拡張 Merton モデル

中　村　信　弘*

概要

金融工学の分野における新しい金融技術として，確率金利のもとで一般的なカーブしたデフォルト境界に対する Markov 過程の初到達時刻の確率密度関数の計算法と企業の信用リスク計量化への応用を解説する．信用リスクの構造的アプローチ（structural approach）の範疇で，満期までにデフォルトが起り得る，より現実的な設定をもつ拡張 Merton モデルを取り扱う．併せて，Longstaff-Schwartz モデル［7］の誤りについて言及する．

1　序論

近年，信用リスクのモデル化が盛んに研究されている．現在のところ，信用リスクを定量化するアプローチには，Duffie-Singleton［5］の分類に従うなら，以下の 2 つに大別される．1 つは Merton［9］を嚆矢とする企業価値，企業固有の情報構造に基づく“構造的”（structural)）アプローチであり，デフォルト過程は内生的にもたらされる．2 つめはそのような企業固有の情報でなく，第 3 者による信用査定に基づき，間接的に，企業の信用力をモデル化する“誘導型”（reduced-form）アプローチである．後者のアプローチでは，企業の信用力の変遷を格付け推移 Markov 行列で表すもの（格付け機関による信用査定）や，外生的に確率ハザード率の確率過程を導入し，観察される社債のスプレッドデータに合わせるもの（社債市場の参加者による信用査定）などがある．

本稿では前者の構造的アプローチによる信用リスクのモデル化を研究する．

最近，確率金利下での信用リスクの構造的アプローチで代表的な文献の一つ，Longstaff-Schwartz モデル（1995）［7］の誤りが指摘されている［4］．その論文は，よく引用され，それに基づく実証研究さえ，幾つか報告されているため，その誤りは影響が大きいと思われる．残念ながら，まだ，その誤りが実務家や研究者の間で知られていないため，本稿でその問題点を再度，明確にし，［4］でまだ手がけられていない幾つかのトピックを考察する．Longstaff-Schwartz モデル［7］は，金融工学風のファイナンスの論文であるが，もちろん，彼らは，正しいと思って論文を執筆し，複数のレフェリーの審査もパスし出版され，10年近く世界中の研究者，実務家から引用され，実証研究さえなされてきた論文である．しかし，一旦，その誤りが明らかになったとき，金融工学を用いて嘘をつくことはなんと容易かと思いたくなる実例である．我々は，今，流行りの「金融工学」という名前に躍らされるのではなく，自分の目で見て，正しい判断を下さなければならないと肝に銘ずるべきである．

信用リスクの構造的アプローチの実用化に関しては，JP Morgan の Credit-Metrics［8］や KMV モデル［11］，［2］などが有名である．後者の方法は，デフォルトを満期時点においてのみ判定する Merton モデル［9］を基礎とし，実務的な改良が加えられたものである．本稿では，Merton モデルのより現実的，実務的な一般化の観点からの研究として，［4］で提案されたデフォルトバリアに対する初到達時刻の確率分布を計算する積分方程式法を援用して，確定金利，フラットなデフォルトバリアの設定のもとで展開された Black-Cox［1］の株式価値，負債価値の評価問題を確率金利，カーブしたデフォルト境界に拡張して再考する．この研究成果は KMV モデルの実務的拡張を与えるものであり，実証に繋がると思われる．本稿の目的の一つは，このような金融工学の分野における新しい金融技術の解説とその幾つかの実務的な応用事例を紹介することである．

本稿の構成は以下の通り．第2章で Merton モデルの拡張とカーブしたデフォルト境界への初到達時刻の確率密度関数の計算アルゴリズム，第3章で確率金利への拡張と Longstaff-Schwartz モデルの誤り，期中デフォルトを考慮した固定利付き負債，変動利付き負債の評価を取り上げる．最後の章は要約と今後の課題

にあてられる．

2　企業価値の変動モデル

将来の不確実な企業価値の変動をモデル化する常套手段は，その資産価値過程に 1 次元の Markov 過程を導入するものである．まず，構造的アプローチの基本である Merton のモデル［9］を簡単に解説し，次に，その拡張モデル（カーブしたバリア型デフォルト境界）の説明を行う．

2.1　Merton モデル

フィルタ付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{F})$，$\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ で標準 Brown 運動 (BM) を $(B_t)_{t\geq 0}$ とする．Merton モデルでは企業の資産価値が一定のドリフト μ，拡散係数 σ をもつ次の確率微分方程式 (SDE) に従って変動すると仮定する．

$$\frac{dA_t}{A_t}=\mu dt+\sigma dB_t. \tag{1}$$

企業の負債の満期を T とする．このとき，企業の株式価値は，資産価値 A_t を基礎証券とし，負債額 D をストライクプライスとする満期 T のコール・オプションと見なせる．企業のデフォルトは満期時点 T でのみ判定され，もし，満期の資産価値 A_T が D を下回らなければ，その時点で企業を清算したとき，A_T-D のペイオフを株式所有者は受け取ることができるからである．

Black-Scholes モデルと同様に完備市場を仮定する．リスクの市場価格 $\phi=(\mu-r)/\sigma$ からリスク中立確率 P^* を $\frac{dP^*}{dP}\big|_{\mathcal{F}_t}=e^{-\phi t-\frac{1}{2}\phi^2 t^2}$ と定義し，その下で条件付き請求権の評価を行う．式(1)は P^* のもとで BM の B_t^* を用いて

$$\frac{dA_t}{A_t}=rdt+\sigma dB_t^* \tag{2}$$

と表される．Black-Scholes モデルのコール・オプションの計算と同様に，以下のように株式価値の評価を行うことができる．

$$S_t=e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^*[(A_T-D)^+|\mathcal{F}_t]=A_t\Phi_1(d)-e^{-r\tau}\Phi_1(d-\sigma\sqrt{\tau}) \tag{3}$$

ここで，$\tau := T-t$，$\Phi_1(z)$ は1次元標準正規分布の分布関数，d は $d=(\ln\frac{A_t}{D})+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau)/(\sigma\sqrt{\tau})$，$\underline{z}$ は $A_t e^{\sigma\sqrt{\tau}z-\frac{1}{2}\sigma^2\tau}-e^{-r\tau}D\geq 0$ から決まる積分の下限 $z=-\underline{z}$ で $\underline{z}=d-\sigma\sqrt{\tau}$ である．

2.2　カーブした境界に対する初到達時刻

実務上，フラットな境界や指数関数的に減衰するカーブのような単純な境界以外を考えたいことも多々ある．KMV モデルではデフォルト境界として，リスクホライズンにおける一定の組み合わせ「(長期負債)/2＋(短期負債)」を採って，Distance-to-Default (DD) という量を定義し信用リスクを計量化している [2]．これは，短期負債のレベルを資産価値が下回れば，デフォルトは起きるが，長期負債の半分程度まで資産価値が減少しても，実際にはデフォルトは起きていないという米国市場の実際の分析による [3]．但し，KMV モデルでは，負債の満期でしか，デフォルトの判定をしない単純な Merton モデルの枠組みを援用している．長期負債と短期負債の組み合わせで負債のレベルは満期まで一定ではなく，期中でもデフォルトは起きるのが通常の場合であるから，これらの特性をとり込める本稿のデフォルトバリア型の定式化はより現実に近いものといえよう．

それでは，そのようなより一般的なカーブしたデフォルト境界に対してどのような評価方法があり得るのであろうか？　フラットな境界の初到達時刻の確率を求める指導原理は Brown 運動の反射原理 (reflection principle) であったが，カーブした境界ではこれは，使えない！[1)]

では，どうすればよいか．答えは Brown 運動の（強）Markov 性を使う方法である．$(x_t)_{t\geq 0}$ を drift μ，拡散係数 σ の1次元 Markov 過程，$\underline{x}_t$ をそのバリア型デフォルト境界とする．x_t の Markov 性より次の積分方程式が成り立つ．$t\geq s\geq u$，$x_u>\underline{x}_u$ として $f(t,x_t|u,x_u)=\int_u^t g(s)f(t,x_t|s,\overline{x}_s)\,ds$，$(x_t<\underline{x}_t)$．右辺の $g(s)$ は時刻 s でデフォルトする確率密度関数を，$f(\cdot)$ は状態変数 x が時刻 s から時刻 t までフリーに遷移する確率密度関数を表している．バリアへの初到達は $[u,t]$ の任意の時刻で起きるため，その範囲で上記の積の確率密度関数を積分すれば，それが，時刻 u から t までの時間にフリーに状態変数 x_t が推移する確率

密度関数に等しくなる．ここで，条件$x_t < \underline{x}_t$が必要なのは，もしも，その逆の不等式が満たされる領域にすると，余計な項（バリアを一度もヒットしないでゴールに到達するパスに対応した項）が右辺に現れるからである．上式で$u=0$とし，両辺をx_tで$(\infty, \underline{x}_t)$の範囲で積分し，変数$x_t$を消した表現をつくる．

$$\Phi_1\left(\frac{\underline{x}_t - M(t, 0; x_0)}{S(t, 0)}\right) = \int_0^t \Phi_1\left(\frac{\underline{x}_t - M(t, s; \underline{x}_s)}{S(t, s)}\right) g(s)\, ds. \tag{4}$$

ここで，$M(t, s; x) = x + \mu(t-s)$，$S(t, s) = \sigma\sqrt{t-s}$．この積分方程式(4)は，次のように，時間方向に離散化して簡単に解くことができる．nを時間の分割数とすると

$$\Phi_1(a_i) = \sum_{j=1}^{i} \Phi_1(b_{i-j+\frac{1}{2}}) q_j, \qquad i = 1, \cdots n \tag{5}$$

ここで，$a_i := \dfrac{\underline{x}_i - M(t_i, 0; x_0)}{S(t_i, 0)}$，$b_{i-j+\frac{1}{2}} := (\underline{x}_i - M(t_i, t_j - \dfrac{\Delta t}{2}; \underline{x}_j)) / S(t_i, t_j - \dfrac{\Delta t}{2})$，$q_j := \Delta t g(t_j - \dfrac{\Delta t}{2})$．$\Phi_1(b_{i-j+\frac{1}{2}})$ は下三角行列になるため，このq_jに対する連立1次方程式は効率的に解くことができる．この解法では境界$\underline{x}_t$は適当にカーブしていてもよいため，より汎用的手法といえよう．

なお，デフォルト境界の下側で0になる切断確率密度関数は，積分方程式(4)の解 $g(\cdot)$ を用いて

$$f^{tr}(t, x_t|0, x_0) = f(t, x_t|0, x_0) - \int_0^t g(s) f(t, x_t|s, \overline{x}_s)\, ds \tag{6}$$

と表される．この切断確率密度関数(6)を使えば，任意の（滑らかに）カーブした境界に対する確率計算が可能となる．

本節の応用の可能性を少し考えてみよう．まず，最も直接的なものは為替市場などでよく利用されているノックアウト型のオプション契約である．市場ではフラットな境界がよく商品化されているが，本節の方法によりカーブした境界での価格付けも可能である．第2は，信用リスクのモデル化に関する誘導型(reduced-form) アプローチの一つである，格付け機関の発表する信用格付けとその推移行列に基づく方法への応用である．本稿の方法で，公表された遷移確率の情報から，デフォルトの格付けを吸収壁とし，格付け間の閾値や，z-スコアの変動過程を逆解析することが可能と考えられる．第3に，金融商品の評価で，例

えば，住宅ローンの期限前返済リスクをもつモーゲージ証券（MBS）で，市場金利が低下すれば，借り換えの誘因が発生するとみられるため，モーゲージプールの中で，適当な借り換え金利の閾値がモーゲージ債務者の間に存在すると仮定すると，本稿の方法が適用可能である．その方向で，著者によるMBSの研究[10]がなされている．また，株式に関して転換価格近辺で適当にカーブした転換曲線があるとし，その上の価格で転換が促進されるとすれば，転換社債(CB)の価格分析にも応用可能であろう．確率金利の取り扱いも次章以降で説明するため，比較的長期のCBの評価も可能であろう．その他，企業価値，事業リスク評価など，境界条件に関連した初到達時刻の形で定式化できるような場合には，応用可能であろう．

3 確率金利下で期中デフォルトのある企業価値変動モデル

前節の方法を，企業価値だけの1次元から（企業価値＋金利）の2次元に拡張することを本節で考察する．[7]，[4] で示された方法で，確率金利下で企業価値がある所与のレベル（負債額に関係した）をヒットしたらデフォルトする設定で，デフォルト確率，信用スプレッドを計算する手法を紹介する．

3.1 デフォルト境界をもつ条件付き請求権

前節のMertonモデルでは，企業のデフォルトは期末の，すなわち，オプションの満期時点においてのみ起きることを仮定していた．本節では，期末だけでなく，期中に起きるデフォルトも考慮した拡張Mertonモデルを研究する．そのために，期中のデフォルトを定義する．ここでは，それは，Black-Cox (1976) [1] と同様に，企業価値が所与のデフォルト境界 $b(t)$ $(b(T)\leq D$とする）をヒットしたときに起るものと仮定する．デフォルト時刻をτと書くと，$\tau=\inf\{t|A_t\leq b(t)\}$．評価すべき条件付き請求権は確率金利$r_t$で定義されたマネーマーケットアカウント（money-market-account）$B_t:=\exp(\int_0^t r_u du)$ を用いて表すと

$$S_t = \mathrm{E}^*[\frac{B_t}{B_T}(A_T - D)^+ 1_{\{\tau \geqq T\}} | \mathcal{F}_t]. \tag{7}$$

ここで，$(\mathcal{F}_t)_{t \geqq 0}$は確率金利と企業価値で生成される増大情報系（filteration）である．この条件付き請求権の意味は，期中にデフォルトが起きれば，株主の取り分は0，期末までデフォルトが起らなければ，通常の株主の取り分 $(A_T - D)^+$ が貰えるというものである．この条件付き請求権の計算は，フラットな境界の場合はエキゾティック・オプションの一つでバリア型オプションの計算と殆ど同じであるが，カーブした境界の場合は解析解の形で求めることができないため，本稿の積分方程式による解法が有効な計算手段となる．一方，負債の評価は$D_{t,T} = \mathrm{E}^*[\frac{B_t}{B_T} 1_{\{\tau \geqq T\}} \min(D, A_T) + \frac{B_t}{B_\tau} 1_{\{\tau < T\}} A_\tau | \mathcal{F}_t]$ である．$S_t + D_{t,T} = A_t$になることに注意．

3.2 Longstaff-Schwartz（1995）モデルの誤り

期中のデフォルトがある場合の計算は，一般の確率金利モデルでは解析的な導出が難しいため，前節より，更に，特定化する．ここでは，確率金利は 1-ファクターの Hull-White モデルの Ornstein-Uhlenbeck（OU）確率過程を仮定する．構造的アプローチで，このような状態変数が 2 つあり，期中のデフォルトを考慮する定式化は Longstaff-Schwartz（1995）[7] が最初の代表的論文である．

企業価値の対数をとったものを $l_t := \ln A_t$，デフォルト境界の対数を $\underline{l}(t) := \ln b(t)$ と書こう．次の式ではパラメータθはリスク中立確率に対して調整されたものとする．

$$\begin{aligned} dr_t &= (\theta - \chi r_t)\,dt + \sigma_0 dB_0^*(t), \\ dl_t &= (r_t - \delta - \frac{\sigma_1^2}{2})\,dt + \sigma_1(\rho dB_0^*(t) + \sqrt{1-\rho^2}\,dB_1^*(t)). \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，$B_0(t)$，$B_1(t)$ は互いに独立なP^*-標準 Brown 運動である．Longstaff-Schwartz（1995）[7] の論文が正しくない点は，一言で云えば，SDE (8)が不確実性の源泉を 2 つもつ 2 次元 Markov 過程であるにもかかわらず，あたかも

1次元の取り扱いをしてしまっている点にある．

確率金利の設定(8)では，以下のように，正確な2次元 Markov 過程の取り扱いをしなければならない．$\forall l_t < \underline{l}(t)$ に対して

$$f(t, r_t, l_t|0, r_0, l_0) = \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} dr_s g_2(s, r_s, l_s = \underline{l}(s)|0, r_0, l_0) f(t, r_t, l_t|s, r_s, l_s = \underline{l}(s)). \quad (9)^{2)}$$

この式では，企業価値が時刻sでデフォルト境界をヒットしたとき，瞬間的な確率金利r_sを積分して消す処理をしなければならない．Longstaff-Schwartz (1995) ［7］では，この処理がなされておらず，あたかも1次元 Markov 過程のように計算が行われている．

以降の計算の便宜上，次の諸量を定義しよう．$\Psi(t, r_t) := \int_{-\infty}^{\underline{l}(t)} dl_t f(t, r_t, l_t|0, r_0, l_0)$, $\psi(t, r_t|s, r_s) := \int_{-\infty}^{\underline{l}(t)} dl_t f(t, r_t, l_t|s, r_s, l_s = \underline{l}(s))$, $g_2(s, r_s) := g_2(s, r_s, l_s = \underline{l}(s)|0, r_0, l_0)$．式(9)両辺を$l_t$に関して$-\infty$から$\underline{l}(t)$まで積分すると，$\Psi(t, r_t) := \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} dr_s g_2(s, r_s) \psi(t, r_t|s, r_s)$．この積分方程式は未知の関数$g_2(s, r_s)$に関する方程式で，数値的に，時間軸と，状態変数$r_s$を離散化して次のように解くことができる；時間軸は$n_T$等分し，金利軸$r_s$は$n_r$等分するものとする．ここで$t_j = j\Delta t, \Delta t := T/n_T, r_i = \underline{r} + i\Delta r, \Delta r := (\overline{r} - \underline{r})/n_r$．そのとき，

$$\Psi(t_j, r_i) = \sum_{k=1}^{j} \sum_{l=1}^{n_r} \psi(t_j, r_i|t_k, r_l) g_2(t_k, r_l) \Delta t \Delta r \quad (10)$$

この離散連立方程式(10)を解いて得られる$g_2(t_k, r_l)$からP^*のもとでのl_tがデフォルト境界を最初にヒットする確率，即ち，デフォルト確率は$P^*(\tau_l < t; r_0, l_0) = \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{i=1}^{n_r} g_2(t_j, r_j) \Delta t \Delta r$のように求められる．これを$t$で偏微分すれば，デフォルト時刻の確率密度関数$f(t) \approx \sum_{i=1}^{n_r} g_2(t_j, r_i) \Delta r$が得られる．

上のΨとψを計算するためには，Bayesの規則を適用して，r_tに条件付けられた2変量確率密度関数$f(t, r_t, l_t|s, r_s, l_s) = f(t, l_t|s, r_t, r_s, l_s) f(t, r_t|s, r_s, l_s)$，($\forall s \in [0, T], s < t$) を計算する．そして，

$$\Psi(t, r_t) = f(t, r_t|0, r_0, l_0) \int_{-\infty}^{\underline{l}(t)} dl_t f(t, l_t|0, r_t, r_0, l_0),$$

$$\psi(t, r_t|s, r_s) = f(t, r_t|s, r_s, l_s = \underline{l}(s)) \int_{-\infty}^{\underline{l}(t)} dl_t f(t, l_t|s, r_t, r_s, l_s = \underline{l}(s)). \quad (11)$$

2次元 Markov 過程 (r, l) において，r_tに条件付けられたl_tの平均，分散は$s < t$として，

$$\mu(l, r_t|s, r_s, l_s) := \mathrm{E}_s^*[l_t|r_t] = \mathrm{E}_s^*[l_t] + \frac{Cov_s^*(r_t, l_t)}{Var_s^*(r_t)}(r_t - \mathrm{E}_s^*[r_t]),$$
$$\Sigma^2(l, r_t|s, r_s, l_s) := Var_s^*[l_t|r_t] = Var_s^*[l_t] + \frac{Cov_s^*(r_t, l_t)}{Var_s^*(r_t)} \tag{12}$$

のように表現される．これらを使って，最終的に，積分方程式(10)に現れる Ψ，ϕ の単純な表現

$$\Psi(t, r_t) = f(t, r_t|0, r_0, l_0)\Phi_1\left(\frac{\underline{l}(l) - \mu(r_t|r_0, l_0)}{\Sigma(r_t|r_0, l_0)}\right),$$
$$\phi(t, r_t|s, r_s) = f(t, r_t|s, r_s, l_s = \underline{l}(s))\Phi_1\left(\frac{\underline{l}(t) - \mu(r_t|r_s, l_s = \underline{l}(s))}{\Sigma(r_t|r_s, l_s = \underline{l}(s))}\right) \tag{13}$$

を得る．ここで $f(t, r_t|s, r_s)$ は瞬間金利（1次元 Markov 過程）$(r_t)_{t\geqq 0}$ の遷移確率密度関数である．

ところで，今，評価しようとしている条件付き請求権は式(7)のように期待値の中にデフォルトの指示関数の他に企業価値や割引債券価格が入ったやや複雑な形をしているため，以下で説明するような価値尺度財（numĕrairc）の変更に伴う確率測度の変換を行う．

まず，式(7)の第1項の評価に関して，通常のマネーマーケットアカウントから企業価値 A_t への価値尺度財の変更を考えてみよう．$\sigma_A := (\sigma_1\rho,\ \sigma_1\sqrt{1-\rho^2})$ として，対応する新しい確率測度 P^A を，Radon-Nikodȳm 密度関数より，次のように定義する．$dP^A/dP^*|_{\mathcal{F}_t} = A_t/(A_0 B_t) = \varepsilon(\int_0^{\cdot}\phi^A dB^*)_t =: Z_t^A$，$\phi_k^A := \sigma_{Ak}$，$(k=1,2)$ $P^A(\Lambda) E^A[1_\Lambda] = E^*[Z_t^A 1_\Lambda]$，$\Lambda \in \mathcal{F}_t$．このとき，新たに定義した $B_k^A(t) = B_k^*(t) - \int_0^t \phi_k^A(t)\,dt$，$(k=1,2)$ は $(P^A, \mathbf{F})$-BM となる．そして，SDE (8)は

$$dr_t = (\theta + \rho\sigma_0\sigma_1 - \kappa r_t)\,dt + \sigma_0 dB_0^A(t),$$
$$dl^t = \left(r_t - \delta + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)dt + \sigma_1(\rho dB_0^A(t) + \sqrt{1-\rho^2}\,dB_1^A(t)). \tag{14}$$

これらの SDE(14)の解は，$\Phi(t) := e^{-\kappa t}$ とすると，

$$r(s)=r(t)\Phi(s-t)+\int_t^s(\theta(u)+\rho\sigma_0\sigma_1)\Phi(s-u)\,du+\sigma_0\int_t^s\Phi(s-u)\,dB_0(u),$$
$$s>t$$
$$l(s)=l(t)+r(t)V_\kappa(s-t)+\Theta(t,\ s)-d(t,\ s)$$
$$+\left\{\int_t^s(\sigma_0V_\kappa(s-u)+\sigma_1\rho)\,dB_0(u)+\sigma_1\sqrt{1-\rho_2}\int_t^s dB_1(u)\right\}. \quad (15)$$

これから，デフォルトのない割引債価格は

$$P(t,\ T)=\mathrm{E}^*[e^{-\int_t^T r(u)du}|\mathcal{F}_t]=:e^{-V_\kappa(T-t)r(t)-\Theta(t,T)+\frac{1}{2}\sigma_0^2(T-t)}, \quad (16)$$

となる．ここで，$V_\kappa(T-t):=\int_t^T ds\,\Phi(s-t)=(1-e^{-\kappa(T-t)})/\kappa$，$\Phi(t,T):=\int_t^T du\,\theta V_\kappa(T-u)=\int_t^T\theta(1-e^{-\kappa(T-u)})/\kappa du$，$\sigma_0^2(T-t):=\sigma_0^2\int_t^T V_\kappa^2(T-u)\,du$，$d(t,s):=\left(\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(s-t)$．解(15)から

$$\begin{pmatrix}\mathrm{E}^A[r(s)|\mathcal{F}_t]\\ \mathrm{E}^A[l(s)|\mathcal{F}_t]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(t)\Phi(s-t)+\int_t^s(\theta+\rho\sigma_0\sigma_1)\Phi(s-u)\,du\\ l(t)+r(t)V_\kappa(s-t)+\Theta(t,s)-d(t,s)\end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$Cov_t^A(r(s),l(s))$$
$$=\begin{pmatrix}\sigma_0^2\int_t^s\Phi^2(s-u)\,du & \sigma_0\int_t^s\Phi(s-u)(\sigma_0V_\kappa(s-u)+\sigma_1\rho)\,du\\ \sigma_0\int_t^s\Phi(s-u)(\sigma_0V_\kappa(s-u)+\sigma_1\rho)\,du & \int_t^s(\sigma_0^2V_\kappa^2(s-u)+2\sigma_0\sigma_1\rho V_\kappa(s-u)+\sigma_1^2)\,du\end{pmatrix} \quad (18)$$

次に，式(7)の第2項の評価に関して，価値尺度財を通常のマネーマーケットアカウントから満期$s(>t)$の割引き債価格$P(t,s)$に変える変更に対応した，所謂，Q_s-先渡し確率測度を次に定義しよう．このとき，SDE(8)は

$$dr_t=(\theta-\sigma_0^2V_\kappa(s-t)-\kappa r_t)\,dt+\sigma_0dB_0^{Qs}(t),$$
$$dl_t=\left(r_t-\delta-\frac{\sigma_1^2}{2}-\sigma_0\sigma_1\rho V_\kappa(s-t)\right)dt+\sigma_1(\rho dB_0^{Qs}(t)+\sqrt{1-\rho^2}dB_1^{Qs}(t)). \quad (19)$$

Girsanovの定理より，Q_sはRadon-Nikodým密度関数$dQ_s/dP^*|_{\mathcal{F}_t}=\mathcal{E}(-\int_0^\cdot\phi^s dB^*)_t=:Z_t^s$，$\phi^s(t):=(\sigma_0V_\kappa(s-t),\ 0)$で定義され，$Q_s(\Lambda)=\mathrm{E}Q_s[1_\Lambda]=\mathrm{E}^*[Z_t^s1_\Lambda]$，$\Lambda\in F_t$となる．そして，新しい確率過程$(B_k^{Qs}(t))_{t\geq0}$のもとで$B_k^s(t)=B_k^*(t)+\int_0^t\phi_k^s(u)\,du$，$(k=1,\ 2)$は$(Q_s,\ \mathrm{F})$-Brown運動となる．このとき，SDE(19)の解は次のように求められる．

図1　2つのカーブしたデフォルト境界

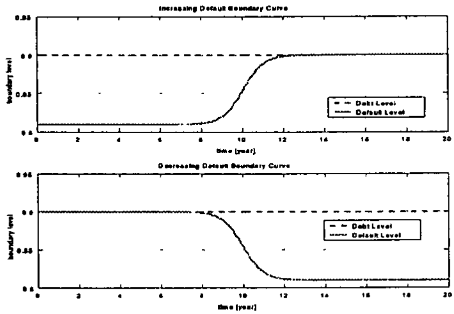
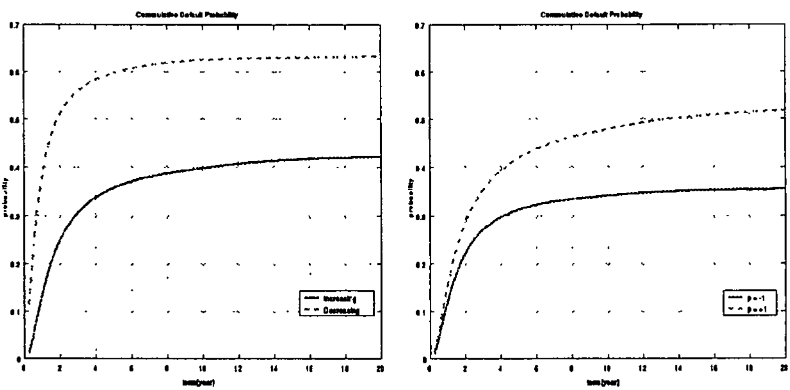


図2　左図(a)は漸増型，漸減型のカーブしたデフォルト境界に対する累積デフォルト確率．右図(b)は漸増型のカーブしたデフォルト境界に対して$\rho=-1, +1$の 2 つの場合で計算された累積デフォルト確率．ここで，何れの図もT-先渡し確率測度のもとで計算されている．



$$r(s)=r(t)\Phi(s-t)+\int_t^s(\theta(u)-\sigma_0^2V_\kappa(u-t))\Phi(s-u)\,du$$
$$+\sigma_0\int_t^s\Phi(s-u)\,dB_0(u),\quad s>t$$
$$l(s)=l(t)+r(t)\,V_\kappa(s-t)+\hat{\Theta}(t,s)-d_Q(t,s)$$
$$+\left\{\int_t^s(\sigma_0V_\kappa(s-u)+\sigma_1\rho)\,dB_0(u)+\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\int_t^s dB_1(u)\right\}. \tag{20}$$

ここで$d_Q(t,s):=(\delta-\frac{\sigma_1^2}{2})(s-t)$，$\hat{\Phi}(t,s):=\int_t^s(\theta(u)+\sigma_0\sigma_1\rho)\,V_\kappa(s-u)\,du$．

解(20)から

$$\begin{pmatrix}\mathrm{E}^{Q_S}[r(s)|\mathcal{F}_t]\\ \mathrm{E}^{Q_S}[l(s)|\mathcal{F}_t]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(t)\Phi(s-t)+\int_t^s(\theta(u)-\sigma_0^2V_\kappa(u-t))\Phi(s-u)\,du\\ l(t)+r(t)\,V_\kappa(s-t)+\hat{\Phi}(t,\ s)-d_Q(t,s)\end{pmatrix},$$

$Cov_t^{Q_S}(r(s),l(s))$は式(18)と同じである．

以上より，積分領域を$R_A:=\{A_T>D\}$として，前述の条件付き請求権(7)の評価に移ろう．

$$E^*\left[\frac{A_T}{B_T}1_{\{\tau>T,A_T>D\}}\right]=A_0\mathrm{E}^A[1_{\{\tau>T,l_T>\ln D\}}]$$
$$=A_0\Phi_1\left(\frac{\mathrm{E}^A[l_T|l_0]-\ln D}{\sqrt{Var^A(l_T|l_0)}}\right)$$
$$-A_0\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}g_A(s|r_s,\underline{l}_s)\,dr_s\Phi_1\left(\frac{\mathrm{E}^A[l_T|\underline{l}_s,\ \mathcal{F}_s]-\ln D}{\sqrt{Var^A(l_T|\underline{l}_s,\ \mathcal{F}_s)}}\right)ds=:A_0I_A, \tag{21}$$

$$\mathrm{E}^*\left[\frac{P(T,T)}{B_T}1_{\{\tau>T,A_T>D\}}\right]=P(0,\ T)\,\mathrm{E}^{Q_T}[1_{\{\tau>T,l_T>\ln D\}}]$$
$$=P(0,\ T)\left[\Phi_1\left(\frac{E^{Q_T}[l_T|l_0]-\ln D}{\sqrt{Var^{Q_T}(l_T|l_0)}}\right)\right.$$
$$\left.-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}g_{Q_T}(s|r_s,\underline{l}_s)\,dr_s\Phi_1\left(\frac{\mathrm{E}^{Q_T}[l_T|\underline{l}_s,\ \mathcal{F}_s]-\ln D}{\sqrt{Var^{Q_T}(l_T|\underline{l}_s,\ \mathcal{F}_s)}}\right)ds\right]=:P(0,\ T)\,I_D. \tag{22}$$

株式価値は式(21)，(22)から$S(0)=A_0I_A-DP(0,\ T)\,I_D$，負債価値は$D_{0,T}=A_0-S(0)$となる．$g_A(\cdot)$，$g_{Q_T}(\cdot)$は，それぞれ対応する確率測度のもとで表現した$\Psi$，$\Psi$を代入した積分方程式(10)を解いて得られる．式(21)，(22)のI_A，I_Dの計算では，この解$g(\cdot)$を用いて，$l_t>\underline{l}(t)$に対して，デフォルト境界$\{\underline{l}(s)\}_{0\leq s\leq t}$以下で0となる切断確率密度関数が使われた．上式の右辺第2項はデフォルト境界に吸収

される確率に対応している．

本節の最後に数値計算例を示す．まず，$\underline{l}(t)=\underline{l}_0\pm\Delta l/(1+e^{-\lambda(t-t_{th})})$ のような試験的なカーブしたデフォルト境界（図1）を考えてみよう．このような分析は，従来の企業価値のみに不確実性を入れ，しかも Brown 運動の反射原理がうまく使える一定かつフラットなデフォルト境界をもつモデルでは不可能であったものであり，現実の企業の資金調達で想定される，徐々に短期負債を増やす，または減らすときに対応した漸増型，漸減型のカーブしたデフォルト境界を念頭においている．それらが株式価値や負債価値にどのように影響するかを以下でみることにしよう．漸増するカーブしたデフォルト境界の場合は，初期の段階でデフォルト境界が低いレベルであるため，ヒットする確率は小さいが満期が近づくにつれて，デフォルト境界のレベルが上昇し，ヒットする確率は高くなる．一方，漸減するするカーブした デフォルト境界の場合には，初期段階で既にデフォルト境界が高いレベルにあり，デフォルトは高い確率で起ってしまう．この結果，漸増型デフォルト境界より，累積デフォルト確率は高めになる．図2(a)はそれを示している．数値例は20年まで80分割し，rは適当な上下限を100等分した．各パラメータは以下の通り．$\rho=-0.25$，$A_0=1$，$\kappa=1$，$\theta=0.06$，$\sigma_0=\sqrt{0.001}$，$\sigma_1=0.2$，$r_0=0.04$，$\delta=0$，$D=0.9$，$\underline{l}=\ln(0.9D)$，$T=20$，$\Delta l=|\ln(D)-\underline{l}|$，$\lambda=2$，$t_{th}=T/2$．漸増型デフォルト境界では20年めの累積デフォルト確率は0.4221，期中のデフォルトを考慮した株式価値は0.3929，期中のデフォルトを考慮しないプレーンな Merton モデルでの株式価値は0.6692，期中のデフォルトを考慮した負債価値は0.6071．一方，漸減型デフォルト境界では20年めの累積デフォルト確率は0.6321，期中のデフォルトを考慮した株式価値は0.2501，期中のデフォルトを考慮しないプレーンな Merton モデルでの株式価値は，満期までのカーブした境界の形状には全く影響を受けないため同じ値0.6692，期中のデフォルトを考慮した負債価値は0.74986となった．

次に，確率金利の設定で初めて分析が可能な企業の資産と金利の相関ρの影響を見てみよう．ρを-1から$+1$へ増やすと，累積デフォルト確率は増大する．

従って，負債価値は増大し，株式価値は減少する．これは資産と金利の共分散が全分散へ正の寄与を持つことによる．そのため，デフォルト境界へのヒットの確率は上昇する．同じ格付けに属する様々な企業群で資産と金利の相関がばらつくため，債券利回りのスプレッドのばらつきは大きくなる．これは実証研究でも検証されている［7］．$\rho=-1$のとき20年めの累積デフォルト確率は0.5177，期中のデフォルトを考慮した株式価値は．3868，Mertonモデルの株式価値は0.6708，期中のデフォルトを考慮した負債価値は0.6132；$\rho=1$のとき，20年めの累積デフォルト確率は0.5177，期中のデフォルトを考慮した株式価値0.38684，Mertonモデルの株式価値は0.6708，期中のデフォルトを考慮した負債価値は0.61316．図2(b)はそれぞれの累積デフォルト確率を表している．$\rho=-1$の方が$\rho=1$に比べてデフォルトリスクは高くなることが見て取れる．

4　結論

本稿では，期中でも企業が倒産する確率事象をバリア型デフォルト境界の形で取り込み，かつ，そのデフォルト境界を企業の様々な資金調達の結果生じる負債の期間構造を許容するカーブ型に拡張し，長期負債の評価にも耐えられるように金利変動リスクも考慮した信用リスクの構造的アプローチによる計量化モデルを研究した．

企業価値と確率金利の2つの不確実性は，2次元Markov過程で記述するのが，最も簡単で直接的な定式化である．その方向で，よく引用される代表的文献は，確率金利下での信用リスクの構造的アプローチに関するLongstaff-Schwartz (1995)［7］であるが，彼らの論文には，誤りがあることが指摘されている［4］．本稿では，Longstaff-Schwartzモデルの誤りの解説と，［4］で提案された改良法を用いて，Black-Cox［1］において確定金利，フラットなデフォルトバリアの設定のもとで展開された株式価値，負債価値の評価問題を確率金利，カーブした デフォルト境界に拡張して再考した．そして，［4］で考察されなかったカーブしたデフォルト境界の生存・デフォルト確率への影響を分析し，その他の応用の可能性について言及した．

最後に，本稿で提案した幾つかの計算結果は，当該企業の財務データや社債の市場価格データがあれば，それらを用いて実証が可能である．それらの実証研究は今後の課題としたい．

* 表題英訳名「Extended Merton Model」．著者（Nobuhiro Nakamura）問い合わせは以下へ；Email: nnakamura@ics.hit-u.ac.jp, tel: 03-4212-3106（dial-in）, fax: 03-4212-3020（金融共同研究室）

1） 初到達時刻の確率密度関数の満たす Chapman-Kolmogorov の前向き偏微分方程式（PDE）を吸収壁の境界条件のもとで解く方法も考えられるが，後述する確率金利の設定では状態変数 2 つの PDE を解かなければならず，更に，状態変数が増える場合には，対処できないであろう．

2） $\forall l_t \geq \underline{l}(t)$ に対しては，$S(r_t, l_t)$ を生存確率とすると，（つまり，l_tがその境界に時刻tまでにまだ，到達していないという確率） 式(9)は次のように修正される．

$$l(t, r_t, l_t|0, r_0, l_0) =$$
$$\int_0^{\tau} ds \int_{-\infty}^{\infty} dr_s g_2(s, r_s, l_s = \underline{l}(s)|0, r_0, l_0) f(t, r_t, l_t|s, r_s, l_s = \underline{l}(s)) + S(r_t, l_t).$$

参考文献

[1] Black, F. and J. Cox, "Valuing corporate securities: Some effects on bond indenture provisions", *Journal of Finance,* 31 (1976), 351-367

[2] Crosbie, P., "Modeling Default Risk", KMV Technical paper, 1997.

[3] Crouhy, M., Galai, D. and R Mark, "A comparative analysis of current credit risk models", *Journal of Finance,* 31 (1976), 351-367. *Journal of Banking and Finance.* 24 (2000) 59-117.

[4] Collin-Dufresne, P. and R. S. Glodstein, "Do Credit Spread Reflect Stationary Leverage Ratios?", Fisher College of Business, Ohio State University, working paper, 2000.

[5] Duffie, D. and K. J. Singleton, "Modelling Term Structures of Defaultable Bonds", *Review of Financial Studies,* 12 (1999), 687-720.

[6] Jarrow, R. and S. Turnbull, "Pricing options on financial securities subject to default risk", *Journal of Finance,* 50 (1995), 53-86.

[7] Longstaff, F. and E. Schwartz, "A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt", *Journal of Finance,* 50 (1995), 789-819.

[8] JP Morgan, CreditMetrics, Technical document, 1997.

[9] Merton, R., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance,* 29 (1974), 449-470.

[10] Nakamura, N., "Valuation of Mortgage-Backed Securities Based upon a Structural Approach", working paper 2001.

[11] Vasicek, O., "Credit Valuation", KMV technical document, 1984.

（一橋大学大学院国際企業戦略研究科助教授）