$$\begin{cases} pq + p'q' = ab \\ pr + p'r' = ac \\ qr + q'r' = bc \\ p^2 + p'^2 - a^2 = q^2 + q'^2 - b^2 = c^2 - r^2 - r'^2 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

である.

条件 (1) を満足する 2 点を,

$$(X_1, Y_1) = \left(\frac{p_1x + q_1y + r_1}{a_1x + b_1y + c_1}, \frac{p'_1x + q'_1y + r'_1}{a_1x + b_1y + c_1} \right)$$

$$(X_2, Y_2) = \left(\frac{p_2x + q_2y + r_2}{a_2x + b_2y + c_2}, \frac{p'_2x + q'_2y + r'_2}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$$

として, (X_1, Y_1) と (X_2, Y_2) の積を, 次の様に定義する.

$$(X, Y) = (X_1, Y_1) \cdot (X_2, Y_2) = \left(\frac{p_1X_2 + q_1Y_2 + r_1}{a_1X_2 + b_1Y_2 + c_1}, \frac{p'_1X_2 + q'_1Y_2 + r'_1}{a_1X_2 + b_1Y_2 + c_1} \right) \dots\dots\dots (2)$$

これを通分して,

$$(X, Y) = \left(\frac{Px + Qy + R}{Ax + By + C}, \frac{P'x + Q'y + R'}{Ax + By + C} \right)$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p'_1 & q'_1 & r'_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p'_2 & q'_2 & r'_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

が成立する. また

[定理 1]

$$\left\{ \begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ a & b & c \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} pq + p'q' = ab, \quad pr + p'r' = ac, \quad qr + q'r' = bc, \\ p^2 + p'^2 - a^2 = q^2 + q'^2 - b^2 = c^2 - r^2 - r'^2 \neq 0 \end{array} \right. \right\}$$

は群をなす, この群に含まれるすべての元は円周上の点に対応する.

[証明] $ax + by + c \neq 0$ なることを証明しよう. $p^2 + p'^2 - a^2 = X \neq 0$ とおくと, $qr' - q'r \neq 0$ である. よって,

$$\begin{aligned} p &= \frac{a(br' - cq')}{qr' - q'r}, \quad p' = \frac{a(qc - br)}{qr' - q'r} \\ p^2 + p'^2 - a^2 &= \frac{a^2}{(qr' - q'r)^2} \{ (br' - cq')^2 + (qc - br)^2 - (qr' - q'r)^2 \} \\ &= \frac{a^2}{(qr' - q'r)^2} \{ b^2(r'^2 + r^2) - 2bc(r'q' + rq) + c^2(q^2 + q'^2) \\ &\quad - (qr' - q'r)^2 \} \\ &= \frac{a^2}{(qr' - q'r)^2} \{ (c^2 - b^2)(q^2 + q'^2 - b^2) - (qr' - q'r)^2 \} \\ &= \frac{a^2}{(qr' - q'r)^2} \{ q^2(q' + q'^2 - 2b^2 + r^2) + q'^2(q^2 + q'^2 - 2b^2 - r'^2) \\ &\quad + 2qq'rr' - b^2(c^2 - b^2) \} \\ &= \frac{a^2}{(qr' - q'r)^2} (q^2 + q'^2 - b^2)^2 > 0 \\ \therefore X &= -\frac{(qr' - q'r)^2}{a^2} > 0 (a \neq 0). \therefore p^2 + p'^2 = c^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore X=c^2-b^2-a^2>0$$

$$[\text{定理 2}] \left\{ \left(\begin{array}{ccc} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{array} \right) \middle| x_1^2 = x_2^2 - x_3^2 \neq 0 \right\} \text{は, 定理 1 の群の部分}$$

分群である.

この定理に於いて, $x_1=a$, $x_2=1$ $x_3=b$ とおくと次の定理が得られる.

[定理 3] 円 $x^2+y^2=1$ の円周上のすべての点より $(0, \pm 1)$ を除いた点集合は

$$\left\{ \left(\frac{ax}{by+1}, \frac{y+b}{by+1} \right) \middle| \begin{array}{l} a \neq 0, b \neq \pm 1 \\ a^2+b^2=1 \\ x_1, y_1 \text{ 固定} \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \text{で表わされる. この}$$

集合に於いて, (2) により積を定めるならば, 定理 2 の行列の集合と準同型な群が得られる. またこの群は同じ点集合上で

$$(a, b) \cdot (a', b') = \left(\frac{aa'}{1+bb'}, \frac{b+b'}{1+bb'} \right)$$

なる結合を有する可換群と同型である.

[定理 4] 双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点集合は

$$\left\{ \left(\frac{by+1}{ax}, \frac{y+b}{ax} \right) \middle| \begin{array}{l} a \neq 0, a^2+b^2=1 \\ (x, y) \text{ 固定} \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \text{で表わされる. この}$$

集合の上で,

$$\left(\frac{by+1}{ax}, \frac{y+b}{ax} \right) \cdot \left(\frac{b'y+1}{a'x}, \frac{y+b'}{a'x} \right) = \left(\frac{b''y+1}{a''x}, \frac{y+b''}{a''x} \right)$$

$$a'' = \frac{aa'}{1+bb'}, \quad b'' = \frac{b+b'}{1+bb'}$$

なる積を定めるならばこの集合は可換群となる.

〔定理 5〕 $\left\{ \left(\begin{array}{ccc} -\frac{k^2+1}{k^2-1} & 0 & \frac{2k}{k^2-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2k}{k^2-1} & 0 & \frac{k^2+1}{k^2-1} \end{array} \right) \middle| k^2 \neq 1 \right\}$ は群をなす. 或は

$\left\{ \left(\begin{array}{cc} -\frac{k^2+1}{k^2-1} & \frac{2k}{k^2-1} \\ \frac{-2k}{k^2-1} & \frac{k^2+1}{k^2-1} \end{array} \right) \middle| k^2 \neq 1 \right\}$ は群をなす. これと同型な群

として, 次のものが存在する.

実数の集合より ± 1 を除き, 次の結合を定めると群になる.

(i) 単位元は 0

(ii) $k \cdot k = 0$

(iii) $k \neq k'$ のとき, $k \cdot k' = \frac{kk' - 1}{k' - k}$

1 の群の部分群である

〔定理 6〕 $\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 - \frac{a^2}{2} & a & -\frac{a^2}{2} \\ -a & 1 & -a \\ \frac{a^2}{2} & -a & 1 + \frac{a^2}{2} \end{array} \right) \right\}$ は定理 1 の群の部分可換群

である.

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{2} & a & -\frac{a^2}{2} \\ -a & 1 & -a \\ \frac{a^2}{2} & -a & 1 + \frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{b^2}{2} & b & -\frac{b^2}{2} \\ b & 1 & -b \\ \frac{b^2}{2} & -b & 1 + \frac{b^2}{2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(a+b)^2}{2} & a+b & -\frac{(a+b)^2}{2} \\ -(a+b) & 1 & -(a+b) \\ \frac{(a+b)^2}{2} & -(a+b) & 1 + \frac{(a+b)^2}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

円 $x^2+y^2=1$ の周上の点 (x, y) を端点とする半径の上に $\left(\frac{x}{1-ay}, \frac{y}{1-ay}\right)$ なる点を取り, これを $(1, 0)$ に結び, 円との交点を求めると, その座標は,

$$\left(\frac{\left(1-\frac{a^2}{2}\right)x+ay-\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{2}x-ay+1+\frac{a^2}{2}}, \frac{-ax+y-a}{\frac{a^2}{2}x-ay+1+\frac{a^2}{2}} \right) \dots (3)$$

である. 定理 7 の群は可換群であるから次の定理が成り立つ.

円 0 の一半径を OA とし, 円周上の 1 点を P とする. OP 上の 1 点を P' とし, P' より OD 下せる垂線の足を P'' とする. 直線 OA に関して平面は二つの部分に分けられる. $P'P''$ は P' が一方の側にある時正, P' が他の側にあるとき負とする. また, 平面は円の外部と内部に分けられる. PP' は P' が一方の部分にある時正他の部分にあるとき負と定める.

〔定理 7〕 円 0 の直径を AB とする. OA, OB に非ざる一半径を OX とし, OX 上の 2 点を P, Q とする. AB に下せる垂線の足を P_1, Q_1 とする.

$$P_1P:XP=1:a, Q_1Q:XQ=1:b$$

とする. PA, QA と円 0 の A に非ざる交点を X', X'' とし, OX' 上の点 P' より AB への垂線の足を P_2 , OX'' 上の点 Q' より AB に下せる垂線の足を Q_2 とする.

$$P_2P':X'P'=1:b, Q_2Q':X''Q'=1:a$$

とするならば, P', Q', A は 1 直線上にある.

〔定理 8〕 円 0 の半径を OA とする. 円周上の A に非ざる 1 点を P とする. OA と円 0 に P に於いて外接 (内接) する円の中心を O' とする. $O'A$ と円 0 の交点で A に非ざる点を Q とし, Q に於いて, 円 0 に外接 (内接) し, AB に接する円の中心を O'' とすれば, $O''A$ は P を通る.

〔証明〕 P の座標を (x, y) とすれば, O' の座標は $\left(\frac{x}{1-y}, \frac{y}{1-y}\right)$,

$\frac{y}{1-y}$) である。よって,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 の代りに a を使うと、次の定理を得る。

〔定理 9〕 円 O の半径を OA とする。円周上の A に非ざる 1 点を P とし、 OP 上で 1 点 Q' をとり、 P' より OA に垂線を下し足を P'' とし、

$$P'P'' : PP' = 1 : a$$

とする。 PA と円 O との交点で A に非ざる点を Q とする。 OQ 上に 1 点 Q' をとり、 Q' より OA に垂線を下し、足を Q'' とし、

$$Q'Q'' : QQ' = 1 : -a$$

とするならば、 Q', A, P は 1 直線上にある。

さらに、結合率は次のようになる。

〔定理 10〕 円 O の半径を OA とする。円周上の A に非ざる 1 点を P とする。 OP 上に 1 点 P' をとり、 P' より OA に下せる垂線の足を P'' とし、

$$P'P'' : PP' = 1 : a$$

とする。 AP' と円 O との交点 (A に非ざる) を Q とする。 OQ 上に 1 点 Q' をとり、 Q' より OA に下せる垂線の足を Q'' とし、

$$Q'Q'' : QQ' = 1 : b$$

とする。 AQ' と円 O との交点 (A に非ざる) を R とする。 OR 上に 1 点 R' をとり、 R' より OA に下せる垂線の足を R'' とし、

$$R'R'' : RR' = 1 : c$$

とする。 AR' と円 O との交点 (A に非ざる) を S とする。以上に於いて、 a, b, c の順序を変更しても同 1 点 S に達する。

(2) に於いて、 $b=1-a, b=-1-a$ とすれば次の定理を得る。

〔定理 11〕 円 0 の半径を OA とする。円 0 に点 P に於いて外接 (内接) し, OA に接する円の中心を O' とする。 OO' 上の 1 点を P' とし, $P'A$ と円 0 の交点で A に非ざる点を Q , OQ と $O'A$ との交点を Q' とする。 P', Q' より OA に下せる垂線の足を P'', Q'' とすれば, 次の関係が成立する。

$$\frac{PP'}{P''P'} + \frac{QQ'}{Q''Q'} = 1(-1)$$

〔定理 12〕

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}^2 \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \left(\frac{\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)x + ay - \frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{2}x - ay + 1 + \frac{a^2}{2}}, \frac{-ax + y - a}{\frac{a^2}{2}x - ay + 1 + \frac{a^2}{2}} \right) \text{ と } \left(\frac{x}{1-y}, \right. \\ & \left. 0 \right) \text{ とを結ぶ直線の円 0 との交点は, } \left(\frac{\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}}, \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{x-y-1}{-\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}} \right) \text{ である。よって次の定理を得る。}$$

〔定理 13〕 円 0 上の 1 点 P に於いて接し, 半径 OA に内接 (外接) する円の中心を O' とする。 $O'A$ と円 0 の交点 (A に非ざる) を Q とし, 円 O' の OA に於ける接点と Q を結ぶ直線の円 0 との交点 (Q に非ざる) を Q' とする。 Q' に於いて円 0 に内接 (外接) し, OA

に接する円の中心を O'' とする. $O''A$ と円 O との交点にして A に非ざる点を Q'' とする. Q'' と, 円 O'' の OA に於ける接点を結ぶ直線をひけば, この直線は A を通る.

円 $x^2+y^2=1$ の 1 点 (x, y) の y 軸に関して対称な点に於いて外接 (内接) し, x 軸に接する円の中心の座標は

$$\left(\frac{x}{y-1}, \frac{y}{1-y} \right) \left(\left(\frac{-x}{1+y}, \frac{y}{1+y} \right) \right)$$

である. この点と $(1, 0)$ を結び, 円との交点を求めると,

$$\left(\frac{x-2y+1}{x+2y-3}, \frac{-2x-2y+3}{x+2y-3} \right) \left(\left(\frac{-x-2y-1}{-x+2y+3}, \frac{-2x+2y+2}{-x+2y+3} \right) \right)$$

である. また x 軸との接点と, この点を結ぶと, その座標は,

$$\left(\frac{-x-2y+1}{x-2y+3}, \frac{2x-2y+2}{x-2y+3} \right) \left(\left(\frac{-x+2y+1}{x+2y+3}, \frac{-2x-2y-2}{x+2y+3} \right) \right)$$

である.

[定理 14]

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{array} \right)^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この定理より, 次の定理を得る.

[定理 15] 円 O の直径を AB とする. これに垂直な直径を CD とする. 円周上の 1 点を P とし, CD に関して P に対称な点を P' と

する。 P' に於いて円 O に接し、 AB に P'' に於いて接する円を円 O_1 とする。 O_1A と円 O の交点で A に非ざる点を P''' とし、 $P'P'''$ と円 O の交点で P''' に非ざる点を Q とする。 CD に関して Q に対称な点を Q' とする。 Q' に於いて円 O に接し、 AB に Q'' に於いて接する円を円 O_2 とする。 O_2A と円 O の交点で A に非ざる点を Q''' とし、 $Q''Q'''$ と円 O の交点で Q''' に非ざる点を R 。 CD に関して R に対称な点を R' とする。 R' に於いて円 O に接し、 AB に R'' に於いて接する円を円 O_3 とする。 O_3A と円 O の交点で A に非ざる点を R''' とし、 $R''R'''$ と円 O の交点で R''' に非ざる点は P である。 また、 P''' と R は AB に関して対称である。 ここに AB に関して一方の側にある円 O_i は内接とし、 他方にある円 O_i は外接とする。

3 円周上の点集合より 2 点を除いた集合と群

〔定理 1〕 円 $x^2+y^2=1$ の周上の点集合より $(0, \pm 1)$ を除いた点集合に於いて、

$$(x, y) \cdot (x', y') = \left(\frac{xx'}{1+yy'}, \frac{y+y'}{1+yy'} \right)$$

なる結合を定めれば、 この集合はアーベル群となる。

$(x, y), (x', y')$ を通る直線と $x=0$ との交点と、 $(1, 0)$ を結び円との交点を求めれば、 この結合となる。

単位元は $(1, 0)$ である。

$$\begin{aligned} (x, y)(x, -y) &= (1, 0)(x, y)(-x, -y) = (-1, 0)(x, y)^2 \\ &= \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2} \right) \end{aligned}$$

これより次の定理を得る。

〔定理 2〕 円 O の周上の 1 点 P 、 それの CD に関する対称点を P' とする。 円周上の 1 点 Q を P に結び、 CD との交点を P' と結び、 円 O との交点で P' に非ざる点を Q' とすれば、 Q と Q' は CD に関して対称である。

証明 $P \cdot Q = P' \cdot Q'$ 、 $Q \cdot P^{-1} = (-1, 0)$ より明か。

また、結合率を幾何学的に云えば次の様になる。

〔定理 3〕 円の直径を AB , これに垂直な直径を CD とする. 周上に 3 点 P, Q, R をとり, PQ と CD の交点と A を結び, 円 O との A に非ざる交点を R' とし, PR' と CD との交点と A を結び, 円 O との A に非ざる交点を S とする. QR と CD の交点と A を結び, 円 O との A に非ざる交点を P' とし, PP' と CD との交点と A を結び, 円 O の A に非ざる交点を T とすれば, T と S とは一致する.

$$\text{さらに } (x, y) \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \quad \frac{-2y}{1+y^2} \right) = (x, -y)$$

$$(x, y) \left(\frac{y^2-1}{1+y^2} \quad \frac{-2y}{1+y^2} \right) = (-x, -y) \text{ となる. これは次}$$

の様に云われる. 注意, 以後の定理に於いて, 直交する 2 直径と言及されていない場合は, それは AB, CD であるとする.

〔定理 4〕 円周上に 1 点 P , を定め, P より円に接線を引き, CD との交点を Q , QA と円 O の交点で A に非ざる点を R とする. R の AB に関する対称点を R' とし, PR' と CD の交点を Q' , $Q'A$ と円 O の A に非ざる交点を P' とすれば, P と P' は AB に関して対称である. また, R の O に関する対称点を R'' とし, $R''P$ と CD の交点と A を通る直線の円 O との A に非ざる交点を P'' とすれば, P'' は O に関して P と対称である.

〔定理 5〕 円 O の周上の 1 点を P とする. P の CD に関する対称点を P' , CD と PP' の交点と A とを結ぶ直線の円 O との交点で A に非ざる点を Q とする. P に於ける円 O の接線と CD との交点 R と, A を結び, 円 O との A に非ざる交点を Q' とすれば, Q と Q' は CD に関して対称である.

また QP と CD との交点を A に結ぶ直線の円 O との A に非ざる交点 R と P との O に関する対称点は 1 直線上にある.

$$\text{証明 } (x, y)(-x, y) = \left(\frac{-x^2}{1+y^2} \quad \frac{2y}{1+y^2} \right) \text{ により明か.}$$

〔定理 6〕 円 O の周上の 2 点を P_1, P' とし, CD に関して対称とする. 周上の他の 1 点を Q とし, QP, QP' の CD との交点を, RR'

とし、 $ARAR'$ の円 O との交点にして A に非ざる点を S, S' とすれば、 S と S' は CD に関して対称である。

$$\begin{aligned} \text{証明 } (x, y)(z, u) &= \left(\frac{xz}{1+yu}, \frac{y+u}{1+yu} \right), (-x, y)(z, u) \\ &= \left(\frac{-xz}{1+yu}, \frac{y+u}{1+yu} \right) \end{aligned}$$

〔定理 7〕 円周上の 3 点を P, Q, Q' とする。 Q と Q' は AB に関して対称とする。 PQ と CD の交点と A を結び、円周と交わる点で A に非ざる点を R とする。 PQ と CD の交点と A を結び、円周と交わる点で A に非ざる点を R' とする。 RR' の CD との交点を S とすれば、 SP は円の接線である。

$$\text{証明 } ((x, y)(z, u))((x, y)(z, -u)) = (x, y)^2$$

〔定理 8〕 円 O の周上の 3 点を P, Q, Q' とし、 Q と Q' は O に関して対称とする。 PQ と CD の交点と A を結び、円 O との交点で A に非ざる点を R とする。 PQ' と CD の交点と A を結び、円 O との交点で A に非ざる点を R' とする。 RR' と CD の交点を S とすれば、 $PS \not\parallel AB$ 。

$$\begin{aligned} \text{証明 } ((x, y)(z, u))((-x, -y)(z, u)) &= (-1, 0)(z, u)^2 \\ &= (-z, u)(z, u) \end{aligned}$$

〔定理 9〕 円 O の周上の 2 点を P, Q とする。 PQ と CD の交点と A を結び、円 O との交点で A に非ざる点を R とすれば、 R の O に関する対称点 R' と P を結び CD との交点を求め、これと A を結び円 O との交点で A に非ざる点を Q' とすれば、 Q' は Q の O に関する対称点である。

$$\text{証明 } (a, b), (c, d) = (x, y) \longrightarrow (-x, -y)(a, b) = (-c, -d).$$

〔系〕 円 O の 1 点 P に於いて接線を引き、 CD との交点を A と結び、円 O との交点で A に非ざる点を Q とする。 Q の O に関する対称点 Q' と P を結び、 CD との交点と A を結ぶ直線の円 O との交点で A に非ざる点を R とせば、 R は P の O に関する対称点である。

〔定理 10〕 円 O の周上の点を P, Q, R, S とする. PQ と RS の交点が CD 上で交わるとする. その交点を T とする. AT と円 O の交点で A に非ざる点を U とし, S の AB に関する対称点を S', US' と CD との交点を V とすれば, V, A, R は 1 直線上にある.

証明 $P(a, b), Q(c, d), R(x, y), S(u, z)$ とすれば,

$$(a, b)(c, d) = (x, y)(u, z) \text{ 故に, } (x, y) = (a, b)(c, d)(u, -z)$$

〔定理 11〕 円周上の 3 点を P, Q, Q' とし,

$$P(a(x), b(x)), Q(c(x), d(x)), Q'(-c(x), -d(x)) \quad a(x) \\ = a\left(\frac{1}{x}\right), \quad b(x) = b\left(\frac{1}{x}\right)a(x) \quad b(x) \text{ は const でない函数とす}$$

る.

$$a(x)b(x)(c(x)d(x)) = (f(x), g(x))$$

$$(a(x)b(x))(-c(x)-d(x)) = \left(f\left(\frac{1}{x}\right)g\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

ならば, $d(x) = -d\left(\frac{1}{x}\right), c(x) = -c\left(\frac{1}{x}\right)$ である. 逆も真である.

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \frac{a(x)c(x)}{1+b(x)d(x)} &= \frac{-a\left(\frac{1}{x}\right)c\left(\frac{1}{x}\right)}{1-b\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \frac{b(x)+d(x)}{1+b(x)d(x)} \\ &= \frac{b\left(\frac{1}{x}\right)-d\left(\frac{1}{x}\right)}{1-b\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{より } b(x)^2(d(x)+d\left(\frac{1}{x}\right)) = d(x)+d\left(\frac{1}{x}\right), \quad a(x)(c(x)+c\left(\frac{1}{x}\right))$$

$$+a(x)b(x)d(x)(c(x)+c\left(\frac{1}{x}\right)) = 0$$

が成立することにより明か. 逆は明か.

$$\text{〔定理 12〕 円周上の 2 点を } \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right), \left(\frac{2y}{y^2+1}, \frac{y^2-1}{y^2+1}\right)$$

とすれば、 $\left(\frac{2x}{x^2+1} \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\left(\frac{2y}{y^2+1} \frac{y^2-1}{y^2+1}\right)=\left(\frac{2xy}{x^2y^2+1} \frac{x^2-1}{x^4+1}\right)$ となる。よって、円周上の点集合 $((0, 1), (0, -1))$ を除くは実数乗法群と同型となる。

〔定理 13〕 円周上の点より $(0, 1), (0, -1)$ を除いた集合は、 $\{(x, y) \mid x, y \text{ 実数 } \neq 0\}$ の係る乗法群に準同型である。

$$\text{証明 } (x, y) \longrightarrow \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$(x, y)(x^1, y^1) \longrightarrow \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{2x^1y^1}{x^{12}+y^{12}} \frac{x^{12}-y^{12}}{x^{12}+y^{12}}\right)$$

$$\frac{x^{12}-y^{12}}{x^{12}+y^{12}} = \left(\frac{2xyx^1y^1}{x^2x^{12}+y^2y^{12}} \frac{x^2x^{12}-y^2y^{12}}{x^2x^{12}+y^2y^{12}}\right)$$

〔定理 14〕 円 0 の周上に 2 点 P, P' をとり、 P と P' は 0 に関して対称とする。 OP と CD の交点を P' に結び円 0 との交点で P' に非ざる点を Q 、 OP' と CD の交点を P に結び円 0 との交点で P に非ざる点を Q' とすれば、 Q と Q' は対称である。

$$\text{証明 } (x, y)\left(\frac{1+y^2}{-x^2} \frac{-2y}{1+y^2}\right)=(-x, -y),$$

$$(-x, -y)\left(\frac{-x^2}{1+y^2} \frac{2y}{1+y^2}\right)=(x, y) \text{ より}$$

〔定理 15〕 円 0 の周上の 2 点を P, Q とし、 AP, AQ と CD との交点を P', Q' とする。 $PQ', P'Q$ と円 0 との交点で P, Q に非ざる点を P'', Q'' とすれば、 P'' と Q'' とは AB に関して対称である。

証明 $P=(x, y), Q=(z, u)$ とすれば

$$P'=QP^{-1}=(z, u)(x, -y)=\left(\frac{xz}{1-yu}, \frac{u-y}{1-yu}\right)$$

$$Q''=P \cdot Q^{-1}=(x, y)(z, -u)=\left(\frac{xz}{1-yu}, \frac{y-u}{1-yu}\right)$$

また、 AP'' と CD の交点と Q を結び、円 0 との交点で Q に非ざる点を R とすれば、 R は P と対称である。

証明 $P'=QR=QP^{-1} \therefore R=P^{-1}$

〔定理 15 の系〕 円 0 の周上の 1 点を P とする. P の CD に関する対称点を P'' とし, PP'' と CD の交点を Q' とする. AQ' と円 0 の交点で A に非ざる点を Q とする. AP と CD の交点を P' , $P'Q$ と円 0 の交点で Q に非ざる点を Q'' とすれば, P'' と Q'' とは AB に関して対称, したがって, P と Q'' は 0 に関して対称な点である.

〔定理 16〕 円 0 の周上の 1 点を P とする. P の 0 に関する対称点を P' , P の AB に関する対称点を P'' とする. P に於ける接線と CD の交点を P' に結び, 円 0 との交点で P' に非ざる点を Q とする. PP'' と CD の交点を P に結び, 円 0 との P に非ざる交点を R とすれば, Q と R は AB に関して対称である.

証明 $P(x, y)$, $P'(-x, -y)$, $P''(x, -y)$.

$$Q = P^2 P'^{-1}, R = P' P'' P^{-1}, P'' = P^{-1}$$

$$\therefore Q = R^{-1}$$

〔定理 17〕 円 0 の周上の 1 点を P とする. P に於ける接線と CD との交点を P の 0 に関する対称点 P' に結び, 円 0 との交点で P' に非ざる点を Q とする. P より CD に下せる垂線の足と P' とを結び, 円 0 との交点で P' に非ざる点を R とすれば, R と Q は CD に関して対称である.

証明 P の CD に関する対称点を P' とする.

$$P \cdot P'' = P' \cdot R, P^2 = Q P'$$

$$R = P P'' P'^{-1}, Q = P^2 P'^{-1}$$

P と P'' は CD に関して対称, よって定理 5 より, $PP'' P'^{-1} = P^2 P'^{-1}$

〔定理 18〕 円 0 の周上の 1 点 P とする. P に於いて接線を引き, CD との交点と A を結び, 円 0 との交点で A に非ざる点を Q とする. PQ と CD の交点を A に結び, 円 0 との交点で A に非ざる点を R とする. P の 0 に関する対称点を P' とし, P' と P に於ける接線の CD との交点とを結び, 円 0 との交点で P' に非ざる点を S とすれば, S と R は CD に関して対称である.

証明 $P^2 = Q$, $PQ = R$, $P^2 = P'S$

$$\therefore R = P^3, S = P^2 P'^{-1}$$

P と P'^{-1} は CD に関して対称, よって定理 6 より R と S は CD に関して対称である.

〔定理 19〕 円 0 の周上に 2 点 P, Q をとり, 0 に関する対称点をそれぞれ P', Q' とする. PQ と CD の交点を A に結び, 円 0 との交点で A に非ざる点を R とする. $P'Q'$ と CD の交点を A に結び, 円 0 との交点で A に非ざる点を R' とすれば, R と R' は AB に関して対称である.

証明 $P(x, y), Q(x, z), P'(-x, -y), Q'(-u, -z)$ とすれば,

$$(x, y)(z, u) = \left(\frac{xz}{1+yu}, \frac{y+u}{1+yu} \right)$$

$$(-x, -y)(-z, -u) = \left(\frac{xz}{1+yu}, \frac{-y-u}{1+yu} \right)$$

となる.

〔定理 20〕 円周上の 1 点を P とする. P に於ける接線と CD との交点を, P の 0 に関する対称点 P' に結び, 円 0 との交点で P' に非ざる点を Q とする. Q に於ける円 0 の接線と CD との交点を, P に結び, 円 0 との交点で P に非ざる点を R とすれば, RP' と PQ と CD は 1 点で交わる.

証 $P^2 = P' \cdot Q, Q^2 = PR$

$$P'R = P^2 Q^{-1} \cdot P^{-1} Q^2 = PQ$$

証終り

〔定理 21〕 円 0 の周上に 4 点 X, Y, P, Q がある. XP と CD の交点を Y に結び, 円 0 との交点で Y に非ざる点を S とする. YQ と CD の交点を X に結び, 円 0 との交点で X に非ざる点を T とする. XQ と CD の交点を Y に結び, 円 0 との交点で Y に非ざる点を U とする. YP と CD の交点を X に結び, 円 0 との交点で X に非ざる点を V とするならば, PQ, ST, UV, CD は 1 点で交わる.

〔定理 22〕 円周上の 3 点を P, Q, R とする. ここに, 群の意味で,

$$R = P \cdot Q$$

とする. CP, CQ, CR と AB の交点を P', Q', R' とすれば,

$$OP' \cdot OQ' = OR' \cdot OA$$

である。逆も真である。

証 P', Q' の座標はそれぞれ,

$$\left(\frac{x}{1-y}, 0\right), \left(\frac{x'}{1-y'}, 0\right)$$

である。さらに,

$$\frac{x}{1-y} \cdot \frac{x'}{1-y'} = \frac{\frac{xx'}{1+yy'}}{1 - \frac{y+y'}{1+yy'}} \quad .$$

が成立する。

この定理より次の定理が得られる。

〔定理 23〕 円 O の周上の 1 点を P とし, AS に関して P に対称な点を P' とする。 CP, CP' の AB との交点を Q, Q' とすれば, $\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = \overline{OA}^2$ である。逆も真である。

〔定理 24〕 OA 上に 1 点 P をとり, PC と円 O の交点で C に非ざる点を Q とする。 P より OC へ平行線を引き, C より OA に平行線を引き, その交点と Q を結び, 円 O との交点で Q に非ざる点を R とする。 RQ と CD の交点を A と結び, 円 O との交点で A に非ざる点を S とする。 CQ, CR, CS と OA との交点を, それぞれ Q', R', S' とすれば, 次の関係が成立する

$$\overline{OQ'} \cdot \overline{OR'} = \overline{OS'} \cdot \overline{OA}$$