富および価格空間における需要関係の臨界集合について

山崎昭

1　序

需要関係 demand relation の連続性は一般均衡分析における一つの基本的な要請である。本稿の目的は需要関係の連続性あるいは不連続性に関して最近明らかにされた二、三の事実を、富および価格空間における需要関係の臨界集合 the critical sets of a demand relation in the wealth and the price spaces（すなわち、富および価格空間において潜在的に需要関係の「不連続性」をもたらしうる集合）という観点から整理し、それを最も一般的なフレームワークの中で統一的に取りあげることにある。

我々が本稿で「不連続性」と称する性質には二種類のものがある。需要関係が上半連続性 upper hemi-continuity を欠く時、我々はこれを第一種の不連続性と呼び、需要関係が関数にならない場合、すなわち任意の価格および富の水準において需要が一意的に定められない場合、これを第二種の不連続性と呼ぶ。第一種の不連続性を富空間における需要関係の臨界集合 the critical set of a demand relation in the wealth space として把握し、第二種の不連続性を価格空間における需要関係の臨界集合 the critical set of a demand relation in the price space として理解することにより、需要関係の不連続性という現象の本質を非常に美しい形で表現することが可能である。

以下第二節において需要関係の概念を定式化し、その

上で先きに述べた二種類の不連続性を定義する。続く第三節では先ず第二種の不連続性を分析し、ここで価格空間における需要関係の臨界集合に関する基本的性質を明らかにする。すなわち、価格ベクトルの動き回る空間の中で需要関係が第二種の不連続性を持つような価格ベクトルの集合は、ルベーグ測度0の意味で無視しうる、ということである。あるいは言葉を換えて表現すれば、価格が充分ランダムであれば確率1でもって需要は一意的に定まる、ということになる。この基本的事実の証明は一般化されたリヴィールド・プレファレンスの弱公理 Generalized Weak Axiom of Revealed Preference を用いて財空間における予算超平面の動きとの関連で行なわれる。第四節では双対的な接近法がとられる。財空間あるいは消費集合上のオリジナルな選好関係 preference relation から自然に導かれる価格空間上の双対選好 dual preferences を考える。価格空間における需要関係の臨界集合を同空間における双対選好の臨界集合と関連づけ、問題を双対選好の臨界集合の性質ということに帰着する。第三節および第四節はそれぞれ Mas-Colell と Neuefeind (1978) および Mas-Colell (1976) に依拠し、本稿ではこれらの論文で得られた結果の拡張および一般化と統一的解釈を与えることを主眼点としている。最後の第五節では需要関係の第一種の不連続性を富空間における需要関係の臨界集合として把え、その性質を解明する。ここでの基本的な結果は、富空間における需要関係の臨界集合が可算集合になる、という事実である。このことから、もし需要関係の第一種の不連続性に関わる臨界集合を財空間あるいは消費集合内で考えてみると、それが財空間と同次元のルベーグ測度0の集合となることがわかる。最終節の議論は Yamazaki (1978) に基づくものである。

以上本稿の概要を展望したが、本論で試みられるような上記諸論文中の幾つかの命題の統一的位置づけは、均衡分析における集計の効果によるスムージングの現象 (例えば、Araujo-Mas-Colell (1978), Yamazaki (1979), Hildenbrand (1980) を参照) を研究する上からも有役である。

2　需要関係

識別可能な財およびサーヴィス (今後この両者を単に(広義の) 財と称する) の数をlとする (lは正の整数)。

R^l を l 次元ユークリッド空間とするとき、R^l の一つの非空な閉集合 $\Omega\subset R^l$ で財の物理的性質・特徴を表現し、Ω を**財空間** *the commodity space* と呼ぶ。さらに Ω の非空な閉部分集合 X で一消費者のニーズを表し、X を一つの**消費集合** *a consumption set* と呼ぶ。消費集合全体を $\mathcal{X}$ とする。消費集合 $X\in\mathcal{X}$ の上で定義された一つの**選好関係** *a preference relation* $(X,\succ)$ とは、$\succ\subset X\times X$ が X 上の2項関係で以下の諸性質を満すものをいう。（1）［連続性 continuity］$\succ$ は $X\times X$ の上で開集合。（2）［非反射性 irreflexivity］各 $x\in X$ について $(x,x)\notin\succ$。（3）［非対称性 asymmetry］$(x,y)\in\succ$ ならば $(y,x)\notin\succ$。（4）［否定的推移性 negative transitivity］$(x,y)\notin\succ$ かつ $(y,z)\notin\succ$ ならば $(x,z)\notin\succ$。（5）［局所非飽和性 local nonsatiation］任意の $x\in X$、任意の x の近傍 U に対して $z\succ x$ となるような $z\in U\cap X$ が存在する。今後一般に $(x,y)\in\succ$ を $x\succ y$ と書き、$(x,y)\notin\succ$ を $x\nsucc y$ と書くこととする。任意の消費集合 $X\in\mathcal{X}$ の上で定義された選好関係 $(X,\succ)$ 全体の集合を $\mathcal{P}$ で表記する。$X\in\mathcal{X}$ が与えられたとき X に属する点を一つの**消費ベクトル** *a consumption vector* という。R^l の点 p が l 個の財の価格を表す場合この p を**価格ベクトル** *a price vector* と呼ぶ。従って我々は基本的な**価格空間** *the price space* として $R^l_{++}(=\{p\in R^l|p^j>0,\ j=1,\ \ldots\ldots,\ l\})$ を考える。今 $(X,\succ)\in\mathcal{P}$, $p\in R^l_{++}$, $w\in R_+$ が与えられたとしよう。このとき集合 $\{x\in X|p\cdot x\leqq w\}$ を**予算集合** *a budget set* といい、これを $B(X,p,w)$ で表す。ここで「$\cdot$」はベクトルの内積、すなわち、$p\cdot x=\sum_{j=1}^{l}p^jx^j$ を示す。集合 $\{x\in B(X,p,w)|$ 任意の $z\in B(X,p,w)$ に対して $z\nsucc x\}$ は**需要集合** *a demand set* と呼ばれ $D(X,\succ,p,w)$ と書かれる。**需要関係** *a demand relation* D は $\mathcal{P}\times R^l_{++}\times R_+$ から Ω への関係であり、$(X,\succ,p,w)\mapsto D(X,\succ,p,w)$ によって定義される。

一般に $p\in R^l\backslash\{0\}$ および $w\in R$ が与えられた時、この p と w について R^l の部分集合を定義しておくと今後の我々の議論展開に便利である。そこで、$H(p,w):=\{x\in R^l|p\cdot x=w\}$, $H_{\leqq}(p,w):=\{x\in R^l|p\cdot x\leqq w\}$, $H_<(p,w):=\{x\in R^l|p\cdot x<w\}$, $H_{\geqq}(p,w):=\{x\in R^l|p\cdot x\geqq w\}$, $H_>(p,w):=\{x\in R^l|p\cdot x>w\}$ を定義する。$H(p,w)$ は R^l における一超平面 a hyperplane であり、その他の $H_{\leqq}(p,w)$, $H_<(p,w)$, $H_{\geqq}(p,w)$, $H_>(p,w)$ は閉あるいは開半空

間 closed or open half spaces である。この記号を用いると、$B(X,p,w)=H_{\leqq}(p,w)\cap X$ となる。また、我々は $H(p,w)\cap X$ を**予算超平面** *a budget hyperplane* と呼ぶことにしよう。

均衡分析において需要関係 D の「連続性」が一つの基本的要請となるが、我々が本稿で「連続性」と称するのは次の二種類の性質である。[1](第一種の連続性)需要関係 D の上半連続性 upper hemi-continuity、および[2](第二種の連続性)需要関係 D がその定義域上で関数となる。すなわち、$D(X,\succ,p,w)$ が集合として唯一の元から成り立っている。

以下この二種の連続性が防げられるような富空間内の集合および価格空間内の集合に関する基本的性質を分析する。このため第一種の連続性の欠如を第一種の不連続性、第二種の連続性の欠如を第二種の不連続性と呼ぶことにする。

3 需要関係の価格空間における臨界集合
——プライマル・アプローチ

一つの選好関係 $(X,\succ)\in\mathcal{P}$ および富の水準 $w\in R_{++}$ が与えられたとしよう。本節において我々は需要関係 $D(X,\succ,p,w)$ が第二種の不連続性を有するような価格ベクトル p の集合の性質を分析する。均衡論的視点から見ればこの種の価格ベクトルが市場価格ベクトルであった場合、消費者の市場行動は理論的に明確さを欠くことになる。

今後需要関係 $D(X,\succ,p,w)$ を表記する場合、いかなる選好関係 $(X,\succ)$ についての需要関係であるかがコンテクストから明白なときは、便宜上 $D(X,\succ,p,w)$ の代わりに $d(p,w)$ と書く場合がしばしばある。

さて、本論に入る前に予備的に**一般化されたリヴィールド・プレファレンスの弱公理** Generalized Weak Axiom of Revealed Preferenco (GWARP) に関して触れておく必要がある。ここで「一般化された」と形容しているのは、需要関数に限定せずより一般的に需要関係を考慮した場合の弱公理を問題にしていることを指す。

[GWARP](一般化されたリヴィールド・プレファレンスの弱公理) 任意の $(p,w),(q,b)\in R^l_{++}\times R_+$ について、$d(p,w)\cap H_{\leqq}(q,b)\neq\phi$ かつ $d(q,b)\cap H_{\leqq}(p,w)\neq\phi$ ならば $d(p,w)\cap H_{\leqq}(q,b)=d(q,b)\cap H_{\leqq}(p,w)$.

$\mathcal{P}$に属する選好関係$(X,\succ)$の需要関係はすべてGWARPを満たすことが容易に確認されうる。

命題1 選好関係$(X,\succ)$が$\mathcal{P}$に属するならばその需要関係はGWARPを満足する。

証明 $x\in d(p,w)\cap H_{\leqq}(q,b)$ かつ $y\in d(q,b)\cap H_{\geqq}(p,w)$としよう。需要関係の定義から$y\not\succ x$および$x\not\succ y$である。このときもし $x\notin d(q,b)\cap H_{\leqq}(p,w)$ であれば、$z\succ x$ となるような $z\in H_{\leqq}(q,b)$ が存在する。他方 $y\in d(q,b)$であるから $z\not\succ y$ である。よって選好関係$(X,\succ)$の否定的推移性および $z\not\succ y, y\not\succ x$ より $z\not\succ x$ が導かれるが、これは $z\succ x$ であったことと矛盾する。ゆえに $x\in d(q,b)\cap H_{\geqq}(p,w)$ でなければならない。同様にして $y\in d(p,w)\cap H_{\leqq}(q,b)$ が導かれる。よって我々は $d(p,w)\cap H_{\leqq}(q,b)=d(q,b)\cap H_{\leqq}(p,w)$ であることを証明した。■

以上のように$\mathcal{P}$に属する選好関係$(X,\succ)$の需要関係は一般化されたリヴィールド・プレファレンスの弱公理を満たすことが分かった。この事実から我々は次に価格ベクトル p の変化に伴った予算超平面の動きに注目することを要請されるのである。左記の命題は殆ど自明に近いが、本節の我々の議論展開にとって非常に便利な事実である。

命題2 $q(\neq 0)\in R^l$, $p(\neq 0)\in H(q,0)$, $\lambda_2>\lambda_1$, $w\in R$ とする。このとき、次の事実が成立する。

（1） $H_{\leqq}(p+\lambda_2 q,w)\cap H_{\geqq}(q,0)\subset H_{\leqq}(p+\lambda_1 q,w)\cap H_{\geqq}(q,0)$;

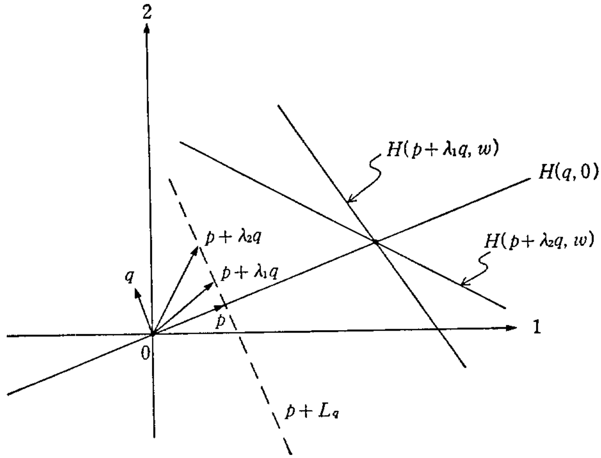
（2） $H_{\leqq}(p+\lambda_1 q,w)\cap H_{\leqq}(q,0)\subset H_{\leqq}(p+\lambda_2 q,w)\cap H_{\leqq}(q,0)$;

証明 （1） x が左辺に属したとしよう。そうすると $(p+\lambda_2 q)\cdot x\leqq w$ および $q\cdot x\geqq 0$ となるから $p\cdot x+\lambda_2 q\cdot x\geqq p\cdot x+\lambda_1 q\cdot x$ より、x が右辺に属することが導かれる。

（2） x が左辺に属したとしよう。そうすると $(p+\lambda_1 q)\cdot x\leqq w$ および $q\cdot x\leqq 0$ より、$(p+\lambda_2 q)\cdot x\leqq p\cdot x+\lambda_1 q\cdot x\leqq w$ となる。よって x は右辺に属する。■

注1 任意の実数λについて超平面 $H(p+\lambda q,w)$ と $H(q,0)$ の共通集合は等しくなることが命題から導かれる。したがって図1に示されているように、λ_2 がλ_1 より大ならば超平面 $H(q,0)$ の上方では超平面 $H(p+\lambda_1 q,w)$ は超平面 $H(p+\lambda_2 q,w)$ の上（p の方向に対して）

図1



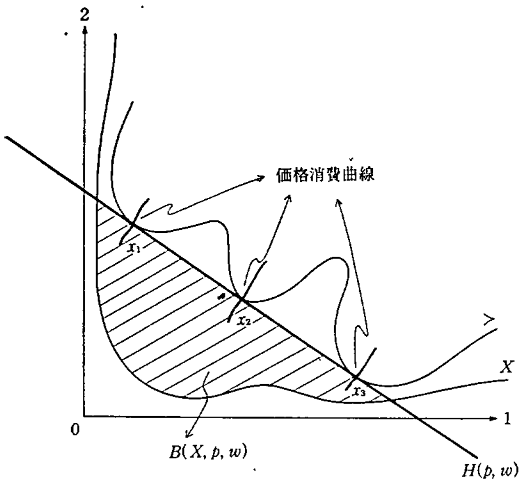
に位置し、超平面$H(q, 0)$の下方ではこの関係が逆になる。

QをR^lの部分集合とする。このときcoQはQの凸包を表す。A_QはQによって生成されたR^lのアフィン部分空間とし、L_QをA_Qと平行な線型部分空間（すなわち、ある$a \in R^l$に対して$A_Q = a + L_Q$）とする。λ_QをL_Q上のルベーグ測度とすると、同時にこれをA_Qにおける測度と見做すこともできる。coQあるいはL_Qの次元を$\dim coQ$, $\dim L_Q$などと書く。

価格ベクトルpが価格空間R^l_{++}内を動き回るとしよう。あるpにおいて需要集合$D(X, \succ, p, w)$が2つ以上の消費ベクトルから成り立っている場合、価格pにおける消費者の需要行動を理論上確定的に叙述することはできない。例えば図2において価格ベクトルpのもとで消費者がx_1、x_2、x_3いずれの消費ベクトルを選択するか理論的に示しえない。しかもpにおいて需要関係$D(X, \succ, \cdot, w): p \mapsto D(X, \succ, p, w)$が上半連続 upper hemi-continuous であっても、pの近傍における需要点（消費ベクトル）の選ばれ方によっては連続的な需要行動とはならない場合がある。この理由から我々は価格ベクトルpにおける需要集合$D(X, \succ, p, w)$が2要素以上を含む場合、需要関係はpにおいて第二種の不連続性を有する、と称したのである。したがって我々は価格空間における需要関係の臨界集合を第二種の不連続性を与える価格ベ

クトル p の集合として把えるのであるが、この考え方をより一般的なものに拡張して以下のように臨界集合を定義しよう。今、Qを価格空間 R^l_{++} の任意の部分集合とする。選好関係 $(X, \succ)$ および富の水準 w が与えられたとき、**需要関係** $d(\cdot ; w) : R^l_{++} \to Q$ **のQにおける臨界集合** *the critical set of the demand relation in* Q を記号 C_Q で表し、$C_Q :=\{p \in Q \mid \dim \text{co}\, d(p, w) > l - \dim \text{co}\, Q\}$ と定義する。この定義は需要関係 $d(\cdot, w)$ が第二種の不連続性を持つ p の集合という考え方の一つの自然な拡張となっている。臨界集合 C_Q に関する基本的な性質は C_Q のルベーグ測度 $(\lambda_Q(C_Q))$ が 0 であるということ、言葉を換えれば Q の中で C_Q は無視できる大きさにしかすぎない、ということである。特に $Q=R^l_{++}$ の場合、つまり価格ベクトル p が自由に価格空間 R^l_{++} 全体を動くことができるならば、殆どすべての価格ベクトル p において第二種の連続性が成立する。以上をまとめたのが左記の定理である。

図2



定理1 （価格空間における需要関係の臨界集合に関する定理） Q を R^l_{++} の可測集合とし、選好関係 $(X, \succ)$ および富の水準 $w>0$ を所与とする。このとき、需要関係の価格空間における臨界集合 $C_Q=\{p \in Q \mid \dim \text{co}\, d(p, w) > l - \dim \text{co}\, Q\}$ はルベーグ測度 0 の集合である、すなわち $\lambda_Q(C_Q)=0$ である。

証明 先ず各 $q \in L_Q$ に対して集合 C_q を定義する。$C_q :=\{p \in Q \mid d(p, w) \cap H_<(q, 0) \neq \phi\} \cap \{p \in Q \mid d(p, w) \cap H_>(q, 0) \neq \phi\}$. L_Q は可分であるから、L_Q の部分集合 L^*

をL_Qの到る所で稠密な可算集合としよう。このとき次の主張が成立することを示そう。

主張　$C_Q \subset \bigcup_{q\in L^*} C_q$

$p\in C_Q$とし、$m:=\dim \mathrm{co}\, d(p,w)$と置く。我々はある$q\in L^*$について$p\in C_q$となることを示したい。$d(p,w)$の中から、$z_0$、$z_1$、…$z_m$なる（$m$＋1）個の消費ベクトルを選び出し、$m$個のベクトル$z_1-z_0,\dots,z_m-z_0$が一次独立となるようにすることができる。$pr$を$R^l$から$L_Q$への垂直射影とし、0、1、から$m$までの各$j$について、$\bar z_j=pr(z_j)$と置く。$m$は$L_Q$の直交補空間（$L_Q^\perp$）の次元よりも大であるから、$\bar z_0$が0ベクトルでないと仮定して一般性を失わない。ここで少くともある一つのjについて$\bar z_j$と$\bar z_0$とが一次独立であることを証明しよう。仮りにすべてのjについて$\bar z_j$と$\bar z_0$とが一次従属であったとする。その場合1からmまでの各jについて0と異なるμ_jで$z_j-\mu_j z_0\in L_Q^\perp$となるものが存在する。ところが$m$は$L_Q^\perp$の次元より厳密に大であるから$z_j-\mu_j z_0$という$m$個のベクトルは一次従属となる。よって同時に0とならないm個の実数δ_jで$\sum_{j=1}^m \delta_j(z_j-\mu_j z_0)=0$となるものが存在する。ところが$p\cdot z_j=p\cdot z_0=w\neq 0$が各々の$j$について成立しているから、$\sum_{j=1}^m\delta_j=\sum_{j=1}^m\delta_j\mu_j$となる。ゆえに、$\sum_{j=1}^m\delta_j(z_j-z_0)=0$が導かれるが、これは$m$個のベクトル$(z_j-z_0), j=1,\dots,m,$が一次独立であったことに矛盾する。これである$j$に関し$\bar z_j$と$\bar z_0$とが一次独立となることが証明された。

これはL_Qのあるベクトル$\bar q$に対して$\bar q\cdot\bar z_0=\bar q\cdot z_0<0<\bar q\cdot\bar z_j=\bar q\cdot z_j$なることを意味する。$L^*$は$L_Q$の到る所で稠密であるから、$\bar q$の充分近くに$q\in L^*$を取れば$q\cdot z_0<0<q\cdot z_j$となる。ゆえに$p\in\bigcup_{q\in L^*}C_q$が証明された。

さて次に集合C_Qの可測性を示そう。これは、需要関係$d(\cdot,w):R^l_{++}\to\Omega$のグラフが可測であること（この事実については例えばHildenbrand (1974), p. 102を参照）、および集合$H_<(q,0)\times H_>(q,0)$が可測であること、さらに$C_Q=\{p\in Q|(d(p,w)\times d(p,w))\cap(H_<(q,0)\times H_>(q,0))\neq\phi\}$であることより導かれる。

定理の証明を完了するために我々はL_Qの任意の点qについて$\lambda_Q(C_q)=0$であることを証明する。フビニFubiniの定理からもしすべての$p\in L_Q\cap H(q,0)$に対して、$\#[C_q\cap(p+L_q)]\le 1$（ここで$L_q=\{\lambda q|\lambda\in R\}$であったことに注意しておこう）であれば$\lambda_Q(C_q)=0$となる。

そこで今仮りに $\lambda_2>\lambda_1$ があって $p+\lambda_2 q, p+\lambda_1 q \in C_q$ であったと仮定しよう。そうすると $d(p+\lambda_2 q, w) \cap H_>(q,0)\neq\phi$ であり、かつ $d(p+\lambda_1 q, w)\cap H_<(q,0)\neq\phi$ となる。したがって命題2より $d(p+\lambda_2 q, w)\cap H_>(q,0)\subset H_\leq(p+\lambda_1 q, w)\cap H_>(q,0)$ であり、また、$d(q+\lambda_1 q, w)\cap H_<(q,0)\subset H_\leq(p+\lambda_2 q, w)\cap H_<(q,0)$ である。ゆえに命題1の一般化されたリヴィールド・プレファレンスの弱公理により、$d(p+\lambda_2 q, w)\cap H_\leq(p+\lambda_1 q, w)=d(p+\lambda_1 q, w)\cap H_\leq(p+\lambda_2 q, w)$ となる。しかしこれは不可能である。なぜならば左辺は $d(p+\lambda_2 q, w)\cap H_>(q,0)\subset H(p+\lambda_2 q, w)\cap H_>(q,0)$ を含むが、右辺はすべて $H(p+\lambda_1 q, w)$ に含まれており、しかも $H(p+\lambda_1 q, w)$ と $H(p+\lambda_2 q, w)$ との共通集合は超平面 $H(q,0)$ に含まれてしまうからである。■

定理1の意味するところは、殆どの価格ベクトル p において需要集合の次元は、財空間における価格空間の余次元（すなわち、価格空間の直交補空間の次元）を上回ることはない、ということである。不正確な表現が許されるならば次のようにいうこともできる。つまり、需要関係の取りうる値（ベクトル値）の「自由度」は財の数と価格の動き得る「自由度」との差になっている。

さて、次節において本節で証明した需要関係の価格空間における臨界集合に関する基本定理への双対的アプローチを示すことにしよう。

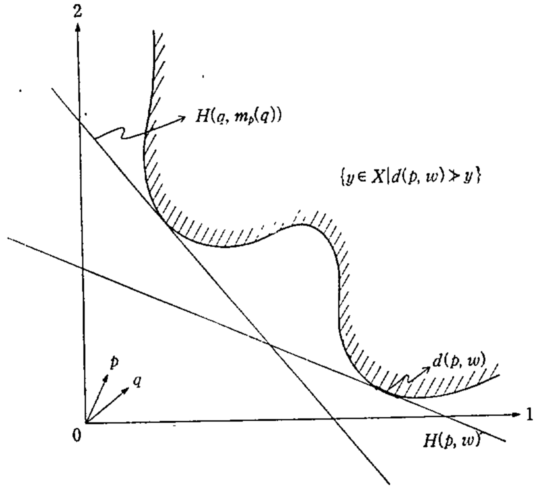
4 需要関係の臨界集合と双対選好

——デュアル・アプローチ

前節において我々は需要関係の価格空間における臨界集合を、財空間における需要関係の臨界的現象として眺め、直接に財空間における議論展開を行った。これと対照的に本節では、需要関係の財空間における臨界的現象を価格空間における「双対選好」の臨界的現象として観ることにする。このように異なった視点から同一現象を考察することによって我々は需要関係の臨界的現象をより深い所で理解することができる。

そこで先ずデュアル・アプローチの第一ステップとして双対選好関係 dual preference relations あるいはより簡単に**双対選好** *dual preferences* を価格空間 R^l_{++} に導入しよう。（我々がここで双対選好と呼ぶ概念は通常間接効用関数と呼ばれている概念に対応するものである。）

図3



選好関係 $(X, \succ)\in\mathscr{P}$ が与えられたとき、これに対して R^l_{++} における2項関係 $\succsim^*$ を左記のように定義する。

$$q\succsim^* p \Leftrightarrow d(q, w)\not\succ d(p, w)$$

このように定義された R^l_{++} 上の2項関係 $\succsim^*$ を選好関係 $(X, \succ)$ の w における双対選好 *dual preferences* と呼ぶ。

次に、双対選好による選好関係 $\succsim^*$ を簡単に表現するものとして最小所得関数 *the minimum income function* の概念を導入する。(L. W. McKenzie (1956—7), (1972) あるいは H. Nikaido (1968), pp. 297—301 を参照。)

任意の $p\in R^l_{++}$ に対して、R^l_{++} から R への実数値関数 $m_p: R^l_{++}\rightarrow R$ を $m_p(q):=\inf\{q\cdot y|d(p, w)\not\succ y\}$ によって定義する。(図3参照。) この最小所得関数を用いて $R^l_{++}\times R^l_{++}$ の上で定義された実数値関数 ϕ を $\phi(q, p):=m_p(p)-m_q(p)$ と定めると、ϕ は双対選好 $\succsim^*$ の一般化された効用関数(すなわち、$q\succsim^* p \Leftrightarrow \phi(q, p)\geqq 0$) となっていることが確認できる。

命題3　次の(1)および(2)の条件は同値である。

(1)　$q\succsim^* p$.

(2)　$m_p(p)-m_q(p)\geqq 0$ かつ $m_p(q)-m_q(q)\geqq 0$.

証明　最初に(1)⇓(2)を示そう。$q\succsim^* p$ ならば $d(q, w)\not\succ d(p, w)$ である。$\succ$ は否定的推移性を満たすから、$d(p, w)\not\succ y$ なるすべての y について $d(q, w)\not\succ y$ となる。よって最小所得関数の定義から $m_q(p)\leqq m_p(p)$ かつ $m_q(q)\leqq m_p(q)$ が導かれる。次に(2)⇓(1)を示そう。$\succ$ の局所非飽和性から $p\cdot d(p, w)=m_p(p)\geqq m_q(p)$ である。したがって、各 n について $d(q, w)\not\succ y_n$

となる y_n で $p\cdot d(p,w)+1/n \geqq p\cdot y_n$ を満たす y_n が存在する。こうして得られた点列 (y_n) は有界であるから収束部分列 (y_k) がある。そこで、$y_k \to \bar{y}$ とすると、選好関係 $(X,\succ)$ の連続性により $d(q,w)\not\succ \bar{y}$ となり、かつ $\bar{y}\in B(p,w)$ である。よって $\bar{y}\not\succ d(p,w)$ も同時に成立する。ゆえに否定的推移性により $d(q,w)\not\succ d(p,w)$ すなわち $q \succsim^* p$ が導かれる。■

注2 これまでの議論の中で2つの集合、S_1、S_2 について $S_1 \not\succ S_2$ と書いたのは、正確にはすべての $y\in S_2$ およびすべての $x\in S_1$ について $x\not\succ y$ である、という意味である。

次に、双対選好$\overset{*}{\succ}$の「双対グラディエント」対応g^*を定義しょう。$g^*: R^l_{++}\to R^l$ を $p\mapsto \{x\in R^l \mid$ すべての $q\succsim^* p$ に対して $q\cdot x \geqq p\cdot x\}$ によって定義する。双対グラディエント対応g^*により、双対選好$\overset{*}{\succ}$と需要集合は左記のような形で関連づけられる。

命題4 $d(p,w)\subset g^*(p)$

証明 仮りに $x\in d(p,w)$ かつ $x\notin g^*(p)$ なる消費ベクトル x があったとしよう。そうすると $q\succsim^* p$ で同時に $q\cdot x < p\cdot x$ となる価格ベクトル q が存在する。選好関係の局所非飽和性により $p\cdot x = w$ であるから、先きの不等式は最小所得関数の定義から $m_p(q) < w = m_q(q)$ を意味している。よって命題3から $q \not\succsim^* p$ となり矛盾が生ずる。■

系5 $g^*(p)$ が直線に含まれれば $d(p,w)$ は唯一の要素から成る。

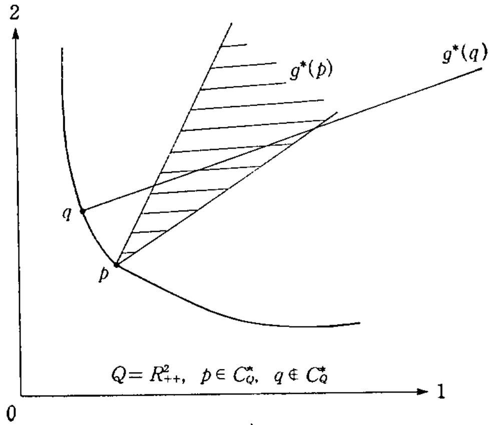
証明 x および y が需要集合に属するとすると命題4および $g^*(p)$ が直線に含まれるという仮定からある実数λについて $y=\lambda x$ となる。しかし x、y の双方とも超平面 $H(p,w)$ 上にあるから、$p\cdot x = p\cdot y = p\cdot\lambda x = w$ が成立する。すなわち、$(1-\lambda)p\cdot x=0$ となる。ここで $p\cdot x = w \neq 0$ であるから $\lambda=1$ である。よって $x=y$ となる。■

より一般的には次の事実が成立する。証明の考え方は先きの系5の場合と全く同様なので証明は省略する。

系6 $\dim \mathrm{co}\ d(p,w) \leqq \dim g^*(p) - 1.$

この結果によって需要集合の凸包の次元と価格 p における双対グラディエント対応の値の次元とが関連づけられた。需要関係の価格空間における臨界集合は、需要集

図4



合の凸包の次元と価格ベクトルpの動き得る空間の次元との関係で定まる。したがって各価格ベクトルpにおける双対グラディエント対応の値の次元に関連して双対選好$\overset{*}{\succ}$の臨界集合を適当に定義すれば、双対選好の臨界集合と需要関係の価格空間における臨界集合とが互に関連を持つことになる。そこで次に双対選好$\overset{*}{\succ}$の臨界集合を定義し、その性質を調べよう。

双対選好$\overset{*}{\succ}$およびそのグラディエント対応$g^*: R^l_{++}\to R^l$が与えられたとき、$Q\subset R^l_{++}$へのg^*の制約をg_Q^*で表そう。**双対選好$\overset{*}{\succ}$のQにおける臨界集合** *the critical set of the dual preferences in Q* C_Q^*を

$$C_Q^*:=\{p\in Q|\dim g_Q^*(p)>l-\dim \mathrm{co}Q+1\}$$

によって定義する。(図4参照。)

次の命題は双対選好$\overset{*}{\succ}$の臨界集合C_Q^*に関わる基本的性質を示すものである。

命題7 双対選好$\overset{*}{\succ}$の臨界集合C_Q^*はA_Qにおけるルベーグ測度0の集合である。つまり、$\lambda_Q(C_Q^*)=0$となる。

証明 Qの各点pに対してL_p^*を線型部分空間$Lg_Q^*(p)$の直交補空間と定義する。L_p^*の定義から

$$\dim(\mathrm{Int}\, g_Q^*(p))+\dim L_p^*=l$$

である。ここで$\mathrm{Int}\, g_Q^*(p)$は$Lg_Q^*(p)$における$g_Q^*(p)$の内点からなる集合を示す。次に、$(l-\dim \mathrm{co}Q+1)$次元のR^lの線型部分空間で基底ベクトルの各成分が有理数からなるものの集合を$\mathcal{H}^*$とすれば、$\mathcal{H}^*$は可算集合である。

$\mathcal{H}^*$に属する各Hに対して

$C_H^*:=\{p\in C_Q^*|\dim(H+L_p^*)=\dim H+\dim L_p^*$ でかつある $x(\neq 0)\in \mathrm{Int}\, g_Q^*(p)$ がHに直交する$\}$

を定義する。集合C_H^*はF_σ、即ち可算個の閉集合の和集合、となることが容易に確認できる。よって可測である。次に、

$$C_Q^* \subset \bigcup_{H\in\mathscr{H}^*} C_H^*$$

となることを示そう。$p\in C_Q^*$ とすれば、$\dim g_Q^*(p) > l-\dim \mathrm{co}\, Q+1$ だから、L_p^*とは独立な $H\in\mathscr{H}^*$ で（すなわち、$\dim(H+L_p^*)=\dim H+\dim L_p^*$）かつ Int $g_Q^*(p)$ に属する0と異なるあるxがHと直交するようなHが存在する。したがって $p\in\bigcup_{H\in\mathscr{H}^*}C_H^*$ である。

ゆえに命題7の証明には $\lambda_Q(C_H^*)=0$ を示せばよい。ハウスドーフ測度とルベーグ測度との関係から、任意の $v\in Q$ について $\#\{C_H^*\cap(v+H)\}\leq 1$ であれば $\lambda_Q(C_H^*)=0$ となる。そこで仮りにあるvについて $\#\{C_H^*\cap(v+H)\}>1$ であったとしよう。$p,q\in C_H^*\cap(v+H), p\neq q,$ とする。そうするとC_H^*の定義からある $x\in g_Q^*(q)$ について $p\cdot x<q\cdot x$ となり、かつ同時にある $y\in g_Q^*(p)$ について $q\cdot y<p\cdot y$ が成立することになる。ところが $p\succsim^* q$ あるいは $q\succsim^* p$ であるので、$g_Q^*(q), g_Q^*(p)$ の定義から、$p\cdot x\geq q\cdot x$ あるいは $q\cdot y\geq p\cdot y$ のいずれかが成立するが、この両者とも先きの不等号の向きと矛盾する。ゆえに $\#\{C_H^*\cap(v+H)\}\leq 1$ がQの中の任意のvについて成立する。■

以上で定理1の双対的証明を与えるお膳立てが整った。

注3 双対選好$\succsim^*$は凸である。したがって$\succsim^*$を準凹「効用関数」（あるいは「双対効用関数」）によって代表させうる。もし$\succsim^*$を凹関数によって代表できるならば、凹関数についての一つの周知の事実、すなわちそれが殆ど到る所で微分可能であるということ、から上記の命題を簡単に証明できる。しかし、任意の凸選好関係は必ずしも凹効用関数によって代表されうるとは限らない。（例えば、Mas-Colell (1974), Remark 3, p. 329 およびその中に示された文献を参照のこと。）

定理1の双対的証明

我々は $\lambda_Q(C_Q)=0$ を証明したい。ところが系6より

$$C_Q=\{p\in Q\,|\,\dim \mathrm{co}\ d(p,w)>l-\dim\mathrm{co}\,Q\}$$
$$\subset\{p\in Q\,|\,\dim g_Q^*(p)>l-\dim\mathrm{co}\,Q+1\}=C_Q^*$$

となる。ゆえに命題7より $\lambda_Q(C_Q)=0$ である。■

5 富空間における需要関係の臨界集合

以上の議論で需要関係が第二種の不連続性を有するよ

うな価格ベクトルの集合―価格空間における需要関係の臨界集合―の基本的性質を明かにした。本節では需要関係が第一種の不連続性を持つような富水準の集合―富空間における需要関係の臨界集合―の性質を分析しよう。本節の分析における一つの主要概念 key concept「局所的チーパー・ポイント」の定義から入ることにする。

Xを$\mathcal{X}$に属する一つの消費集合とし、xをXにおける一消費ベクトルとする。xに収束する消費ベクトルの点列が存在し、点列を構成する各々の消費ベクトルが所与の価格ベクトルpで評価してxよりも安い時、xは**局所的チーパー・ポイント** *local cheaper points* を有する、といわれる。すなわち、xの任意の近傍Uに対して$z\in U\cap X$が存在し、$p\cdot z<p\cdot x$となる。Xに属する消費ベクトルxで、局所的チーパー・ポイントを持たないものの集合を**消費集合Xの臨界集合** *the critical set of the consumption set* と呼び、これを$C_p(X)$で表す。

$\|\ \|$でユークリッド空間の通常のノルムを表すものとし、δをある正の数としよう。pをある所与の価格ベクトルとする。このとき、中心x半径δの（pに関する）**半開球**を、

$$HN_p(x,\delta):=\{z\in R^l \mid \|x-z\|<\delta \text{ かつ } p\cdot z<p\cdot x\}$$

で定義する。半開球の概念を用いると消費集合の臨界集合を次のように簡明に表現することができる。

$$C_p(X)=\{x\in X \mid \text{ある } \delta>0 \text{ に対し } HN_p(x,\delta)\cap X=\phi\}$$

富空間の部分集合$J_p(X)$を次のように定義する。

$$J_p(X):=\{w\in R \mid H(p,w)\cap C_p(X)\neq\phi\}$$

そうすると標準的な議論によって、任意の選好関係$(X,\succ)$に対し、$(X,\succ)$の需要関係$D(X,\succ,p,w)$が$w\notin J_p(X)$なる任意の(p,w)において上半連続、すなわち第一種の連続性を有することを確認できる。したがって我々は集合$J_p(X)$を**富空間における需要関係の臨界集合** *the critical set of the demand relation in the wealth space* と呼ぶ。

富空間における需要関係の臨界集合に関する基本的性質は次の定理によって与えられる。

定理2　（富空間における需要関係の臨界集合に関する基本定理）

任意の$p(\neq 0)\in R^l$および$X\in\mathcal{X}$について、$J_p(X)$は可算集合である。

証明　仮りに$J_p(X)$が非可算集合であったとしよう。

各 $w\in J_p(X)$ について $x_w\in H(p,w)\cap C_p(X)$ を一つ選び、そのような x_w のすべての集合をCとする。Cは非可算集合である。CはR^lの部分集合であるから、Cを可算個の半径1の開球で覆うことができる。Cは非可算であるからこれらの開球のうちC少くとも一つは非可算個のCの要素を含んでいなければならない。この一つをN_0としよう。そして、$C_0=C\cap N_0$ と置く。

主張 C_0の要素xおよびC_0内の点列x_nで、$x_n\to x$ かつすべてのnについて $p\cdot x_n<p\cdot x$ なるものが存在する。

主張が誤りであったと仮定しよう。そうするとC_0の各点xに対し正の数δ_xが存在し、$HN_p(x,\delta_x)\cap C_0=\phi$ となる。各 $n=1,2,\cdots$ についてC_0の部分集合C_nを

$$C_n=\{x\in C_0|HN_p(x,1/n)\cap C_0=\phi\}$$

によって定義しよう。このとき $C_0=\cup_n C_n$ となる。ところがC_0は非可算であったからC_nの内少くとも一つ、今それをC_Nとしよう、は非可算集合となる。したがって、C_Nの中に1つの点列(z_n)を取り、各z_nが重複しないようにすることができる。そうすると $n\neq n'$ なるn、n'について $p\cdot z_n\neq p\cdot z_{n'}$ である。C_Nは有界な集合 $C_0=C\cap N_0$ の部分集合であったから、(z_n)の収束部分列(z_k)が存在する。よって、充分大きな $k\neq k'$ なるkとk'について $\|z_k-z_{k'}\|<1/2N$ かつ $p\cdot z_k\neq p\cdot z_{k'}$ 例えば $p\cdot z_{k'}<p\cdot z_k$、となる。すなわち、$z_{k'}\in HN_p(z_k,1/N)$、しかしこれは z_k、$z_{k'}$の双方がC_Nの互に異なる要素であることに矛盾する。よって主張の正しいことが証明された。

主張の中で存在が保証されているようなC_0内の点xと点列(x_n)を取ろう。xは $C_p(X)$ の要素であるから、ある正数δに対して $HN_p(x,\delta)\cap X=\phi$ となる。他方、充分大きなnについてx_nは $HN_p(x,\delta)\cap X$ に属するので、これは明白に矛盾である。ゆえにこの定理の証明が完了した。■

次の補題は消費集合の臨界集合に関するものである。

補題3 任意の $p(\neq 0)\in R^l$ および $X\in\mathscr{X}$ について集合 $C_p(X)$ はl次元ルベーグ測度0となる。

証明 $\mathscr{H}_p:=\{H(p,w)\subset R^l|w\in J_p(X)\}$ と置く。定理2より $J_p(X)$ は可算集合であるから、$\cup\mathscr{H}_p$ のl次元ルベーグ測度は0となる。よって $C_p(X)\subset\cup\mathscr{H}_p$ より、$C_p(X)$ のl次元ルベーグ測度は0

となる。■

文 献

Araujo-Mas-Colell, (1978), "Notes on the smoothing of aggregate demand," *Journal of Mathematical Economics* 5, 113—127.

Hildenbrand, W., (1974), *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton University Press, Princeton, N. J.

Hildenbrand, W., (1980), "On the uniqueness of mean demand for dispersed families of preferences," *Econometrica* 48, 1703—1710.

Mas-Colell, A., (1974), "Continuous and smooth consumers: approximation theorems," *Journal of Economic Theory* 8, 305—336.

Mas-Colell, A., (1976), "A remark on a smoothness property of convex, complete preorders," *Journal of Mathematical Economics* 3, 103—105.

Mas-Colell, A., and W. Neuefeind, (1977), "Some generic properties of aggregate exgess demand and an application," *Econometrica* 45, 591—599.

McKenzie, L. W., (1956—7), "Demand theory without a utility index," *Review of Economic Studies* 23—24, 185—189.

McKenzie, L. W., (1972), "Lecture notes on general equilibrium theory," University of Rochester, Rochester, N. Y.

Nikaido, H., (1968), *Convex Structures and Economic theory*, Academic Press, N. Y.

Yamazaki, A., (1978), "An equilibrium existence theorem without convexity assumptions," *Econometrica* 46, 541—555.

Yamazaki, A., (1979), "Continuously dispersed preferences, regular preferene-endowment distribution and mean demand function," in Green et al.: *General Equilibrium, Growth and Trade*, Academic Press, N. Y.

(一橋大学助教授)