限定合理的な投資家と為替レートの変動

——定常サンスポット均衡によるアプローチ——

熊　本　方　雄

1　はじめに

変動相場制移行以来，為替レートは他の経済変数ではみられないほどの変動を示しているが，これらの変動をファンダメンタルズ要因のみで説明することは困難である．実際，為替レートは，ファンダメンタルズとは無関係な要因に反応し，変動することが知られている．例えば，「一国の経常収支黒字はその国の通貨の増価をもたらす」という説は，経済学的には根拠のないものであるが[1]，多数の市場参加者がこの説を信じるならば，自己実現的となり，実際に経常収支が黒字の国の通貨は増価するのである．

更に，為替レート以外の資産価格や物価なども，ファンダメンタルズとは無関係な要因によって変動し得ることが知られている．これに対し，近年，これらの現象をサンスポット均衡の発生として定式化する分析がなされてきている．サンスポットとは経済ファンダメンタルズに対して非本質的な確率的要因のことで，そのサンスポット変数の状態に応じて，経済変数の値が異なってくる均衡をサンスポット均衡と呼ぶのである．Azariadis (1981), Azariadis and Guesnerie (1986) は Overlapping-Generations-Model を用いて，危険回避度が十分に大きいときには，労働供給量，即ち生産量におけるサンスポット均衡が存在し，景気循環が生じる可能性があることを示した．同様に Fukuda (1993)，福田 (1995) は Overlapping-Generations-Model を用いて，実質貨幣残高におけるサンスポット均衡が存在することを示した．ここでは，各個人の将来所得に不確実性を導入し，価値貯蔵手段としての貨

幣の保有動機のほかに，予備的動機による貨幣保有も考慮することによって，相対的に低い危険回避度でもサンスポット均衡が存在し得ることが示された．本稿では，まず，以上の分析を Money-in-the-Utility-Model に基づいた為替レート決定式に応用し，ファンダメンタルズとは無関係な要因による為替レートの変動をサンスポット均衡として定式化する．ここでは，投資家が危険回避的でありさえすれば，サンスポット均衡が発生し得ることを示される．このように，更に低い危険回避度でもサンスポット均衡が存在し得るのは，サンスポットの発生という不確実性に対して，事前に貨幣を保有していない Brock（1974, 1975）型の予算制約式を用いたためである．

しかしながら，市場が合理的な参加者[2)]のみから構成されているならば，為替レートなどの経済変数は，ファンダメンタルズによって一意的に決定され，サンスポットなどの要因が為替レートに影響を与える余地はなくなってくるはずである．先行研究においても，サンスポット均衡は，「サンスポット変数であっても経済変数に影響を与えると市場参加者が確信しているという理由にのみにより実現される」といった説明がなされるだけで，なぜ，市場参加者がサンスポット変数が影響を与えると確信するようになるのかについての説明はなされていない．このため，市場参加者の強い合理性とサンスポット均衡は両立し得ないという批判は残り続ける．

よって，本稿では，サンスポット均衡が達成される過程もあわせて考察する．即ち，合理的な市場参加者の代わりに，経済構造（本稿の場合には，為替レートを決定する要因）を十分に認知できない限定合理的な（bounded rational）市場参加者を仮定し，Evans（1985）が Azariadis and Guesnerie（1986）のモデルにおけるサンスポット均衡の収束の分析に用いた期待安定性（expectational stability）の概念を用いて，サンスポット均衡が限定合理的な投資家の学習課程の極限として達成されることを示す．

このような学習課程の分析は経済学的にも意味がある．なぜならば，従来の合理的期待形成に基づいた分析は，経済主体が相互に整合的な信念に基づいて個々の決定を行っているときに達成される集約的な結果を考察するもの

で，均衡が達成されていないときに，経済主体がどう行動し，どのように合理的期待に到達していくのかという問題を考察するものではなかったのに対し，本稿は経済構造を十分に認知できない経済主体の学習課程とその帰結を考察するからである．

本稿の構成は以下の通りである．2節では，Brock (1974, 1975) 型の Money-in-the-Utility-Model に基づいた為替レート決定式を導出し，その為替レート決定式において，定常サンスポット均衡の発生する条件を考察する．そして，3節で定常サンスポット均衡への収束問題を考察する．

2　モデル

サンスポット理論の先行研究に関しては，1節でふれたように Overlapping-Generations-Model に基づいた Azariadis (1981) Azariadis and Guesnerie (1986) Fukuda (1993) などがあるが，これらのモデルでは，2期間が人の人生に等しいとされるほどの長期的なものであり，短期的な為替レートの変動の分析には適していない．

よって，本節では Brock (1974, 1975) の Money-in-the-Utility-Model を開放経済に拡張し，為替レートの決定式を導出する．そして，その為替レート決定式における定常サンスポット均衡を定義し，その発生条件を求める．

Money-in-the-Utility-Model においては，個人は貨幣を保有することにより，取引費用を節約することができるので，この流動性サービスから直接に効用を得る．以下では，簡単化のため小国開放経済における代表的個人の最大化問題

$$\max_{c_t, M_t} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left\{ u(c_t) + v\left(\frac{M_t}{p_t}\right) \right\} \tag{1}$$

$$\text{s. t. } b_t = (1+r)b_{t-1} + y - c_t - H_t - \frac{M_t}{p_t} + \frac{M_{t-1}}{p_t} \tag{2}$$

を考える．但し，ここで，c_t は実質消費，p_t は物価水準，H_t は実質貨幣移転，y は実質所得で常に一定であるとする．b_t は外国債券の実質残高，r はその

債券の利子率で，小国経済であるから所与とすることができる．また，M_t は名目貨幣残高であり，マネーサプライは，

$$M_t = \mu M_{t-1} \quad M_0 : \text{given} \tag{3}$$

というルールによって外生的に決定されるものとする．

また，外国の物価水準を p_t^*，自国通貨建て為替レートを e_t とし，購買力平価

$$p_t = e_t p_t^* \tag{4}$$

が成立しているものとする．更に簡単化のため $p_t^* = 1$ と仮定する．このとき，最大化問題の一階条件は，

$$u'(c_t) = \beta(1+r)u'(c_{t+1}) \tag{5}$$

$$\left[u'(c_t) - v'\left(\frac{M_t}{e_t}\right)\right]\frac{M_t}{e_t} = \frac{\beta}{\mu}u'(c_{t+1})\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}} \tag{6}$$

となる．M_t は (3) によって外生的に決定されるので，$\dfrac{M_t}{e_t}$ の動きをみることによって，為替レートの動きを知ることができる．また，$\beta(1+r)>1$ であれば，無限期間においては，消費量は無限大となり，$\beta(1+r)<1$ であれば，消費量はゼロに収束してしまうので[3]，常に $\beta(1+r)=1$ が成立していると仮定する．このとき，(5) は，

$$u'(c_t) = u'(c_{t+1}) \tag{7}$$

となり，消費は通時的に一定であることがわかる．よって均衡においては，$c_t = c_{t+1} = y$ となる．したがって，(6) は

$$\left[u'(y) - v'\left(\frac{M_t}{e_t}\right)\right]\frac{M_t}{e_t} = \frac{\beta}{\mu}u'(y)\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}} \tag{8}$$

となる．ここで，

$$f\left(\frac{M}{e}\right) = \left[u'(y) - v'\left(\frac{M}{e}\right)\right]\frac{M}{e}$$

$$g\left(\frac{M}{e}\right) = \frac{\beta}{\mu}u'(y)\frac{M}{e}$$

とおく．このとき，以下の命題が得られる．

命題1：u, v が凸関数で，$u'(0)=+\infty$，$v'(0)=+\infty$，$\frac{M}{e}\to\infty$ のとき $v'\left(\frac{M}{e}\right)\to 0$，$\frac{\mu}{\beta}>1$ が満たされており，更に，十分大きな $\frac{M}{e}$ に対して，$v'\left(\frac{M}{e}\right)<\left(\frac{M}{e}\right)^{\lambda}$ となるような定数 $\lambda<0$ が存在するならば，$\frac{M_t}{e_t}$ は $f\left(\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}\right)=g\left(\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}\right)$ を満たす定常値 $\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}$ に収束する．

証明：5-1 参照

この命題より，効用関数が (1) のように分離可能である場合には，経済学的にもっともらしい条件の下で，定常均衡に収束する均衡経路は一意に存在することがわかる．為替レートは，マネーサプライの増加に合わせて，一定率 μ で減価し続ける[4]．

しかし，ここでサンスポットが発生し，これらの変数が為替レートに影響を与えると投資家が確信するならば，均衡が一意に定まらず，為替レートが変動してしまう均衡が存在し得ることを示す．

まず，今期の為替レート $\frac{M_t}{e_t}$ が来期の為替レート $\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}$ の期待値に依存するバックワード動学体系

$$\frac{M_t}{e_t}=E_t\left[f^{-1}\left(g\left(\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}\right)\right)\right]\equiv h\left(\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}\right) \tag{9}$$

における定常サンスポット均衡を定義する．サンスポット変数は，発生する状態 a と発生しない状態 b の2状態をもち，それらが，推移確率行列

$$\begin{pmatrix}\pi_{aa} & \pi_{ab}\\ \pi_{ba} & \pi_{bb}\end{pmatrix}$$

をもつ Markov 過程に従っているものとする．

このとき，定常サンスポット均衡が存在するとは，経済ファンダメンタルズとは無関係な確率的事象の実現値に応じて，均衡における $\frac{M_t}{e_t}$ の値が異なることである．即ち，

定義1：サンスポットが発生した状態 a の場合の $\frac{M_t}{e_t}$ の値を $\left(\frac{M}{e}\right)_a$，サンスポットが発生しなかった状態 b の場合の $\frac{M_t}{e_t}$ の値を $\left(\frac{M}{e}\right)_b$ としたときに，

$\left(\frac{M}{e}\right)_a \neq \left(\frac{M}{e}\right)_b$ に対して，(9) の動学体系

$$\left(\frac{M}{e}\right)_a = \pi_{aa} h\left(\left(\frac{M}{e}\right)_a\right) + \pi_{ab} h\left(\left(\frac{M}{e}\right)_b\right)$$

$$\left(\frac{M}{e}\right)_b = \pi_{ba} h\left(\left(\frac{M}{e}\right)_a\right) + \pi_{bb} h\left(\left(\frac{M}{e}\right)_b\right)$$

$$\pi_{aa} + \pi_{ab} = 1, 0 < \pi_{aa}, \pi_{ab} < 1, \pi_{ba} + \pi_{bab} = 1, 0 < \pi_{ba}, \pi_{bb} < 1 \quad (10)$$

が満たされるとき，2状態の定常サンスポット均衡が存在するものと定義する．

この2状態の定常サンスポット均衡の存在について，Chiappori and Guesnerie (1987) は，以下の命題を得ている．

命題2：
$$Z\left(\frac{M_t}{e_t}, \frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}\right) = 0 \quad (11)$$

において2状態の定常サンスポット均衡が存在するための十分条件は，

$$\pi_{ab} + \pi_{ba} > 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \quad (12)$$

である．但し，ここで，

$$Z_1 = \frac{\partial Z}{\partial (M_t/e_t)}\left(\left(\overline{\frac{M}{e}}\right), \left(\overline{\frac{M}{e}}\right)\right),\ Z_2 = \frac{\partial Z}{\partial (M_{t+1}/e_{t+1})}\left(\left(\overline{\frac{M}{e}}\right), \left(\overline{\frac{M}{e}}\right)\right)$$

である．

証明：5-2参照

この命題は，サンスポット変数の状態が十分高い確率で推移するときに，定常サンスポット均衡が発生することを意味している．この (12) を為替レート決定式

$$Z\left(\frac{M_t}{e_t}, \frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}\right) = \left[u'(y) - v'\left(\frac{M_t}{e_t}\right)\right]\frac{M_t}{e_t} - \frac{\beta}{\mu} u'(y) \frac{M_{t+1}}{e_{t+1}} \quad (13)$$

にあてはめ，定常均衡において成立する関係

$$\left(1 - \frac{\beta}{\mu}\right) u'(y) = v'\left(\left(\overline{\frac{M}{e}}\right)\right) \quad (14)$$

を用いると，2状態の定常サンスポット均衡が発生するための十分条件は，

$$\pi_{ab}+\pi_{ba} > -\frac{v''(\overline{(M/e)})\overline{(M/e)}}{v'(\overline{(M/e)})}\left(1-\frac{\mu}{\beta}\right) \tag{15}$$

となる．命題1より $\frac{\mu}{\beta}>1$ であるから，$\frac{v''(\overline{(M/e)})\overline{(M/e)}}{v'(\overline{(M/e)})}>0$ であるとき，即ち，投資家が危険回避的であるときには，定常サンスポット均衡が存在し得ることがわかる．よって，以下の命題を得る．

命題3：以下の条件が満たされるとき，為替レートは，その定常均衡の近傍で定常サンスポット均衡をもつ．

$$-\frac{v''(\overline{(M/e)})\overline{(M/e)}}{v'(\overline{(M/e)})} > 0$$

この結果は，定常サンスポット均衡が発生するためには比較的高い相対的危険回避度を必要としていた福田（1995）の結果とは異なっている．この相違は，予算制約式の違いに帰因するものである．福田（1995）においては予算制約式は，

$$b_t = (1+r)b_{t-1}+y-c_t-H_t-\frac{M_{t+1}}{P_t}+\frac{M_t}{P_t}$$

で与えられている．これは，t 期の所得を交換することで得られた貨幣が $t+1$ 期の取引費用を節約する，即ち，期首に保有されている貨幣が当期の取引費用を低めることを意味している．一方，(2) の制約式においては，t 期の流動性サービスは t 期の所得を貨幣に交換することで得られるものとされている．このため，(2) の制約下にある投資家は，サンスポットの発生という不確実性に直面しているにもかかわらず，事前に貨幣を保有していないことになり，その不確実性ゆえにより危険回避的になると解釈することができる．

3 定常サンスポット均衡への収束

この節では，以上のように定常サンスポット均衡がどのように達成されて

いくのかという収束過程を考察する．前述のように，合理的期待形成を仮定するならば，ファンダメンタルズに無関係な要因であるサンスポットが為替レートに影響を与える均衡は排除されることになる．

ここでは，合理的期待形成を行う市場参加者の代わりに限定合理的な市場参加者を仮定し，定常サンスポット均衡がこのような市場参加者の学習過程の極限として達成されることをみる．合理的期待においては，経済主体は何らかの目的を達成するために，利用可能なすべての情報を用いて合目的的に行動するという個人の最適化行動（目的合理性）と，経済主体はモデルの構造，更にパラメータについての知識も有しており，確率変数の数学的期待値と自身の主観的期待値とを等しくするように行動するという期待の一致性（期待合理性）が仮定されている．限定合理性とは，この2つの過程のうち個人の最適化行動の仮定は保持するが，期待の一致性の仮定を外すもので，“意図的には合理的であるが，その合理性には限界がある”行動であると定義できる．即ち，経済主体は何らかの目的を達成するために意識的に努力するが，それは認知能力の限界を反映したやり方でなされるということである．経済主体は，短期的な行動の選択にあたってモデルを構築し，そのモデルの枠内で合目的的に最適な行動を選択するが，そのモデルは合理性の限界を反映して，真のモデルの単純化か間違った特定化である．そして，長期的には自身の経験から情報を集め，適応的学習課程を通じて，この短期のモデルを更新していく．しかしながら，この短期的なモデルの更新によって，長期的に真のモデルへ収束していく保証はない．

この限定合理性の考えを用いれば，認知能力に限界があり，どのような変数が為替レートを決定するのかわからない限定合理的な投資家が，例えば，過去における為替レートとサンスポット変数との偶然的な相関を観察することにより，誤ってサンスポット変数を短期的な為替レートの予測に用いてしまった結果，学習過程の極限として，長期的に定常サンスポット均衡が達成されたと解釈することができる．

限定合理的な市場参加者の学習過程として，以下のような適応的な学習過

程を考える．

経済主体は，経済の動学構造を決定するモデルとして，真のモデル F に“近い”が等しくはないモデル f を認識しているものとする．これを知覚された運動法則（perceived law of motion）と呼ぶ．但し，ここで，f は運動法則をパラメタライズするベクトルである．経済主体はある t 期における知覚された運動法則である f_t に基づいて，関心を持っている状態変数を予測する．この予測を構造方程式に代入すると t 期における状態変数の実際の値が得られる．これを実際の運動法則（actual law of motion）と呼ぶ．よって，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像 $T(f):R^k \rightarrow R^k$ が存在することになる[5)]．そして，t 期における実際の運動法則を観察した経済主体は，f_t を知覚された運動法則と実際の運動法則との差に基づいて $T(f)$ の方向に修正し，新たに f_{t+1} を認識するものとする．即ち，知覚された運動法則を

$$f_{t+1} = f_t + \delta(T(f_t) - f_t) \tag{16}$$

によって改訂していくものとする．この学習過程の安定性を t 期から $t+1$ 期への変化が十分小さいときの微分方程式

$$\frac{df}{dt} = T(f(t)) - f(t) \tag{17}$$

に関して定義する．

定義 2：f^* を写像 T の不動点とする．このとき，すべての $\|f_0 - f^*\| < \varepsilon$ に対して $t \rightarrow \infty$ のとき，$f(t) \rightarrow f^*$ となるような $\varepsilon > 0$ が存在するならば，f^* は期待安定的（expectational stable）であるという．但し，ここで，$f(t)$ は初期条件 $f(0) = f_0$ のもとで，(17) を解く軌跡である．

即ち，$N \rightarrow \infty$ のとき，f^* に十分近い f_0 に対し，T の反復 $T^N(f_0) \rightarrow f^*$ となるとき期待安定的であると呼ばれるのである．これは，Jacobian DT を $T(f)$ の f^* において線形近似したときの $DT-I$ の固有根が 0 より小さい実部をもつとき，同じことであるが，DT の固有根の実部が 1 以下であるとき

に満たされる．

この期待安定性の概念はDe Canio (1979), Evans (1989) によるもので，Evansはこの概念を用いて，Azariadis and Guesnerieのモデルにおける定常サンスポット均衡への収束過程を考察している．以下では，この手法を前節のモデルに適用し，為替レートにおける定常サンスポット均衡が期待安定的となることを示す．

ここで，簡単化のため，効用関数 $v\left(\frac{M}{p}\right)=v\left(\frac{M}{e}\right)$ を

$$v\left(\frac{M}{e}\right)=\log\left(\frac{M}{e}\right) \tag{18}$$

と特定化する[6]．この特定化のもとでは，相対的危険回避度は，$-\frac{v''(\overline{(M/e)})\overline{(M/e)}}{v'(\overline{(M/e)})}=1$ なので，命題3より，定常サンスポット均衡が存在するための十分条件は満たされていることがわかる．また，(9) は，

$$\frac{M_t}{e_t}=\frac{\beta}{\mu}E\left[\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}\middle|I_t\right]+\frac{1}{u'(y)} \tag{19}$$

となる．この解の1つは，$\frac{M_t}{e_t}=F\left[\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}\middle|I_t\right]=\frac{1}{u'(y)(1-(\beta/\mu))}$ である．

ここで，投資家は為替レートが一定の値をとり続けると認識し，運動法則を $\frac{M_t}{e_t}=\frac{M}{e}$ と知覚しているとする．但し，ここで，$\frac{M}{e}$ は定常値に近い値として選択される．このとき，この知覚された運動法則を (19) に代入すると，実際の運動法則は $T\left(\frac{M}{e}\right)=\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}$ となる．

$$\left(\frac{\dot{M}}{e}\right)=\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}-\frac{M}{e} \tag{20}$$

であるから，定常均衡 $\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}$ は期待安定的であることがわかる．

次に，無関係な変数であるサンスポット変数を導入する．前述同様，サンスポット変数は2状態のMarkov過程に従うものとする．為替レートとそのサンスポット変数との過去においての偶然的な相関を観察した限定合理的な投資家が，為替レートの予測においてサンスポット変数を用いるものとする．今，状態が a のときには $\frac{M_t}{e_t}=\left(\frac{M}{e}\right)_a$，状態が b のときには $\frac{M_t}{e_t}=\left(\frac{M}{e}\right)_b$ と知覚するものとしよう．この $\left(\frac{M}{e}\right)_a$，$\left(\frac{M}{e}\right)_b$ という値も学習過程により

内生的に決定される変数であると考えることもできるが，ここでは，簡単化のために，例えば，それぞれの状態における過去の平均的な値として外生的に与える．観察される結果は期待に依存する一方，限定合理的な投資家にとって利用できる情報は過去の観察値であるから，期待そのものを過去の観察値に依存させることは妥当な想定であると思われる．このとき，(19) は，

$$\left(\frac{M}{e}\right)_a = \pi_{aa}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_a + \frac{1}{u'(y)}\right] + \pi_{ab}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_b + \frac{1}{u'(y)}\right] \quad (21a)$$

$$\left(\frac{M}{e}\right)_a = \pi_{ba}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_a + \frac{1}{u'(y)}\right] + \pi_{bb}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_b + \frac{1}{u'(y)}\right] \quad (21b)$$

となる．これが，知覚された運動法則の写像 $\left(\left(\frac{M}{e}\right)_a *, \left(\frac{M}{e}\right)_b *\right) = T1 \left(\left(\frac{M}{e}\right)_a, \left(\frac{M}{e}\right)_b\right)$ である．よって，定常サンスポット均衡の安定性は，

$$\left(\frac{\dot{M}}{e}\right)_a = \pi_{aa}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_a + \frac{1}{u'(y)}\right] + \pi_{ab}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_b + \frac{1}{u'(y)}\right] - \left(\frac{M}{e}\right)_a \quad (22a)$$

$$\left(\frac{\dot{M}}{e}\right)_b = \pi_{ba}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_a + \frac{1}{u'(y)}\right] + \pi_{bb}\left[\frac{\mu}{\beta}\left(\frac{M}{e}\right)_b + \frac{1}{u'(y)}\right] - \left(\frac{M}{e}\right)_b \quad (22b)$$

に関して定義できる．$T1$ の Jacobian $DT1$ は，

$$DT1 = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\mu}\pi_{aa} & \frac{\beta}{\mu}\pi_{ab} \\ \frac{\beta}{\mu}\pi_{ba} & \frac{\beta}{\mu}\pi_{bb} \end{bmatrix} \quad (23)$$

となる．期待安定的であるための条件は，この Jacobian の固有根が絶対値で1より小さくなることであるが，行列の要素がすべて正であることから，これは，$tr(DT1) < 2$，$\det(DT1) < 1$ であることと同値となる．この条件を整理すると，

$$\pi_{ab} + \pi_{ba} > 2\left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \quad (24)$$

$$\pi_{ab} + \pi_{ba} > \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)\left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \quad (25)$$

となる．しかし，$\frac{\mu}{\beta} > 1$ であることから，(24) (25) は常に満たされることになる．よって，以下の命題を得る．

命題4：効用関数が $v\left(\frac{M}{e}\right)=\log\left(\frac{M}{e}\right)$ で与えられるとき，定常サンスポット均衡が存在するための条件は満たされ，期待安定的となる．

この命題より，為替レートを決定するファンダメンタルズとは無関係なサンスポット変数であっても，一旦，投資家が誤って短期的な為替レートの予測に用いてしまうと，学習過程を通じて，自己実現的となり，状態が a のときには $\frac{M_t}{e_t}=\left(\frac{M}{e}\right)_a$，状態が b のときには $\frac{M_t}{e_t}=\left(\frac{M}{e}\right)_b$ という均衡に収束していってしまうのである．為替レートの予測にサンスポット変数を用いても，予測が改善されないのであれば，投資家はサンスポット変数を予測に用いるのを止めるであろう．しかし，実際には，予測は毎期改善され，更に(8) からわかるように，今期の為替レート $\frac{M_t}{e_t}$ が来期の為替レート $\frac{M_{t+1}}{e_{t+1}}$ の期待値に依存するために，一旦為替レートの予測に用いられてしまうと，それが，知覚された運動法則から除かれることなく，定常サンスポット均衡に収束していくのである．

前述の「一国の経常収支黒字はその国の通貨の増価をもたらす」という根拠のない説も，為替管理や資本取引規制により国際資本移動が制限されていたときには，経常収支黒字がその国の通貨の増価をもたらす傾向があり，経済学的にも正しいものであった．このような経常収支黒字と為替レートとの相関（偶然的ではない）を観察した投資家が，国際資本移動が自由化された後でも為替レートの予測に経常収支を用い，（経常収支を確率変数とみなせるならば）経常収支をサンスポットとした定常サンスポット均衡が発生していると考えることもできる．

同様にして，投資家が為替レートの予測に複数のサンスポット変数を用いたときには，複数のサンスポット変数の状態の組み合わせに応じて，為替レートがさらに変動するようになることを示すことができる．(5-3参照)

4　おわりに

以上，経済ファンダメンタルズに無関係な要因による為替レートの変動を定常サンスポット均衡と定式化した．Brock 型の Money-in-the-Utility-

Model に基づいた為替レート決定式において，経済学的にもっともらしい条件の下では，均衡経路が一意に定まるが，サンスポットが発生するならば，投資家が危険回避的であるときには，定常サンスポット均衡は投資家の学習過程の極限として達成されることをみた．

本稿より得られる政策的なインプリケーションとしては，政策当局は，為替レートがファンダメンタルズと無関係に変動することを抑え，安定化させることを望むのであれば，投資家が為替レートの予測にサンスポット変数を用いることを止めさせるしかないことになる．しかし，前述の通り，一旦，投資家が短期的な為替レートの予測にサンスポット変数を用いると，学習過程により各期の予測は改善されていくので，これを止めるインセンティブはもたない．よって，為替レートとサンスポット変数との相関を断ち切る政策が必要となるが，具体的にどのような政策が有効であるかを探るのは容易ではない．

また，本稿においては，小国の仮定と購買力平価の仮定をしているため，為替レートの変動が物価水準の変動が同一視されており，更に，一国の為替レートに関してのみのサンスポットが発生するという非対称性が前提とされていた．よって，今後は，物価水準とは独立に考察可能で，かつ，為替レートの特徴が前面にでてくるモデルや大国二国からなる一般均衡モデルを用いた分析を行っていく必要があると思われる．また，効用関数を対数型に特定化したが，これについてもより一般的な効用関数での分析を行っていきたいと考えている．

5　補記

5-1. 命題 1 の証明の要旨（Brock（1985）Theorem 1. 2. 3. Lemma 1. Corollary 1.）

$\dfrac{M_t}{e_t}$ の無限期における均衡経路として，(a) ゼロに収束 (b) 定常値 $\left(\dfrac{\overline{M}}{e}\right)$ に収束（c）∞に発散が考えられるが，命題 1 の仮定の下では（a)（c）は均衡になり得ず，(b) の $\left(\dfrac{\overline{M}}{e}\right)$ に伴う為替レート（物価水準）の経路 $\bar{e}_t=$

$\dfrac{\mu^t M_0}{(M/e)}$ は，常に均衡経路になることが示せる．

(a)　$v'(0)=+\infty$ であることから，個人は消費をわずかだけ減らし，貨幣残高を保有することで，より大きな効用を得ることができるので均衡にはなり得ない．

(b)　$$\sum_{t=1}^{T}\beta^{t-1}\left[u(c_t)+v\left(\frac{M_t}{\bar{e}_t}\right)-u'(y)-v\left(\frac{\mu^t M_0}{\bar{e}_t}\right)\right]\leq\beta^T\left[u'(y)\frac{\mu^{t+1}M_0}{\bar{e}_{t+1}}\right]\frac{1}{\mu} \tag{A1}$$

という不等式が成立することが示せ（証明略），右辺は $T\to\infty$ のときゼロへ収束するので，$\bar{e}_t=\dfrac{\mu^t M_0}{(M/e)}$ 以外の経路はより高い効用をもたらし得ないことがわかる．

(c)　(8) と，$\dfrac{M_t}{e_t}\to\infty$ のとき $v'\left(\dfrac{M_t}{e_t}\right)\to 0$ より，

$$u'(y)\frac{M_{t+1}/e_{t+1}}{M_t/e_t}=\frac{\mu}{\beta}\left[u'(y)-v'\left(\frac{M_t}{e_t}\right)\right]\to\frac{\mu}{\beta}u'(y) \tag{A2}$$

となることから，（為替レートで評価した）実質貨幣残高は $t\to\infty$ のとき，$\dfrac{\mu}{\beta}$ の率で成長することがわかる．一方，

$$e_t=\frac{\mu^t M_0}{M_t/e_t} \tag{A3}$$

より，$\dfrac{e_{t+1}}{e_t}=\dfrac{\mu M_t/e_t}{M_{t+1}/e_{t+1}}=\beta$ なので，為替レート（物価水準）は β の率で減価（成長）することがわかる．

ある T 期において，貨幣残高1単位を消費に回すことにより，個人は $\dfrac{u'(y)}{e_T}$ に等しい追加的な効用を得ることができる．一方，$t\geq T$ 期にかけて，

$$\sum_{t=T}^{\infty}\beta^{t-T}\frac{v'(M_t/e_t)}{e_t} \tag{A4}$$

の損失を受ける．しかしながら，e_t は β の率で，$\dfrac{M_t}{e_t}$ は $\dfrac{\mu}{\beta}$ の率で成長することと，$v'\left(\dfrac{M}{e}\right)<\left(\dfrac{M}{e}\right)^{\lambda}$ であることから，この損失（A4）の上限が

$$\frac{k\sum_{t=T}^{\infty}[(\mu/\beta)^{\lambda}]}{e_T} \tag{A5}$$

で抑えられるように，定数（$\dfrac{M_0}{e_0}$ と考えてもよい）を選ぶことができる．そ

して，$\dfrac{\mu}{\beta}>1, \lambda<0$ より，$\left(\dfrac{\mu}{\beta}\right)^{\lambda}<1$ となることから，

$$u'(y) > k\sum_{t=T}^{\infty}\left[\left(\frac{\mu}{\beta}\right)^{\lambda}\right]^{t} \tag{A6}$$

が成立し，個人は実質貨幣残高を保有しようというインセンティブをもたず，この経路は均衡になり得ないことがわかる.

5-2. 命題2の証明の要旨（Chiappori and Guesnerie (1987)）

$k\times k$ の推移確率行列 Π をもつ一般的な Markov 過程に伴う定常サンスポット均衡の存在条件を求める. $\Delta Z_{\Pi}^{k}\left(\dfrac{M}{e}\right)$ を $\dfrac{M}{e}=\left(\left(\dfrac{M}{e}\right)_a, \cdots, \left(\dfrac{M}{e}\right)_k\right)$ における Z_{Π}^{k} の Jacobian 行列式とする. このとき,

$$(-1)^{k}\Delta Z_{\Pi'}^{k}\left(\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}\right) < 0 \tag{A7}$$

を満たす Markov 過程の推移確率行列 Π' が存在するならば，Π' に伴う定常サンスポット均衡が存在することがわかる. これは，$Z_{\Pi'}^{k}\left(\dfrac{M}{e}\right)$ のゼロ点におけるインデックス（index）の和は $(-1)^{k}$ に等しくなるという Poincare'-Hopf の定理（Mas-Colell (1985)）をあてはめたものである. 但し，ここで，$\overline{\left(\dfrac{M}{e}\right)}$ における Z_{Π}^{k} のインデックス $i\left(\dfrac{M}{e}\right)$ とは，$\Delta Z_{\Pi}^{k}\left(\dfrac{M}{e}\right)>0$ のとき $i\left(\dfrac{M}{e}\right)=+1$，$\Delta Z_{\Pi}^{k}\left(\dfrac{M}{e}\right)<0$ のとき $i\left(\dfrac{M}{e}\right)=-1$ として定義されるものである. (A7) は $Z_{\Pi'}^{k}\left(\dfrac{M}{e}\right)$ の $\overline{\left(\dfrac{M}{e}\right)}$ におけるインデックスは，$(-1)^{k+1}$ であることを意味しており，Poincare'-Hopf の定理より，$\Delta Z_{\Pi}^{k}\left(\dfrac{M}{e}\right)=0$ は $\overline{\left(\dfrac{M}{e}\right)}$ 以外に少なくとも2つの解をもつことが導かれる. そして，この均衡が定常サンスポット均衡に他ならない.

また，計算により，(証明略)

$$\Delta Z_{\Pi'}^{k}\left(\overline{\left(\frac{M}{e}\right)}\right) = (Z_2)^{k}Det\left(\Pi+\frac{Z_1}{Z_2}\right)I \tag{A8}$$

となることが示せ，更に，$\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|<1$ で，$\dfrac{Z_1}{Z_2}$ が Π の固有根でないならば，$-\dfrac{Z_1}{Z_2}$ より小さい Π の実数の固有根の数が奇数のとき，また，そのときに限り，

$$(-1)^k (Z_2)^k Det\left(\Pi+\frac{Z_1}{Z_2}\right) I < 0 \qquad \text{(A9)}$$

が満たされることを示すことができる.（証明略）よって，以下の命題を得る.

命題 A1：$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|<1$ であるならば，$-\frac{Z_1}{Z_2}$ より小さい奇数個の実数の固有根をもつ推移行列 Π に対して定常サンスポット均衡が存在する.

そして，特に，$k=2$ の場合には固有根が 1 と $\pi_{aa}+\pi_{bb}-1=1-\pi_{ab}-\pi_{ba}$ であるから，

$$1-\pi_{ab}-\pi_{ba} < -\frac{Z_1}{Z_2} \qquad \text{(A10)}$$

が満たされるとき，2状態の定常サンスポット均衡が発生することが示せる.

5-3. 弱期待安定性と強期待安定性

期待安定性が，関心のあるパラメータの摂動のみに関して定義されるならば，弱期待安定的（weak expectational stable），関心のある解のパラメータとは全く無関係な変数の摂動に関しても定義されるならば強期待安定的（strong expectational stable）であると呼ばれる．この概念を用いれば，定常均衡 $\left(\frac{\overline{M}}{e}\right)$ は弱期待安定性を満たすが，無関係なサンスポット変数を導入すると，定常サンスポット均衡の方が弱期待安定性を満たし，定常均衡 $\left(\frac{\overline{M}}{e}\right)$ は不安定となることから，強期待安定的ではないことになる.

同様に，単一のサンスポット変数のみを用いた定常サンスポット均衡の強期待安定性を考察するために，第2のサンスポット変数を導入する．このサンスポット変数も，同様に2状態の Markov 過程に従い，その推移確率は $\gamma_{ij}>0, i,j=a,b$ で与えられるものとする．このとき，知覚された運動法則から実際の運動法則への写像 $\left(\left(\frac{M}{e}\right)_{aa}*,\left(\frac{M}{e}\right)_{ba}*,\left(\frac{M}{e}\right)_{ab}*,\left(\frac{M}{e}\right)_{bb}*\right)$ $=T2\left(\left(\frac{M}{e}\right)_{aa},\left(\frac{M}{e}\right)_{ba},\left(\frac{M}{e}\right)_{ab},\left(\frac{M}{e}\right)_{bb}\right)$ は，

$$\left(\frac{M}{e}\right)_{ij}^{*} = \sum_{k=a,b}\sum_{p=a,b}\pi_{ik}\gamma_{jp}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)\left(\frac{M}{e}\right)_{kp} \tag{A11}$$

となる．ここで，定常サンスポット均衡の強期待安定性は，

$$\left(\frac{M}{e}\right) = T2\left(\frac{M}{e}\right) - \frac{M}{e} \tag{A12}$$

に関して定義できる．但し，ここで，$\frac{M}{e}=\left(\left(\frac{M}{e}\right)_{aa},\left(\frac{M}{e}\right)_{ba},\left(\frac{M}{e}\right)_{ab},\left(\frac{M}{e}\right)_{bb}\right)$ である．$T2$ の Jacobian 行列を，$\gamma_{aa}=\gamma_{bb}=0$ で評価すれば，

$$DT2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta}{\mu}\pi_{aa} & \frac{\beta}{\mu}\pi_{ab} \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\mu}\pi_{ba} & \frac{\beta}{\mu}\pi_{bb} \\ \frac{\beta}{\mu}\pi_{aa} & \frac{\beta}{\mu}\pi_{ab} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\mu}\pi_{ba} & \frac{\beta}{\mu}\pi_{bb} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A13}$$

となる．そして，$DT2$ の 4 つの固有根は，

$$1, -1, \det(DT1), -\det(DT1)$$

である．よって，単一のサンスポット変数を用いたときの定常サンスポット均衡が弱期待安定的で，$\det(DT1)<1$ が満たされていたとしても，1 より小さくない固有根が存在するために強期待安定的とはならないことがわかる．よって，以下の命題を得る．

命題 A2：単一の定常サンスポット均衡は強期待安定的ではない．

この命題により，投資家が為替レートの予測に複数のサンスポット変数を用いるならば，為替レートは，更に変動することがわかる．

1)　この説は，為替レートは経常収支を調整する機能をもっており，経常収支黒字を縮小するように為替レートが増価するという考えに基づいている．しかし，経済学的には，将来にかけての所得の流列を与えられた家計の異時点間の効用最大化により，まず，経常収支が決定され，その経常収支を維持するように，為替レートが後から調整されると考えるべきだからである．

2) 厳密な合理性の定義は3節で行うが，目的合理性と期待合理性をあわせ持っている経済主体を合理的な経済主体と呼ぶ.

3) $u'(c_t)>u'(c_{t+1})$ (resp. $u'(c_t)<u'(c_{t+1})$) より，すべての t に対して，$c_t<c_{t+1}$ (resp. $c_t>c_{t+1}$) となるからである.

4) 効用関数が分離不可能なときには，消費と実質貨幣残高との代替関係により，複数均衡が存在する.（Brock（1974)（1975) Appendix)

5) 合理的期待を形成する経済主体は，この写像の不動点を知っていることを意味する.

6) これは強い仮定であるが，以下の目的は，学習過程により定常サンスポット均衡に収束する場合が少なくとも1つ存在することを示すことであるので，このような仮定をおいても構わないと考える.

参考文献

Azariadis, C. (1981), "Self-fulfilling Prophecies", Journal of Economic Theory 25, 380-396

Azariadis, C. (1993), *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell

Azariadis, C. and Guesnerie, R. (1986), "Sunspot and Cycles", Review of Economic Studies 53, 725-737

Brock, W. (1974), "Money and Growth : The Case of Long Run Perfect Foresight", International Economic Review 15, 750-777

Brock, W. (1975), "A Simple Perfect Foresight Monetary Model", Journal of Monetary Economics 1, 133-150

Cass, D. and Shell, K (1993), "Do Sunspots Matter ?", Journal of Political Economics 91, 193-227

Chiappori, P-A. and Guesnerie, R. (1987), "On Stationary Sunspot Equilibria of Order k", Quarterly Journal of Economics 93, 47-57

Evans, G.W. (1989), "The Fragility of Sunspots and Bubbles", Journal of Monetary Economics 23, 297-317

Fukuda, S. (1993), "Intrinsic Uncertainty and Extraneous Uncertainty : Sunspot Equilibria and Periodic Cycles under Fundamental Shocks", Discussion Paper AS No. 282, The Institute of Economic Research, Hitotsubashi University

福田慎一（1995)「価格変動のマクロ経済学」東京大学出版会

Kreps, D., *Game Theory and Economic Modelling*, Oxford University Press

Marcet, A. and Sargent, T. (1989), "Convergence of Least Squares Learning Mechanism in Self-Referential Linear Stochastic Models", Journal of Economic Theory 48, 337-368

Mas-Colell, A. (1985), *The Theory of General Equilibrium : A Differential Approach*, Cambridge University Press

Robins, H. and Monro, S. (1951), "A Stochastic Approximation Method", Annals of Mathematical Statistics 22, 400-407

Sargent, T. (1994), *Bounded Rationality in Macroeconomics*, Harvard University Press

Woodford, M.. (1990), "Learning to Believe in Sunspots", Econometrica 58, 277-307

(一橋大学大学院博士課程)