需要理論における古典的双対問題*

山　　崎　　　昭

1　はじめに

一般に，同一の現象や事実を2つの最適化問題（通常は最大化問題と最小化問題）の組（ペアー）によって表現可能なとき，これら一組の最適化問題には**双対性**（そうついせい，デュアリティー duality）があるという．

最適化問題における双対性の表現は，数理計画法，特に線型計画法（リニアー・プログラミング）の発展とともに盛んに用いられるようになった．（例えば，片岡（1971）あるいは Dantzig（1963）等を参照．）

ミクロ経済学の教科書が需要理論や供給理論における最適化問題の双対的表現を紹介し始めたのは比較的に最近のことであるが（Layard and Walters（1978）と Varian（1978）参照），実はミクロ経済理論における双対的アプローチは，線型計画法が Dantzig によって開発された1947年以前から用いられていたのである．

本稿の目的は，需要理論におけるロワ（Roy），ハウタッカー（Houthakker），マッケンジー（McKenzie）の「古典的」な双対性の表現方法を統一的に解説し，その相互関係を明確にすることにある．幾つかの新しい用語（例えば，「限界間接代替率」，「価格・所得無差別曲線」等）は導入するが，以下の各節で取り上げる命題・定理は本質的に既知のものばかりである．ミクロ経済学のテキストに見られるこれら古典的命題の証明やその解説は，必ずしも読者に適

*）本稿は一橋大学経済学部における「ミクロ経済学」の講義ノートの一部に手を加えたものである．

切な理解を与えるような形でなされているとは言えない．本稿では，①「ロワの恒等式」ともよばれているロワの需要表現式は，間接効用最小化問題の解の必要条件であること，②ヒックス＝マッケンジーの需要表現式は，消費支出最小化問題のデュアルの解となるための必要条件であること，③ヒックス＝マッケンジーの需要表現とロワの需要表現とは同値であること，等に注意して需要理論における古典的双対性命題の解説を進めることにしたい．

2　主要問題と2種類の双対問題

双対性を持つ最適化問題のペアーが与えられたとき，一方を**主要問題**（プライマル Primal)，他方を**双対問題**（デュアル Dual）とよぶ．

需要理論における双対性は，消費者の選好・効用最大化問題をプライマルとするもので，2種類の双対性が知られている．第1は，「間接」効用の最小化問題を双対問題とするもので，本質的には Roy と Houthakker の分析によるものである．第2は，消費支出の最小化問題を双対問題と考えるもので，これは McKenzie による分析である．第1の双対性については3～5節で，第2の双対性については6節で取り上げ，7節で両者の相互関係を解説することにしたい．

l を正の整数とし，l は識別可能な広義の財の数を表すものとする．財空間を l 次元ユークリッド空間 R^l とし，消費集合 X をその非負象限 R^l_+ とする．消費者の効用関数を $u\colon X\to R$ とする．$R^l_{++}:=\{x=(x^1,\cdots,x^l)\in R^l|(\forall j)\ x^j>0\}$ とし，$p\in R^l_{++}$ を価格ベクトル，$w\in R_+$ を消費者の所得水準とする．このとき，需要理論における主要問題は次のように表現される．

2.1 主要問題［プライマル］——効用最大化問題

価格ベクトル $p\in R^l_{++}$，所得 $w\in R_+$ を所与とし，

$$\max\quad u(x)$$

$$\text{制約}\quad p\cdot x\leqq w$$

ここで「max $u(x)$, 制約 $p\cdot x \leqq w$」は,「制約条件 $p\cdot x \leqq w$ を満たす $x \in X$ の中で, 実数値関数 $u(x)$ の値を最大にする x を求めよ」と読む. この周知の効用最大化問題をプライマルとする2種類の双対性があることは先に述べた通りであるが, これらについて順次以下で説明することにしたい. 効用関数 u: $X \to R$ が連続であれば, 上記効用最大化問題の解が存在することは, よく知られた通りである. 効用最大化問題の解となる $x \in X$ を需要ベクトルとよぶ. 需要ベクトル全体からなる集合を $f(p, w)$ と書き, これを需要集合とよぶ.

3 間接効用と限界間接代替率

最適化問題として眺めた場合, 効用最大化問題を規定している目的関数は効用関数 u: $X \to R$ である. 効用関数 u は, 消費ベクトル $z \in X$ の効用を「直接 (direct)」に $u(z)$ と定めるものである. 他方, 価格と所得は直接的に効用を定めないが, 需要ベクトル $x \in f(p, w)$ の効用が, 価格ベクトル p と所得 w の効用を「間接 (indirect)」的に定めると考えることができる.

3.1 定義 [間接効用] u: $X \to R$ を効用関数とし, $p \in R^l_{++}, w \in R_+$, における需要集合を $f(p, w)$ とするとき,

$$U(p, w) := u(f(p, w))$$

を (p, w) の**間接効用** (indirect utility) といい, 関数 U: $R^l_{++} \times R_+ \to R$ を間接効用関数という. □

この定義において, 2つの相異なる需要ベクトル $x, y \in f(p, w)$ があっても, $u(x) = u(y)$ となるから, 定義する上での問題は生じない.

3.2 文献注 [間接効用] ① Hotelling は1932年の論文において上のような双対的見方が可能であると指摘した. "…Just as we have a utility (or profit) function u of the quantities consumed whose derivatives are the prices, there is, dually, a function of the prices whose derivatives are the quantities consumed. The existence of such a function, which heretofore does not seem to have been noticed…. On the basis of physical analogies we may call this the 'price potential'…" (Hotelling (1932, p. 594)).

② Hotelling は①に見るように，間接的に定められる価格と所得の効用を「価格ポテンシャル」とよんだ．現在使用されている「間接効用」や「間接効用関数」の用語を最初に導入したのは Houthakker (1952, p. 157) である．□

価格ベクトル p と所得 w に対する予算集合を $B(p,w):=\{z\in X|\ p\cdot z\leqq w\}$ と書く．次に示す間接効用関数の基本的性質は，いずれも予算集合の性質のみから導かれるもので，効用関数（あるいは選好関係）の性質からは独立に導出されることに注意したい．

3.3 命題［間接効用関数の基本的性質］

① U は0次同次，つまり，任意の $(p,w),t>0$ に対し，$U(tp,tw)=U(p,w)$ が成立する．

② U は準凸関数，つまり，任意の $t\in R$ に対し，$\{(p,w)\in R^l_{++}\times R_+|\ U(p\cdot w)\leq t\}$ は凸集合となる．

証明 ①はトリビアルである．任意の $t>0$ に対し $B(tp,tw)=B(p,w)$ だから

$$\begin{aligned}U(tp,tw)&=\max\{u(x)|\ x\in B(tp,tw)\}\\&=U(p,w)\end{aligned}$$

となる．

② $t\in R$ とする．$S:=\{(p,w)|\ U(p,w)\leqq t\}$ とし，$(p,w),(q,b)\in S$ のとき，任意の $0\leqq c\leqq 1$ に対し，$(cp+(1-c)q,cw+(1-c)b)\in S$ となることを示せばよい．そこで $B(p,w)=B_p$, $B(q,b)=B_q$, $B(cp+(1-c)q,cw+(1-c)b)=B_c$ と置く．今，$x\in B_c$ とし，$x\notin B_p\cup B_q$ とすれば，$cp\cdot x+(1-c)q\cdot x>cw+(1-c)b$ となり，$x\in B_c$ に反する．よって，$B_c\subset B_p\cup B_q$ である．ゆえに，

$$\begin{aligned}&U(cp+(1-c)q,cw+(1-c)b)\\&=\max\{u(x)|\ x\in B_c\}\\&\leqq\max\{u(x)|\ x\in B_p\cup B_q\}\leqq t\end{aligned}$$

を得る．ここで最後の等号ー不等号は (p,w) と (q,b) が S に属していたことによる．したがって，$(cp+(1-c)q,cw+(1-c)b)\in S$ となる．∎

さて，ここで間接効用関数を用いて，双対的な限界効用と限界代替率の概念を導入しておこう．

3.4 定義 [価格・所得の限界効用] 間接効用関数 U が (p, w) において可微分であるとき，$\dfrac{\partial U(p,w)}{\partial p^i}$ を**価格 p^i の限界（間接）効用** (marginal (indirect) utility of price p^i) とよび，MU_{p^i} と書く．

また，$\dfrac{\partial U(p,w)}{\partial w}$ を**所得の限界（間接）効用** (marginal (indirect) utility of income) とよび，MU_w と書く．

注 効用関数 u が局所非飽和性を満たしていれば，$MU_w>0$ である．また，このとき，需要ベクトル $x \in f(p, w)$ が $x^i>0$ であれば，$MU_{p^i}<0$ である．

3.5 定義 [限界間接代替率] 間接効用関数 U が (p, w) において可微分であり，価格 p^j の限界効用が 0 でなければ，任意の価格 p^i に対し，つぎのように限界間接代替率を定義できる．つまり，$\dfrac{\partial U(p,w)}{\partial p^j} \neq 0$ ならば，陰関数の定理から，$(p^1, \cdots, p^{j-1}, p^{j+1}. \cdots, p^l, w)$ のある近傍で定義された可微分な実数値関数 φ が存在し，この近傍内の任意の $(q^1, \cdots, q^{j-1}, q^{j+1}, \cdots, q^l, b)$ において

(1)
$$U(q^1, \cdots, q^{j-1}, \varphi(q^1, \cdots, q^{j-1}, q^{j+1}, \cdots, q^l, b), q^{j+1}, \cdots, q^l, b)=t$$
$$(\text{ここで } t=U(p,w))$$

を満足する．このとき，

(2)
$$\frac{\partial \varphi(p^1, \cdots, p^{j-1}, p^{j+1}, \cdots, p^l, w)}{\partial p^i}$$

を **i 財価格の j 財価格による限界間接代替率** (marginal rate of indirect substitution of price j for price i) といい，簡単に $MRS_{p^ip^j}$ と書く．(1)式を用いて(2)を求めると

(3)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial p^i}=\frac{\partial U(p,w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial p^j}$$
$$\left(MRS_{p^ip^j}=\frac{MU_{p^i}}{MU_{p^j}}\right)$$

である．

同様に，所得の限界効用が 0 でなければ，所得による限界間接代替率が定義される．つまり，$\dfrac{\partial U(p,w)}{\partial w} \neq 0$ のとき，価格ベクトル p のある近傍の上で定義された可微分な実数値関数 η で，近傍内の任意の価格ベクトル q に対し

(4)
$$U(q, \eta(q))=t$$

を満足するものが存在する．このとき，

(5) $$-\frac{\partial\eta(p)}{\partial p^i}$$

を i **財価格の所得による限界間接代替率** (marginal rate of indirect substitution of income for price i) といい，簡単に MRS_{p^iw} と書く．(4)式を用いて(5)を求めると

(6) $$-\frac{\partial\eta(p)}{\partial p^i}=-\frac{\partial U(p,w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial w}$$

$$\left(MRS_{p^iw}=-\frac{MU_{p^i}}{MU_w}\right)$$

である．□

限界間接代替率の経済学的意味はつぎのようになる．まず，i 財価格の j 財価格による限界間接代替率 $MRS_{p^ip^j}$ は，i 財価格が1円上昇したとき，消費者が価格変化以前の状態と無差別であるために j 財価格が何円下落しなければならないかを示している．他方，i 財価格の所得による限界間接代替率 MRS_{p^iw} は，i 財価格が1円上昇したとき，消費者が価格変化以前の状態と無差別であるためには所得を何円増やさなければならないかを示している．

3.6　図［間接無差別曲線］　各 $t\in R$ に対し，集合 $U^{-1}(t):=\{(p,w)|\ U(p,w)=t\}$ を間接無差別集合あるいは**間接無差別曲線** (indirect indifference curve) という．U は0次同次だから，間接無差別曲線を描く場合，所得を一定とするか，もしくは，いずれか1財の価格を一定とする．前者は所得一定の下で価格相互間の間接無差別曲線となる．これを**価格無差別曲線** (prices indifference curves) とよぼう．他方，後者は，ある1財の価格が一定の下で，価格と所得相互間の間接無差別曲線となる．これを**価格・所得無差別曲線** (price-income indifference curves) とよぶことにする．$l=2$ の場合，平面上に3種類の間接無差別曲線を描くことができる．価格無差別曲線と2種類の価格・所得無差別曲線である．下図のパネル①では価格無差別曲線を，またパネル②では第2財の価格を一定とした価格・所得無差別曲線が描かれている．これらの間接無差別曲線の形状は，命題3.3の②による間接効用関数の準凸性と合致するもので

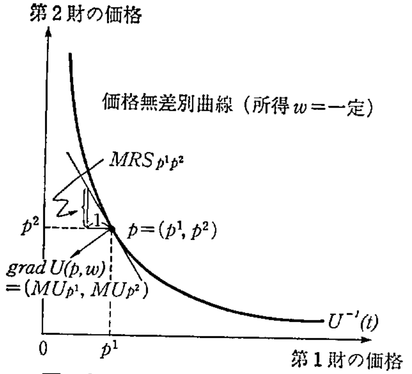


図 3.6　パネル ①

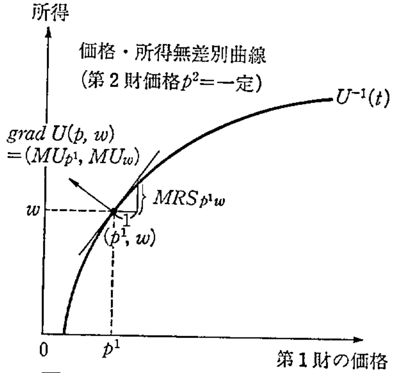


図 3.6　パネル ②

ある．

4　間接効用の最小化問題
——需要理論における双対性 I——

間接効用関数 U が与えられたとき，ある消費ベクトル $x \in X$ を所与と考え，x を購入しうるような（つまり，$x \in B(q, b)$ となるような）価格ベクトル q と所得 b の中で，間接効用 $U(q, b)$ を最小化する問題を考察の対象にできる．間接効用の最適化問題においては，最小化問題を考える方が自然である．それは，価格ベクトル q を固定しておいて所得 b を増大させるとき，x を購入しうるような (q, b) の間接効用は一般に増大し，最大値問題の解の存在が保証されないからである．

実は，間接効用の最小化問題を効用最大化問題のデュアルと考えると，需要理論における古典的双対性の第1命題を得る．

4.1　双対性 I ［効用最大化と間接効用最小化］

① **主要問題**（プライマル） ［効用最大化］	③ **双対問題**（デュアル） ［間接効用最小化］

$u: X \to R, p \in R^l_{++}, w \in R_+$ が所与 max　$u(z)$ 制約　$p \cdot z \leqq w$	$U: R^l_{++} \times R_+ \to R, x \in X$ が所与 min　$U(q, b)$ 制約　$q \cdot x \leqq b$

ここで「min $U(q, b)$, 制約 $q \cdot x \leqq b$」は,「制約条件 $q \cdot x \leqq b$ を満たす $(q, b) \in R^l_{++} \times R_+$ の中で, 実数値関数 $U(q, b)$ の値を最小にする (q, b) を求めよ」と読む. この2つの最適化問題にいかなる双対性があるかを示すのがつぎの命題である.

4.2 命題［双対性 I］

① 価格ベクトル p, 所得 w の下での主要問題の解 $x \in X$ を所与とする双対問題を考えると, (p, w) は双対問題の解となっている.

つまり,

$$x \in f(p, w) \Rightarrow U(p, w) = \min\{U(q, b) \mid q \cdot x \leqq b\}$$

である.

② 消費ベクトル $x \in X$ の下での双対問題の解 (p, w) を所与とする主要問題を考えると, x は主要問題の解となっている. ただし, x を需要ベクトルとするような価格ベクトル q_0 と所得 b_0 があるものとする.

つまり, ある (q_0, b_0) に対し $x \in f(q_0, b_0)$ のとき,

$$U(p, w) = \min\{U(q, b) \mid q \cdot x \leqq b\} \Rightarrow u(x) = \max\{u(z) \mid p \cdot z \leqq w\}$$

である.

証明 ① $x \in f(p, w)$ とする. $q \cdot x \leqq b$ を満たす任意の q, b に対し

$$\begin{aligned} U(q, b) &= \max\{u(z) \mid q \cdot z \leqq b\} \\ &\geqq u(x) \quad (\because\ q \cdot x \leqq b) \\ &= U(p, w) \end{aligned}$$

よって, $U(p, w) = \min\{U(q, b) \mid q \cdot x \leqq b\}$.

② $U(p, w) = \min\{U(q, b) \mid q \cdot x \leqq b\}$, $x \in f(q_0, b_0)$ とする. このとき, x が主要問題の解, つまり, $x \in f(p, w)$, とならなければ, $p \cdot x \leqq w$ より

$$U(p,w)>u(x)=U(q_0,b_0)$$

である．ところが $q_0\cdot x\leqq b_0$ だから，(p,w) が x を所与とする双対問題の解であったことに反する．▮

効用最大化問題の解集合は需要集合 $f(p,w)$，解を目的関数に代入すると間接効用 $U(p,w)$ である．これに対し，間接効用最小化問題の解集合を $g(x)$ と置き，命題4.2を異なった形式で表現してみよう．需要 $f(p,w)$ に対し，逆需要 (inverse demand) を

$$f^{-1}(x):=\{(p,w)\in R^l{}_{++}\times R_+ |\ x\in f(p,w)\}$$

と定める．①は，$x\in f(p,w)$ ならば $(p,w)\in g(x)$，②は，$(p,w)\in g(x)$ ならば $x\in f(p,w)$，となる．したがって，命題の主張は，$g(x)=f^{-1}(x)$，つまり，「間接効用最小化問題の解は逆需要」ということになる．

また，①は，間接効用最小化問題の解を目的関数に代入すれば効用 $u(x)$ が得られること，換言すると，任意の需要ベクトル x の効用が，x を所与とする双対問題の，間接効用の最小値で与えられることを示している．以上の注釈をまとめてつぎの系を得る．

4.3 系 ① 間接効用最小化問題の解は逆需要，つまり，$g(x)=f^{-1}(x)$ である．

② $x\in f(p,w)$ のとき，

$$u(x)=\min\{U(q,b)|\ q\cdot x\leqq b\}$$
$$(=U(p,w),\ (p,w)\in g(x))$$

である．

5 限界間接代替率と相対需要量

x を任意の消費ベクトル $x\in X$ とし，$x\neq 0$ とする．このとき，$q\cdot x\leqq b$ を満たす任意の価格ベクトル $q\in R^l{}_{++}$ 所得 $b\geqq 0$ に対し，$b>0$ となるから，x を所与とする間接効用最小化問題の解 (p,w) は内点解である．よって，間接効用関数が U が (p,w) において1回連続可微分ならば，Khun-Tucker の定理より，ある $\mu\geqq 0$ に対し

$$\mathrm{grad}(-U(p,w))+\mu\,\mathrm{grad}(w-p\cdot x)=0$$

となる．(ここで grad (・) は，関数 (・) のグラディエント・ベクトル，つまり，偏微係数からなる列ベクトル，を表す.) よって，

(1) $$(\forall i=1,\cdots,l)\ \frac{\partial U(p,w)}{\partial p^i}=-\mu x^i,$$

(2) $$\frac{\partial U(p.w)}{\partial w}=\mu$$

を得る．(2)は間接効用の最小化問題にかかわる Khun-Tucker の Lagrange 乗数 μ が，所得の限界効用であることを示している．効用関数 u が局所非飽和性を満たすとき，$\partial U(p.w)/\partial w=\mu>0$ である．したがって，(1)より，消費量が正となっている財 j ($x^j>0$) については，価格の限界効用 $\partial U(p,w)/\partial p^j$ が負になっている．そこで，$x^j\neq 0$ となる任意の $j=1,\cdots,l$ に対し，(1)から

(3) $$\frac{x^i}{x^j}=\frac{\partial U(p.w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial p^j}\left(=MRS_{p^ip^j}\right),$$

が成立し，さらに(1)と(2)より

(4) $$x^i=-\frac{\partial U(p,w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial w}\left(=MRS_{p^iw}\right)$$

が成立する．((3)，(4)とも $i=1,\cdots,l$ については任意である.)

(3)式と(4)式は，間接効用が最小化されているとき，i 財の j 財に対する相対消費量は，i 財価格の j 財価格による限界間接代替率に，i 財の消費量は，i 財価格の所得による限界間接代替率に，それぞれ等しくなっていなければならないことを示している．これらはいずれも，効用最大化問題の解の必要条件として得られる「i 財の j 財による限界代替率は，i 財の j 財に対する相対価格を上回らない」という条件に対応するものである (効用最大化問題では $w>0$ であってもコーナー解，つまりある i に対し，$x^i=0$ となる可能性があることに注意).

(3)，(4)両式の経済学的意味を考えてみよう．間接効用最小化問題では，消費ベクトル x を固定し，それを購入しうるような価格ベクトルと所得を考察するから，$x^j\neq 0$ のとき，相対消費量 x^i/x^j の意味を，$1\times x^i=(x^i/x^j)\times x^j$ のト

リビアルな等式から考えることができる．つまり，この等式の左辺は，i 財の価格が1円変化したときの支出の変化額で，それと右辺とが等しい．したがって，x^i/x^j は，i 財価格1円の変化と同額の支出変化をもたらす j 財価格の変化額．換言すれば，i 財の価格が1円変化したとき，消費者の支出額を変化させないために要する j 財価格の変化額を表す．

(3)式の意味は，間接効用が最小になっているならば，i 財価格が1円変化したとき消費者の支出額を変化させないために要する j 財価格の変化の大きさは，消費者が価格変化以前の状態と無差別であるために要する j 財価格の変化の大きさと等しくなければならないということである．

同様に(4)式は，間接効用が最小になっているとき，i 財価格1円の変化がもたらす支出額の変化の大きさは，消費者が価格変化以前の状態と無差別であるために必要な所得変化の大きさに等しいことを示している．

(3)，(4)式の解釈を以上のように与えると，これらの式を直観的な議論によって導くことも容易である．例えば，(4)式の場合，p^i 1円の増加は x^i 円の支出額の変化をもたらすが，消費者の効用を変えないためには MRS_{p^iw} 円の所得の増加がなければならないから，もし $x^i<MRS_{p^iw}$ であったならば p^i を1円増加させ所得を x^i 円増加させることにより，逆に $x^i>MRS_{p^iw}$ であったならば p^i を1円下落させ所得を x^i 円減少させることにより，いずれの場合も消費者の間接効用をさらに低下させることが可能になり，間接効用を最小化していたことと矛盾する．(3)式が成立する理由についても同様な直観的議論から説明できる．

命題4.2の①と，間接効用最小化の必要条件である(3)，(4)式とから，各財の相対需要量および需要量についてつぎの表現式を得る．

5.1 定理［ハウタッカーとロワの需要表現］ 効用関数 u は局所非飽和性を満たし，間接効用関数 U は $p\in R^l_{++}, w\in R_+$ において可微分，$x\in f(p,w), x\neq 0, L:=\{1,\cdots,l\}$ とする．

①［ハウタッカーの相対需要表現式］ 任意の $i\in L$ と，$x^j\neq 0$ である任意の $j\in L$ に対し

$$\frac{x^i}{x^j}=\frac{\partial U(p,w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial p^j}\left(=MRS_{p^ip^j}\right)$$

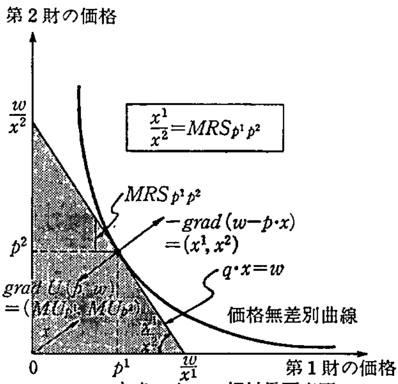
が成立する．

② ［ロワの需要表現式］　任意の $i\in L$ に対し

$$x^i=-\frac{\partial U(p,w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial w}\left(=MRS_{p^iw}\right)$$

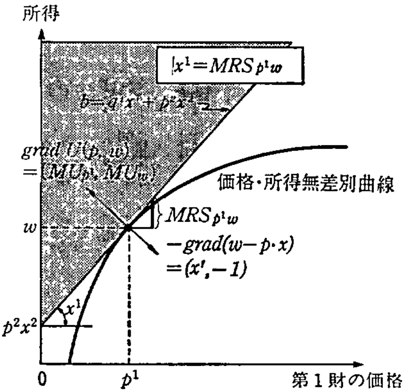
が成立する．

5.2　図 ［ハウタッカーとロワの需要表現］　下図のパネル①はハウタッカーの需要表現式，②はロワの需要表現式を図示している．



ハウタッカーの相対需要表現

図　5.2　パネル　①



ロワの需要表現

図　5.2　パネル　②

パネル①では需要ベクトル $x=(x^1,x^2)$ を所与とし，所得 w を一定としたときの価格無差別曲線が描かれている．図の陰影部は x を購入可能な価格ベクトルの集合である．x が価格ベクトル p，所得 w のときに需要されていれば，命題 4.2 の①から，この集合内の価格で間接効用を最小化するのは p である．したがって，p において価格無差別曲線と価格空間における予算線とが接している．これは時計の針の回転方向に見た予算線の勾配 x^1/x^2 と，p を通る価格無差別曲線への p における接線の勾配 $MRS_{p^1p^2}$ とが等しいことを意味する．この図では grad $U(p,w)=(MU_{p^1},MU_{p^2})$，$-$grad $(w-p\cdot x)=(x^1,x^2)$

である.

パネル②では，w の代わりに第2財の価格 p^2 を一定とした価格・所得無差別曲線が描かれている．図の陰影部は需要ベクトル x を購入できるような第1財価格と所得の組からなる集合である．この集合内で間接効用を最小化するのが (p^1, w) であり，この点において価格・所得空間内の予算線と価格・所得無差別曲線とが接している．したがって，予算線の勾配 x^1 と価格・所得無差別曲線の勾配 MRS_{p^1w} とが等しくなる．この図では grad $U(p, w)=(MU_{p^1}, MU_w)$, $-\mathrm{grad}(w-p\cdot x)=(x^1, -1)$ である.

5.3 注［間接効用関数の可微分性］ 定理5.1のハウタッカーとロワの需要表現をするには，間接効用関数が (p, w) において可微分でなければならない．もちろん，効用関数が可微分であれば，(p, w) において需要ベクトルが一意的であり，$f(p, w)$ が (p, w) において可微分となるとき，間接効用関数 U も (p, w) において可微分となる．効用関数が2回連続可微分であり，f が (p, w) の近傍において関数であるとき，f が (p, w) において可微分となる条件としては，効用関数の2階微分 $D^2u(x)$ が，価格ベクトル p と直交する部分線型空間上で負値定符号となること，が知られている (Debreu (1972) 参照)．しかし，ある (p, w) において間接効用が可微分となるために，効用関数の可微分性は必要ではない．実際，$X=R^2_+, u: X\to R$ を，$u(x^1, x^2):=\min\{5(x^1+10)+x^2, (x^1+10)+5x^2\}$ としよう．このとき，$x^1+10=x^2$ を満たす任意の (x^1, x^2) において u は可微分ではない．しかし，$p^1=p^2>0, \frac{w}{p^1}>10$, を満たす任意の (p, w) を取ると，その近傍で

$$f(p^1, p^2, w)=\left(\frac{w-10p^2}{p^1+p^2}, \frac{w+10p^1}{p^1+p^2}\right)$$

であり，u は $f(p^1, p^2, w)$ において可微分ではないが,

$$U(p^1, p^2, w)=\frac{6(w+10p^1)}{p^1+p^2}$$

となり，U と f は (p, w) の近傍で可微分である.

5.4 文献注［需要理論における双対性 I.］ ①［双対性］ 消費量を価格の関数とみるのに対し，双対的に価格を消費量の関数とみることができることは

Hotelling (1932) が指摘している．効用最大化問題に間接効用最小化問題を明示的に対比させ，命題4.2の①が成立することを最初に示したのは Houthakker (1952) である．Roy (1942; 1947) は，効用最大化問題の解としての需要ベクトル x に，それが需要されるような価格ベクトルと所得，つまり逆需要を対比し，価格ベクトルと所得が逆需要になるための条件を間接効用を用いて表現した．系4.3の①で明示したように，実質的には Roy も間接効用最小化問題を考察していたと言うことができる（文献注3.2参照）．

② ［相対需要の表現］　定理5.1の①における表現式を導出したのは Houthakker (1952, p. 159) である．

③ ［ロワの恒等式］　定理5.1の②を最初に導出したのは Roy (1942) である．上記①で述べたように，ロワはこの等式を価格ベクトルと所得が逆需要になるための必要条件として導いた．しかし最近では，この等式を「ロワの恒等式」とよぶ人々が少なくない．ハウタッカーもロワもこれらの等式を恒等式とはいわない．最適化問題の解の必要条件を恒等式とよぶのは適切ではないだろう．（以下の7.5を参照せよ．）

6　消費支出の最小化問題
——需要理論における双対性II——

需要理論における古典的双対性の第2命題は，所与の効用水準を達成する消費ベクトルの中で消費支出を最小化する問題を考察することによって与えられる．

6.1　双対性II［効用最大化と消費支出最小化］

① **主要問題**（プライマル）	② **双対問題**（デュアル）
$u: X \to R, p \in R^l{}_{++}$	$u: X \to R, p \in R^l{}_{++}$
［効用最大化］	［消費支出最小化］
$w \in R_+$ が所与	効用水準 $\alpha \in R$ が所与
max　$u(z)$	min　$p \cdot z$

制約　$p\cdot z \leqq w$	制約　$u(z) \geqq \alpha$

6.2　定義［ヒクシアン需要，補償需要］　効用関数 $u: X \to R$，価格ベクトル $p \in R^l_{++}$ の下で，所与の効用水準 α を達成する消費ベクトルの内，消費支出を最小化するものを**ヒクシアン需要**ベクトルという．これら全体をヒクシアン需要集合とよび，$h(p, \alpha)$ で表す．ヒクシアン需要 (Hicksian demand) を補償需要 (compensated demand) ともよぶ．

換言すれば，上記②の解集合がヒクシアン需要集合 $h(p, \alpha)$ である．上記①の解集合は需要集合 $f(p, w)$ であるが，特にヒクシアン需要と対比するときは，これを**マーシャリアン需要** (Marshallian demand) ともよぶ．□

6.1の2つの最適化問題にいかなる双対性があるかを示すのがつぎの命題である．

6.3　命題［双対性II］　$p \in R^l_{++}, x(\neq 0) \in X = R^l_+$，効用関数 $u: X \to R$ は連続で局所非飽和性を満たし，$(\forall z \in X)\ u(z) \geqq u(0)$ とする．このとき，

①　x が効用最大化問題の解であれば，x は効用水準 $\alpha = u(x)$ とおいたときの，消費支出最小化問題の解である．つまり，$x \in f(p, w) \Rightarrow x \in h(p, u(x))$．

②　x が消費支出最小化問題の解であれば，x は所得 $w = p\cdot x$ とおいたときの，効用最大化問題の解である．つまり，$x \in h(p, \alpha) \Rightarrow x \in f(p, p\cdot x)$．また，$u(x) = \alpha$ である．

証明　①　$x \in f(p, w)$ とする．$x \notin h(p, u(x))$ ならば，$u(z) \geqq u(x)$，$p\cdot z < p\cdot x$ を満たす $z \in X$ が存在する．u の局所非飽和性により，$u(y) > u(z)$ かつ $p\cdot y < p\cdot x$ を満たす $y \in X$ が z の近傍に存在する．$u(y) > u(x)$ だから，x が効用最大化問題の解であったことに反する．よって，$x \in h(p, u(x))$．

②　$x \in h(p, \alpha)$ とする．$x \notin f(p, p\cdot x)$ ならば，$u(z) > u(x), p\cdot z \leqq p\cdot x$ を満たす $z \in X$ が存在する．$u(z) > u(x) \geqq u(0)$ だから $z \neq 0$ である．任意の $0 < t < 1$ について $tz \in X = R^l_+$，かつ $p\cdot(tz) < p\cdot z \leqq p\cdot x$ である．しかし，u の連続性から，t が十分1に近ければ $u(tz) > u(x)$ となり，x が効用水準 α を下回らない消費ベクトルの中で消費支出を最小化していたことに反する．よって，

$x\in f(p, p\cdot x)$. 同様な議論により $u(x)=\alpha$ を得る. ∎

6.4　定義［支出関数］　消費支出最小化問題の解を目的関数に代入することによって得られる関数, つまり,

$$e(p,\alpha):=\min\{p\cdot z|\ u(z)\geqq\alpha\}$$
$$(=p\cdot x,\ \ x\in h(p,\alpha))$$

により定義される関数 e を**支出関数** (expenditure function) とよぶ. e の定義域は $R^l{}_{++}\times u(X)$ である. $e(\cdot,\alpha): R^l{}_{++}\to R$ が p において可微分であるとき $\partial e(p,\alpha)/\partial p^i$ を **i 財価格の限界支出** (marginal expenditure of price i) とよび, ME_{p^i} とも書く.

6.5　命題［支出関数の基本的性質］

① $e(\cdot,\alpha)$ は1次同次.

② $e(\cdot,\alpha)$ は凹関数.

証明　①　$p\in R^l{}_{++}, t>0$ とする. $u(z)\geqq\alpha$ を満たす z に対し, $tp\cdot x\leqq tp\cdot z \Leftrightarrow p\cdot x\leqq p\cdot z$ だから, $x\in h(tp,\alpha)\Leftrightarrow x\in h(p,\alpha)$ である. よって, $e(tp,\alpha)=\min\{tp\cdot z|\ u(z)\geqq\alpha\}=t\ \min\{p\cdot z|\ u(z)\geqq\alpha\}=te(p,\alpha)$.

②　$p, q\in R^l{}_{++},\ 0\leqq t\leqq 1$ とし, $p_t:=tp+(1-t)q$ と置く. このとき, 任意の $x\in h(p_t,\alpha)$ について

$$\begin{aligned}e(p_t,\alpha)&=p_t\cdot x\\&=tp\cdot x+(1-t)q\cdot x\\&\geqq te(p,\alpha)+(1-t)e(q,\alpha)\end{aligned}$$

が成立する. ∎

上記の第2の双対性命題は, 効用が局所非飽和であり, 消費ベクトル $x\in X$ がその任意の近傍にそれ自身よりも安い消費ベクトルを持つ場合, x が所得 w の下で（マーシャリアン）需要ベクトルとなることと, 効用水準 $u(x)$ の下でヒクシアン需要ベクトルとなることとが同値であることを示している. 消費支出最小化問題の場合は, さきの間接効用最小化問題と異なり, 解であるための必要条件からただちにマーシャリアン需要やヒクシアン需要の表現式が得られるわけではない. その理由は, 効用最大化問題も消費支出最小化問題も, 解で

あるための必要条件は，効用関数のグラディエント・ベクトル（各財の限界効用から構成されるベクトル）の方向を価格ベクトルの方向に関連づける条件だからである．需要の表現式を得るには，間接効用の最小化問題のように，価格変化による最適化問題を介在させる必要がある．そこで，消費支出最小化問題のつぎのような双対問題を考える．

6.6 ［消費支出最小化問題の双対問題］

③双対問題のデュアル
支出関数 e と $x \in X$ が所与
$\max(e(q, u(x)) - q \cdot x)$

6.1 の②とこの③の問題の双対性は簡単に確認できる．$x \in X$ が②の解，つまり $x \in h(p, \alpha)$ であれば，p は x を所与とする③の解である．$(\forall q \in R^l{}_{++})$ $e(q, u(x)) - q \cdot x \leqq 0 = e(p, u(x)) - p \cdot x$ が成立するからである．逆に，価格ベクトル q と所得 $q \cdot x$ の下で需要ベクトルとなる $x \in X$ を所与とする③の解を p とすれば，x は②の解，つまり $x \in h(p, u(x))$ となる．なぜならば，$x \in f(q, q \cdot x)$ だから命題 6.3 の①より，$x \in h(q, u(x))$ となり，したがって，$0 \geqq e(p, u(x)) - p \cdot x \geqq e(q, u(x)) - q \cdot x = 0$ となり，$e(p, u(x)) = p \cdot x$ が成立するからである．

6.7 命題［双対性 II′］ 効用関数 $u: X \to R$ は連続で局所非飽和性を満たすものとする．

① $x \in X$ が $p \in R^l{}_{++}$ および α を所与とする消費支出最小化問題の解，つまり $x \in h(p, \alpha)$，ならば，p は上記③の解となる．

② ある需要ベクトル $x \in X$ を所与とする③の解が p であれば，x は価格ベクトル p，効用水準 $u(x)$ の下で消費支出を最小化する，つまり，$x \in h(p, u(x))$ となる．□

$x \in X$ が与えられたとき，$p \in R^l{}_{++}$ は双対問題のデュアル③の解であるとする．関数 $e(\cdot, \alpha), \alpha = u(x)$，が p において可微分であれば，p が③の解となるための必要条件から

$$\mathrm{grad}(e(p, u(x)) - p\cdot x) = 0$$

とならなければならない．よって，$x = \mathrm{grad}\ e(p, u(x))$ を得る．これがヒックス＝マッケンジーの需要表現式である．

6.8　定理［ヒックス＝マッケンジーの需要表現式］　効用関数 $u: X \to R$, $X = R^l_+$, は連続で局所非飽和性を満たし，かつ $(\forall z \in X)$ $u(z) \geqq u(0)$，であるとする．$p \in R^l_{++}$. このとき，任意の $x \in f(p, w) = h(p, \alpha)$, $w = p\cdot x$, $\alpha = u(x)$, に対し，支出関数 $e(\cdot, \alpha)$ が p で可微分ならば

$$x = \mathrm{grad}\ e(p, \alpha)$$
$$\left(\text{つまり，}(\forall i = 1, \cdots, l)\ x^i = \frac{\partial e(p, \alpha)}{\partial p^i}\right)$$

が成立する．

6.9　注［$X \neq R^l_+$ の場合］　上記の命題6.3，6.7，定理6.8では，$X = R^l_+$ として議論を進めたが，この仮定は不必要である．必要なのは所与の $p \in R^l_{++}$ と $x \in X$ に対し，$p\cdot x$ よりも安い消費ベクトルの列 $x_n \in X$ で，x に収束するもの（「チーパー・ポイント」）が存在することである．任意の $p \neq 0$ と任意の $X \subset R^l$ とに対し，チーパー・ポイントを持たないような消費ベクトル $x \in X$ の集合は，R^l 内の可算個の超平面に含まれてしまうという意味で，多数存在しない（山崎（1986，定理8.1，p. 103）参照）．したがって，消費集合 $X \subset R^l$ がいかなるものであっても（例えば，幾つかの財が非分割財であっても），所与の価格ベクトル $p \in R^l_{++}$ の下で，双対性命題6.3とマッケンジーの需要表現式とは，予算集合を空としないようなほとんどすべての所得 $w \in R$ について（つまり，ルベーグ測度ゼロの集合を除いて）成立する．

7　双対性命題の相互関係

以上で，効用最大化問題を主要問題とする2種類の双対問題——間接効用最小化問題と消費支出最小化問題——それぞれについて解説し，双対問題の解あるいは双対問題のデュアルの解に対する必要条件として，ロワやヒックス＝マッケンジーの需要表現が得られる事実を説明した．そこで，つぎに，2種類の双対問題の相互関係を説明することにしたい．

7.1 命題［間接効用，支出関数，マーシャリアン需要，ヒクシアン需要の相互関係］ 効用関数 $u: X \to R$ は命題6.3の各条件を満たすものとし，$p \in R^{l}_{++}$, $w \in R_{+}$ とする．このとき，

① $U(p, e(p, \alpha)) = \alpha$

② $e(p, U(p, w)) = w$

③ $f(p, w) = h(p, U(p, w))$

④ $h(p, \alpha) = f(p, e(p, \alpha))$

が成立する．

証明 ① $e(p, \alpha) = p \cdot x$ を満たす $x \in h(p, \alpha)$ が存在するが，命題6.3の②より，$x \in f(p, p \cdot x)$ かつ $\alpha = u(x)$ である．よって，

$$U(p, e(p, \alpha)) = U(p, p \cdot x) = u(x) = \alpha$$

が成立する．

② $U(p, w) = u(x), w = p \cdot x,$ となる $x \in f(p, w)$ が存在するが，命題6.3の①より，$x \in h(p, u(x))$，つまり $p \cdot x = e(p, u(x))$ が成立する．よって，$e(p, U(p, w)) = e(p, u(x)) = p \cdot x = w$ が成立する．

③ 命題6.3の①より $f(p, w) \subset h(p, U(p, w))$．同命題の②より $x \in h(p, U(p, w))$ ならば $x \in f(p, p \cdot x)$．ところが，$p \cdot x = e(p, U(p, w)) = w$（最後の等号は上の②より）となるから，$x \in f(p, w)$．よって，$h(p, U(p, w)) \subset f(p, w)$．

④ 命題6.3の②より $h(p, \alpha) \subset f(p, e(p, \alpha))$．同命題の①より $x \in f(p, e(p, \alpha))$ ならば $x \in h(p, u(x))$．ところが $u(x) = U(p, e(p, \alpha)) = \alpha$（最後の等号は上の①より）となるから，$x \in h(p, \alpha)$．よって，$f(p, e(p, \alpha)) \subset h(p, \alpha)$．▌

価格ベクトル p の下で，上の①は，「効用水準 α を実現するために最小限必要な所得によって達成可能な最大効用は α である」ことを意味し，②は「所得 w によって実現できる最大の効用水準を達成するために必要な最小限の所得は w である」ことを意味する．今，関数 $U_p(w) := U(p, w)$ と $e_p(\alpha) := e(p, \alpha)$ を定めると，①は U_p が e_p の逆関数であること，②は e_p が U_p の逆関数となることを示している．また，③は，マーシャリアン需要がそれと同じレベルの効用水準におけるヒクシアン需要に一致すること，④は，ヒクシア

ン需要がその支出額と同額の所得に対するマーシャリアン需要と等しいことを示している.

①と②の命題を別の角度から眺めると，これは効用水準を固定したときに，間接無差別曲線と支出関数のグラフとが一致していることを主張している．なぜならば，$U(q,b)=\alpha$ となる間接無差別曲線上では，②より，$b=e(q,U(q,b))=e(q,\alpha)$ となるから，(q,b) は支出関数 $e(\cdot,\alpha)$ のグラフに属し，逆に，(q,b) が $e(\cdot,\alpha)$ のグラフ上にあり $b=e(q,\alpha)$ であれば，①より，$\alpha=U(q,e(q,\alpha))=U(q,b)$ となり，(q,b) はこの間接無差別曲線上にあるからである.

7.2 系［間接無差別曲線と支出関数のグラフ］ 効用水準 α を固定したとき，間接無差別曲線と支出関数のグラフとは一致する．つまり，

$$\{(q,b)\in R^l{}_{++}\times R_+ \mid U(q,b)=\alpha\}$$
$$=\{(q,b)\in R^l{}_{++}\times R_+ \mid e(q,\alpha)=b\}.\ \Box$$

命題7.1をさらに異なった形で表現することにより，ロワとヒックス＝マッケンジーの需要表現の相互関係を的確に把握できる.

7.3 命題［間接効用と支出関数の微係数］ 効用関数 $u: X\to R$ は命題6.3の諸条件を満たすものとする．$p\in R^l{}_{++}, w>0, w=e(p,\alpha)$ とし，U は (p,w) において，e は (p,α) においてそれぞれ可微分であるとする．このとき，各 $i=1,\cdots,l$ に対し

① $$-\frac{\partial U(p,w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial w}=\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial p^i}\quad (MRS_{p^iw}=ME_{p^i})$$

② $$-\frac{\partial U(p,w)}{\partial p^i}=\frac{\partial e(p,\alpha)/\partial p^i}{\partial e(p,\alpha)/\partial \alpha}\quad (-MU_{p^i}=ME_{p^i}/ME_\alpha)$$

③ $$\frac{\partial U(p,w)}{\partial w}\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial \alpha}=1\quad (MU_w\times ME_\alpha=1)$$

が成立する.

証明 ① 命題7.1の①より $U(p,w)=U(p,e(p,\alpha))=\alpha$ となるから

$$\frac{\partial U(p,w)}{\partial p^i}+\frac{\partial U(p,w)}{\partial w}\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial p^i}=0$$

である．よって，

$$-\frac{\partial U(p,w)/\partial p^i}{\partial U(p,w)/\partial w}=\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial p^i}.$$

② 命題7.1の①，②より，$U(p,w)=\alpha$ であり，$e(p,U(p,w))=w$ だから

$$\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial p^i}+\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial \alpha}\frac{\partial U(p,w)}{\partial p^i}=0$$

となる．よって，

$$-\frac{\partial U(p,w)}{\partial p^i}=\frac{\partial e(p,\alpha)/\partial p^i}{\partial e(p,\alpha)/\partial \alpha}.$$

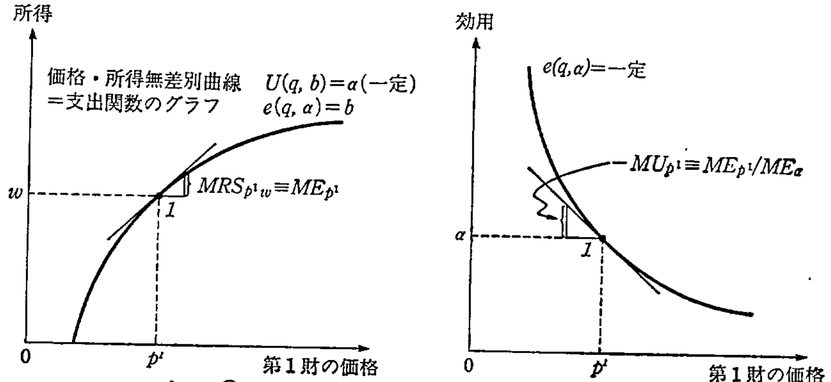
③ $\varphi(\alpha):=U(p,e(p,\alpha))$ と定義すると，命題7.1の①より φ は恒等写像となる．したがって，

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\partial U(p,w)}{\partial w}\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial \alpha}=1$$

を得る．▌

上の①は，i 財価格の所得による限界間接代替率が，i 財価格の限界支出に等しいこと，②は，i 財価格の限界効用を価格の下落に対して測定すると，i 財価格1円の変化がもたらす最小支出の変化と同額の変化を生じさせる効用水準の変化に一致すること，③は，効用水準 α 1単位の変化による最小支出の変化額（=効用の限界支出 ME_α）は，所得の限界効用の逆数に一致することを示している．

7.4 図［間接効用と支出関数の微係数］



パネル ①　　パネル ②

上図のパネル①と②は，命題7.3の①と②にそれぞれ対応するものである．

7.5 ［ロワとヒックス＝マッケンジーの需要表現式の同値性］　命題7.3の①は，ロワとヒックス＝マッケンジーの需要表現式が同値であることを示している．しばしば，ヒックス＝マッケンジーの表現式はヒクシアン需要を示し，ロワの表現式はマーシャリアン需要を示すという解説が行なわれる．その直接の理由は，ヒックス＝マッケンジーの表現式から，価格 i の限界支出 ME_{p^i} は i 財の需要量と一致するが，ME_{p^i} は (p, α) の関数としてヒクシアン需要 $h^i(p, \alpha)$ であり，他方，ロワの表現式から，価格 i の所得による限界間接代替率 $MRS_{p^i w}$ は i 財の需要量 x^i と一致するが，$MRS_{p^i w}$ は (p, w) の関数としてマーシャリアン需要 $f^i(p, w)$ となるからである．しかし，この事実を余りにも機械的に理解することは好ましくない．例えば，ヒックス＝マッケンジーの表現式の場合，$u(x)=U(p, w)=\alpha$ とすれば，$x^i=\partial e(p, \alpha)/\partial p^i=\partial e(p, U(p, w))/\partial p^i$ となる．したがって，この右辺は (p, w) の関数 $(p, w)\mapsto\partial e(p, \alpha)/\partial p^i$, $\alpha=U(p, w)$，としてマーシャリアン需要 $f^i(p, w)$ を表現するからである．同様に，ロワの表現式がヒクシアン需要を示すものと考えることも可能である．

さて，教科書に見るロワの需要表現式の証明は，命題7.3の① $MRS_{p^i w}=ME_{p^i}$ にヒックス＝マッケンジーの需要表現 $x^i=ME_{p^i}$（これを「シェパードの補題」とよんでいる）を代入するものである（例えば，Varian (1978; 1986, p. 140) 参照）．この関係式は $w=e(p, \alpha)$ を満足するすべての (p, w) について成立することから，「ロワの恒等式」とよぶ人が多くなった．しかし，「恒等式」という表現は，この等式が成立する理由を的確に理解することを防げていると私は思う．恒等的に成立しているのは，$MRS_{p^i w}=ME_{p^i}$ である．その理由は，系7.2で示したように，間接無差別曲線と支出関数のグラフとが一致するからである．$MRS_{p^i w}$ や ME_{p^i} と消費量 x^i とが一致するのは，それが間接効用を最小化する場合や消費支出最小化問題のデュアルの解となる場合であり，最適化問題の解の必要条件として得られるのである．

7.6 ［双対問題とスルツキー方程式］　需要理論における古典的命題のほとんどすべてがスルツキー方程式とその諸性質に帰着する．本稿で解説した2種類の

双対性およびそれから導かれる2種類の需要表現式——ロワの需要表現式とヒックス＝マッケンジーの需要表現式——から，スルツキー方程式を導く3種類のルートがあることが明白である．①効用最大化問題の解の必要条件から導く方法，②間接効用最小化問題の必要条件と双対性命題Iより得られたロワの需要表現式から導く方法，③消費支出最小化問題に対する双対問題の解の必要条件と双対性命題II′より得られたヒックス＝マッケンジーの需要表現式から導く方法，の3種類である．言うまでもなく①は Slutsky (1915; 1952), Hicks (1939) 等による伝統的アプローチである．②は Houthakker (1952) が示したアプローチであり，③は McKenzie (1957) が導入したアプローチである．スルツキー方程式の導出については③のアプローチがベストである．導出過程は以下に示す通り単純である．

$p \in R^l_{++}, w>0$，とし，$f(p,w)$ が (p,w) で可微分であるとすると，命題7.1から $h(p,\alpha)=f(p,e(p,\alpha)), w=(p,\alpha)$ である．したがって，任意の $i,j=1,\cdots,l$ に対し，

$$\begin{aligned}\frac{\partial h^i(p,\alpha)}{\partial p^j}&=\frac{\partial f^i(p,w)}{\partial p^j}+\frac{\partial f^i(p,w)}{\partial w}\frac{\partial e(p,\alpha)}{\partial p^j}\\&=\frac{\partial f^i(p,w)}{\partial p^j}+x^j\frac{\partial f^i(p,w)}{\partial w}\end{aligned}$$

を得る．この等式の右辺の第1項が，左辺から右辺の第2項を引いた値に等しいというのがスルツキー方程式である．マッケンジーのアプローチが優れているのは，このようにその導出が極めて簡単であるということと，さらに，代替項 $\partial h^i(p,\alpha)/\partial p^j$ の性質を効用・選好の凸性から導く必要がないという点である．スルツキーやヒックスによる①の方法では効用の凸性が不可欠である．このため対象となる消費集合も非分割財を許容できない．これに対し③の方法ではヒックス＝マッケンジーの需要表現式により $h^i(p,\alpha)=\partial e(p,\alpha)/\partial p^i$ であることに注意し，$e(p,\alpha)$ が p で2回可微分であれば $\partial h^i(p,\alpha)/\partial p^j=\partial^2 e(p,\alpha)/\partial p^j\partial p^i$ であることを利用する．つまり，代替項の性質はすべて支出関数 $e(\cdot,\alpha)$ が凹関数であることから導かれてしまうのである．支出関数が凹関数になるという事実は，消費集合の形状に全く左右されない上，双対性命題6.3, 6.7

も消費集合の形状に依存しないのである（注6.9参照）．しかも凹関数は，（ルベーグ測度の意味で）ほとんどいたる所2回可微分であることが知られているから（例えば，Fenchel (1953) 参照），消費集合や選好関係の形状いかんによらず，ヒックス＝マッケンジーの需要表現式はほとんどすべての $p \in R^l_{++}$ について成立する．そして，もし需要関数が (p, w) において可微分ならば，スルツキー方程式とその通常の諸性質が成立することを上の導出方法は示しているのである．効用関数が可微分でなくとも需要関数は可微分になる場合があるから（注5.3参照），①の方法と比べ③は非常に一般的である．

②のハウタッカーのアプローチによっても，③と同様に効用・選好の凸性を仮定する必要はないが，③の場合に比較しその導出過程はやや複雑になる．

7.7　文献注［需要理論における双対性II］

①　効用最大化問題に対する双対問題として，消費支出最小化問題を最初に考察したのは，McKenzie (1957) である．マッケンジーの目的は2つあった．第1は，効用関数による選好関係の表現を前提することなく，スルツキー方程式を導出すること．第2は，選好関係の凸性を前提することなく，スルツキー方程式を導くことである．このようなスルツキー方程式の一般化が，最も簡単な導出法を生み出した点は非常に興味がある．本稿では，第1の点について全く触れなかった．その理由は，ロワやハウタッカーのアプローチが効用関数による選好表現を前提とするからである．

②　ヒックス＝マッケンジーの需要表現式を最初に示したのは Hicks (1946, p. 331) である．しかし，ヒックスは消費支出の最小化問題を明示的に考察したわけではない．

ヒックス＝マッケンジーの需要表現式に対応する関係式を「シェパードの補題」とよぶテキストもある．生産理論における双対性を明示的に考察した Shephard (1953) が，生産要素投入量は費用関数の要素価格に関する偏微係数と一致することを示したからである．しかし，この事実は Samuelson (1947, (55), p. 68) が指摘したことでもある．生産理論における「サミュエルソン＝シェパードの補題」を，需要理論においてこの両者の名称でよぶことが適当で

ないことはいうまでもなく，この関係式を需要理論における「補題」とすることも適切ではない．

8　おわりに

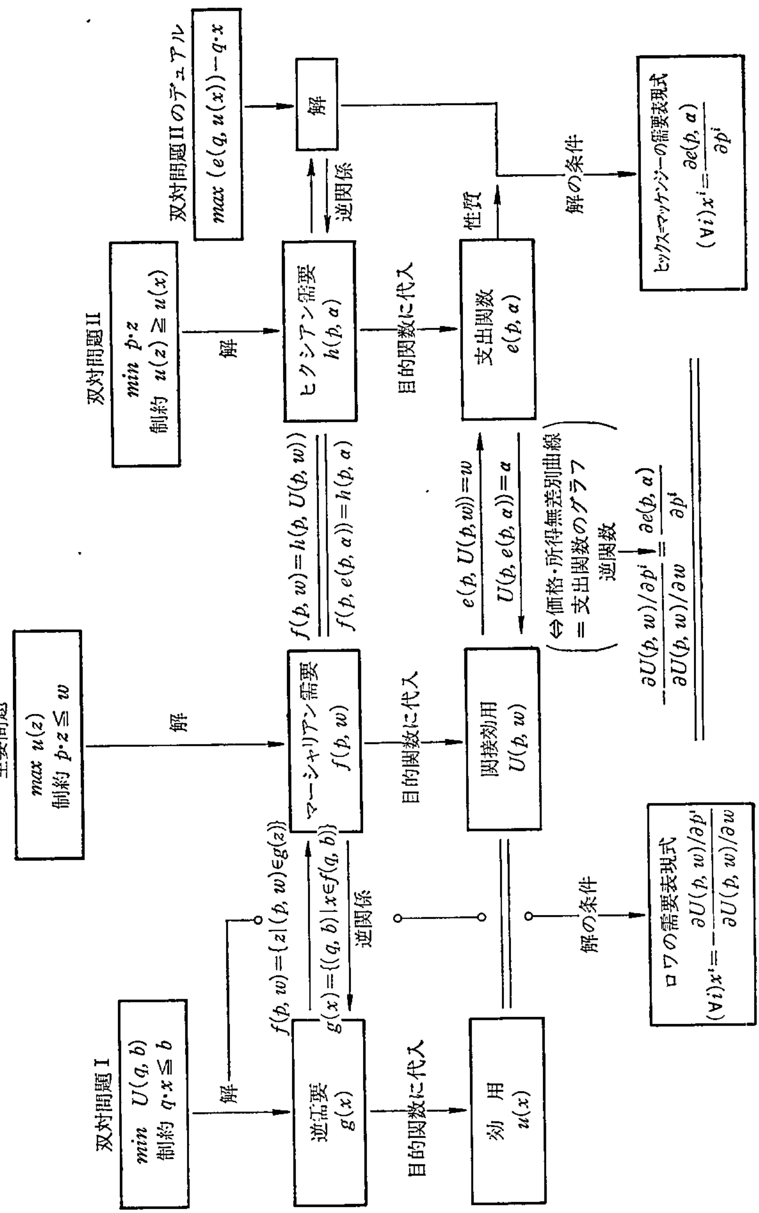
本稿では，需要理論における2種類の古典的双対性命題を解説し，両者と効用最大化問題の相互関係について詳細に説明した．これを一覧表にまとめたのが表8.1である．

双対性は，同一の事実や現象を，2つの最適化問題として表現できることであると本論では規定した．同一事実の別表現である以上，双対的アプローチは，本質的には新しい事実を説明しようとするものではない．その意味で，双対性自体を一般的に考察することは，経済理論において重要ではないだろう．しかしこれは，個別的な問題に対する双対的アプローチが，時として，便利な結果をもたらすことを否定するものではない．

歴史的に双対的アプローチが導入された理由は2つ考えられる．第1は，双対的アプローチから得られるロワの表現式やヒックス＝マッケンジーの表現式が，各財の消費量を明示的な価格の関数として与えるため，実証分析上便利であると考えられたこと．第2は，7.6で指摘したように，価格・所得空間における分析は財空間における諸概念の性質にそれほど制約を与えなくて済むため，より一般的な形の命題を導くことが可能な場合もあること，である．第1の点は，すでにロワ (Roy (1942)) 自身が強調していた事であり，近年の需要関数の推計にもしばしば双対的アプローチが応用されている．

本稿では数理計画における双対性命題の形式との対比が容易なように，あくまでも目的関数が実数値関数となるような形で，需要理論における双対性命題の解説を行なった．これが選好関係ではなく効用関数を用いた理由である．マッケンジーは双対性の第2命題を，効用関数を使用することなく導いている．ロワやハウタッカーのアプローチを効用関数を用いない形に拡張することも可能である．(例えば，Sakai (1977), Little (1979), Richter (1979), Yamazaki (1984) 参照.) したがって，財の完全分割可能性を前提とせず，さらに，効用

表 8.1　需要理論における古典的双対性



関数による表現可能性を前提としないような選好関係に対し，価格・所得空間における凸解析によってロワとヒックス＝マッケンジンジーの需要表現式を一般的な形に拡張できることは明らかである．現在のところこの種の試みは未だなされていないようである．

文　献

Dantzig, G. B., 1963, *Linear Programming and Extensions*, Princeton : Princeton University Press.

Debreu, G., 1972, Smooth Preferences, *Econometrica* 40, 603—15.

Fenchel, W., 1953, Convex Cones, Sets, and Functions, Princeton : Department of Mathematics, Princeton University.

Hick, J. R., 1939, 1946 (2nd Edition), *Value and Capital*, London : Oxford University Press.

Hotelling, H., 1932, Edgeworth Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions, *Journal of Political Economy* 40, 577—616.

Houthakker, H. S., 1952, Compensated Changes in Quantities and Qualities Consumed, *Review of Eonomic Studies* 19, 155—64.

片岡信二，1971，『数理計画法』東洋経済．

Layard, P. R. G., and A. A. Walters, 1978, *Microeconomic Theory*, New York : McGraw-Hill. 荒憲治郎他訳，1982，『ミクロ経済学』創文社．

Little, J. T., 1979, Indirect Preferences, *Journal of Economic Theory* 20, 182—193.

McKenzie, L., 1957, Demand Theory without a Utility Index, Review of Economic Studies 24, 185—9.

Richter, M. K., 1979, Duality and Rationality, *Journal of Economic Theory* 20, 131—81.

Roy, R., 1942, *De L'Utilité*, Paris : Hermann.

Roy, R., 1947, Distribution du Revenue entre les Divers Biens, *Econometrica* 15, 205—25.

Sakai, Y., 1977, Revealed Favorability, Indirect Utility, and Direct Utility, *Journal of Economic Theory* 14, 113—29.

Samuelson, P. A., 1947, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge : Harvard University Press.

Shephard, R. W., 1953, *Cost and Production Functions*, Princeton : Princeton University Press.

Slutsky, E., 1915, Sulia Teoria del Bilanco des Consomatore, *Gionale degli Economisti* 51, 1—26. Translated in: G. J. Stigler *et al* eds., 1952. *Readings in Price Theory*, Chicago: Chicago University Press.

Varian, H., 1978, *Microeconomic Theory*, New York: Norton. 佐藤隆三他訳, 1986.『ミクロ経済学』勁草書房.

Yamazaki, A., 1984, The Critical Set of a Demand Correspondence in the Price Space and the Weak Axiom of Revealed Preference, *Hitostubashi Journal of Economics* 25, 137—44, 1986.

山崎昭, 1986,『数理経済学の基礎』創文社.

(一橋大学教授)