確率金利モデルにおけるアベレージオプションの価格理論

藤　田　岳　彦

1　はじめに

アベレージオプション（アジア型オプションともいう）は，原資産価格の平均値にペイオフが依存するオプションである．平均をとることが，ボラティリティを減少させるのでこのオプション価格はかなり低くなっている．また，市場の平均的なパフォーマンスを目安にとる機関投資家にとって，このようなオプションは非常に魅力的なものであろう．さらに，取引高が小さい商品のリスクヘッジには，このようなオプションはかかせないものになっている．以上のような理由でアベレージオプションはエキゾティックオプションのなかでも最も重要な位置にあると思われる．

金利が一定，ボラティリティが一定のモデル（Black-Sholes モデル）では，アベレージオプションの解析はある程度行われているようであるが，実際上でも重要である金利が確率的に変動する場合については，まだ研究されていないようである．そこで，本論文の主目的は，Black-Sholes モデルの自然な拡張である確率金利モデル（Rabinovitch モデル）において，アベレージオプションの理論価格を計算することである．結果は少し複雑そうにみえるのだが，2 次元正規分布を用いて表されているので比較的簡単に計算ができて実務上にも役に立つと思われる．

2　確率金利モデル

$r(t)$ を金利，$S(t)$ を株価として，次のモデル（Rabinovitch Model）を

とる.

また，これは，最初からリスク中立確率のモデルとして考えることとする.

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma S(t)dw_1(t)$$
$$dr(t) = a(r(t) - b)dt + cdw_2(t)$$

ここで $w_1(t)$ と $w_2(t)$ はそれぞれ，標準ブラウン運動で，互いに相関があり，

$$dw_1(t)dw_2(t) = \rho dt$$

と仮定する.

これは，Rabinovitch モデル（[3]）と呼ばれているもので Black Sholes モデルに金利過程が Ornstein-Uhlenbeck 過程であるという仮定を付け加えた自然なものである. これを具体的に解くことにより，

$$r(t) = b + (r-b)e^{at} + c\int_0^t e^{a(t-s)}dw_2(s) \quad (r(0) = r)$$

$$\log S(t) = \log S - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma w_1(t) + \int_0^t r(s)\,ds \quad (S(0) = S)$$

がわかる. これを用いて，Rabinovitch（[3]）は T を満期とするゼロクーポン債の価格 $P(T)$ を

$$\begin{aligned} P(T) &= E(e^{-\int_0^T r(s)ds}) \\ &= e^{A(T) - B(T)r} \end{aligned}$$

$$B(T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-aT})$$

$$A(T) = \left(b - \frac{c^2}{2a^2}\right)(B(T) - T) - \frac{1}{a}\left(\frac{c}{2}B(T)\right)^2$$

と求めている.

また，T を満期，K を権利行使価格とする株式コールオプションの価格 $C(T, S, r)$ は，

$$\begin{aligned} C(T, S, r) &= E(\max\,(S(T) - K, 0)e^{-\int_0^T r(s)ds}) \\ &= SN(h_1(T)) - KP(T)N(h_2(T)) \end{aligned}$$

ここで，$N(\nu)$ は，標準正規分布の分布関数つまり，

$$N(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\nu} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$h_1(T) = \frac{\log\frac{S}{KP(T)}+\frac{1}{2}q(T)}{\sqrt{q(T)}}$$

また，

$$h_2(T) = h_1(T)-\sqrt{q(T)}$$

$$q(T) = \sigma^2 T+\frac{2\rho\sigma c}{a}(T-B(T))+\frac{c^2}{a^2}\left(T-2B(T)+\frac{1-e^{-2aT}}{2a}\right)$$

と求められている．

3 アベレージオプションの価格

区間 $[0, T]$ での株価の幾何平均を $M(T)$ つまり，

$$M(T) = e^{\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt}$$ とする．

安全利子率 r が一定の Black Sholes モデル $(dS(t)=rS(t)dt+\sigma S(t)dw(t))$ では，アベレージオプションの価格 $AC(T)$ は，

$$AC(T) = e^{-rT}E(\max(M(T)-K,0))$$

$$= Se^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)T}N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\left(\log\frac{S}{K}+\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}$$

ここで，

$$d_2 = d_1-\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}$$

のように求められている．（[2] 参照）

本論文の主目的は，2 で述べた確率金利モデル（Rabinovitch Model）において，アベレージオプションの価格 $AC(T)$ を求めることである．

まず，準備として，

$$X = \frac{1}{T}\int_0^T \log S(T)dt$$

$$Y = \int_0^T r(s)\,ds$$

の平均，分散，共分散等を求める．それらが，求められれば，$\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)\,dt,\ \int_0^T r(t)\,dt\right)$ の分布は，2 次元正規分布となるので密度関数が具体的にわかり，$AC(T)$ が計算できる．

$$\log S(t) = \log S - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma w_1(t) + \int_0^t r(s)\,ds$$

$$= \log S + \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + (r-b)\frac{e^{at}-1}{a}$$

$$+\sigma w_1(t) + \int_0^t \frac{e^{a(t-u)}-1}{a}dw_2(u)$$

$$X = \log S + \frac{T}{2}\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{(r-b)}{T}\frac{e^{aT}-aT-1}{a} + \frac{\sigma}{T}\int_0^T w_1(s)\,ds$$

$$+\frac{c}{T}\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}dw_2(u)$$

と確率積分の平均＝0 より，

$$E(X) = \log S + \frac{T}{2}\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{r-b}{T}\frac{e^{aT}-aT-1}{a^2}\ (:=\mu_1)$$

また，

$$Y = \int_0^T r(s)\,ds = bT + (r-b)\frac{e^{aT}-1}{a} + c\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-1}{a}dw_2(u)$$

より，

$$E(Y) = bT + (r-b)\frac{e^{aT}-1}{a}\ (:=\mu_2)$$

$$\frac{\sigma}{T}\int_0^T w_1(s)\,ds := X_1$$

$$\frac{c}{T}\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}dw_2(u) := X_2$$

とおくと，

$$V(X) = V(X_1+X_2) = V(X_1)+V(X_2)+2COV(X_1, X_2)$$

$$V(X_1) = E(X_1^2)-(E(X_1))^2$$

となり，

$$= \frac{\sigma^2}{T^2}\int_0^T ds\int_0^T s \wedge udu$$

$$= \frac{\sigma^2}{3}T$$

$$V(X_2) = \left(\frac{c}{T}\right)^2\int_0^T\left(\frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}\right)^2 du$$

$$= \frac{c^2}{a^4T^4}\left(\frac{e^{2aT}-1}{2a}+\frac{a^2}{3}T^3+T-aT^2-2Te^{aT}\right)$$

また，

$$w_2(u) = \rho w_1(u)+\sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{w}_1(u)$$

ここで，$w_1(u)$ と $\tilde{w}_1(u)$ は，独立な標準ブラウン運動.

故に，

$$X_2 = \rho\frac{c}{T}\int_0^T\frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}dw_1(u)$$

$$+\sqrt{1-\rho^2}\,\frac{c}{T}\int_0^T\frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}d\tilde{w}_1(u)$$

また，確率積分の部分積分より，

$$X_1 = \frac{\sigma}{T}\left(Tw_1(T)-\int_0^T sdw_1(s)\right)$$

よって，

$$COV(X_1, X_2) = E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$$

$$= E(X_1X_2)$$

$$= \frac{c\rho\sigma}{T^2}E\left(-\int_0^T\frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}dw_1(u)\int_0^T sdw_1(s)\right.$$

$$\left.+\int_0^T\frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}dw_1(u)Tw_1(T)\right)$$

$$= \frac{c\rho\sigma}{T^2}\Big(-\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}udu$$

$$+T\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}du\Big)$$

$$= \frac{c\rho\sigma}{T^2}\Big(-\frac{e^{aT}-1}{a^4}+\frac{Te^{aT}}{a^3}-\frac{T^3}{3a}-\frac{T^2}{2a^2}\Big)$$

$$V(X) = V(X_1)+V(X_2)+2COV(X_1, X_2)$$

以上より，

$$= \frac{\sigma^2}{3}T+\frac{c^2}{a^4T^4}\Big(\frac{e^{2aT}-1}{2a}+\frac{a^2}{3}T^3+T-aT^2-2Te^{aT}\Big)$$

$$+\frac{c\rho\sigma}{T^2}\Big(-\frac{e^{aT}-1}{a^4}+\frac{Te^{aT}}{a^3}-\frac{T^3}{3a}-\frac{T^2}{2a^2}\Big)\,(:=\sigma_1^2)$$

$$V(Y) = c^2\int_0^T\Big(\frac{e^{au}-1}{a}\Big)^2du$$

$$= \frac{c^2}{a^2}\Big(\frac{e^{2aT}-1}{2a}-2\frac{e^{aT}-1}{a}+T\Big)\,(:=\sigma_2^2)$$

$$COV(X, Y) = E\Big(\Big(\frac{\sigma}{T}\int_0^T w_1(s)\,ds+\frac{c}{T}\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-a(t-u)-1}{a^2}dw_2(u)\Big)$$

$$\Big(c\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-1}{a}dw_2(u)\Big)\Big)$$

ここで，

$$E\Big(\frac{\sigma}{T}\int_0^T w_1(s)\,ds\Big(c\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-1}{a}dw_2(u)\Big)\Big)$$

$$= E\Big(\frac{\sigma}{T}\int_0^T w_1(s)\,ds\Big(\rho c\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-1}{a}dw_1(u)\Big)\Big)$$

$$= \frac{c\rho\sigma}{T}E\Big(\Big(Tw_1(T)-\int_0^T sdw_1(s)\Big)\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-1}{a}dw_1(u)\Big)$$

$$= \frac{c\rho\sigma}{T}\Big(\frac{Te^{aT}}{a^2}-\frac{e^{aT}-1}{a^3}-\frac{T^2}{2a}\Big)$$

$$E\Big(\Big(\frac{c}{T}\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-a(T-u)-1}{a^2}dw_2(u)\Big)\Big(c\int_0^T \frac{e^{a(T-u)}-1}{a}dw_2(u)\Big)\Big)$$

$$= \frac{c^2}{Ta^3}\left(\frac{e^{2aT}-1}{2a} - Te^{aT} - \frac{e^{aT}-1}{a} + \frac{aT^2}{2} + T\right)$$

よって,

$$COV(X,Y) = \frac{c\rho\sigma}{T}\left(\frac{Te^{aT}}{a^2} - \frac{e^{aT}-1}{a^3} - \frac{T^2}{2a}\right)$$

$$+\frac{c^2}{Ta^3}\left(\frac{e^{2aT}-1}{2a} - Te^{aT} - \frac{e^{aT}-1}{a} + \frac{aT^2}{2} + T\right)(:=\tilde{\rho}\sigma_1\sigma_2)$$

以上より，アベレージオプションの価格 $AC(T)$ は

$$\boxed{\begin{aligned}
AC(T) &= E(\max\,(M(T)-K,0)\,e^{-\int_0^T r(s)ds})\\
&= E(\max\,(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt}-K,0)\,e^{-\int_0^T r(s)ds})\\
&= E\left(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt}e^{-\int_0^T r(s)ds}1_{\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt \geqq K\right)}\right)\\
&\quad -KE\left(e^{-\int_0^T r(s)ds}1_{\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt \geqq K\right)}\right)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}dy\int_K^{+\infty} e^x \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\tilde{\rho}^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2\tilde{\rho}\frac{x}{\sigma_1}\frac{y}{\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}dx\\
&\quad -K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}dy\int_K^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\tilde{\rho}^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}-2\tilde{\rho}\frac{x}{\sigma_1}\frac{y}{\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}dx
\end{aligned}}$$

注意 1　ペイオフが平均価格と満期での価格の差である場合も同様にして計算できる.

注意 2　上の結果を簡単な変数変換により，2 次元標準正規分布の分布関数

$$\Phi_2(x,y,\rho) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{u^2-2\rho u\nu+\nu^2}{2(1-\rho^2)}}du d\nu$$

を用いてあらわすこともできる.

注意 3　平均を相加平均にとると，Black-Sholes モデルの場合でさえも非常に複雑になることが，わかっているので（[1] 参照）確率金利モデルでは，closed formula を求めるのは無理なようである.

参考文献

[1] Geman, H. and Yor, M. (1993) Beesel processes, Asian options and perpetuities. *Mathematical Finance*, 3, 349-375.

[2] Kemma, A. G. Z. and Vorst, A. C. F. (1990) A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking and Finance*, 14, 113-129.

[3] Rabinovitch, R. (1989) Pricing stock and bond options when the default free rate is stochastic. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 447-457.

（一橋大学教授）