数学とは何か

岡本和夫

始めに

「数学」とは何だろうか。手許にある国語辞典によれば『数・量および空間における図形について研究する学問』とある（金田一京助編、三省堂国語辞典）。たしかに、数・量および空間における図形について研究する学問は数学以外にはなさそうだが、それだけを「数学」と言い切ってしまうことはできない。連想ゲームのようにして誰かに「数学」と問いかければ、おそらく「大学入試」という答がかえってくるのではないだろうか。通俗的だが実感のこもった答である。入学試験には所謂主要三教科というのがあって、数学は国語、英語とともにその一つとなっている。そこで誰もが中学高校時代に、好き嫌いにかかわらず勉強し、否でも応でも付き合いを強制されることになる。だからと言って、「数学」とは「入試教科のひとつ」であるとするのは余りに切ない。

数学には多種多様な側面がある。たとえば「数学の勉強」「数学の研究」「数学教育」などなど。本稿では、このようないくつかの側面を通して「数学とは何だろうか」と考えていくことにする。我々は数学の全体像を浮かび上がらせ、「数学論」構築の試みの第一歩を踏み出すことを目標とする。

なぜ数学を勉強するのか

「数学とは何か」を考える時の「数学」というものは極めて漠然とした言葉である。「岩波数学辞典」（日本数

学会編）の索引をひいても「数学」という項目はない。この辞典は数学の百科全書と言うべきもので、英語訳もあり国内外で一定の評価をうけている。数学辞典全千百四十ページを熟読すれば、どのような数学の研究が行なわれてきたかということがわかるはずだから、「数学」という項目はないのは仕方のないことかもしれない。「数学とは何か知りたかったら数学辞典を見ればよい」というのは揶揄がすぎるが、将来数学論をめざす我々としては数学研究の現状の全貌を把握することは避けては通れない道である。しかし今すぐにこの方向へすすむのは茫漠とした砂漠に水筒も持たずに歩み入るようなものだから、我々は別の道をとることにする。それは「数学の勉強」と言うときの数学である。すなわち「なぜ中学高校と数学を勉強するのか」という問題を考えていくことにしよう。もっと手っ取り早く言えば、「なぜ数学は入試の主要教科のひとつなのか」ということである。これは一見、数学の本質とは関係がないようにみえるが、「数学とは何か」考えていく上では重大なテーマではある。公式的な答弁はいたって簡単である。「数学は基礎科学であり、教育上でも基礎科目である」。それでは一体何の基礎なのか。

数学が主要教科になったのは勿論ごく最近のことではないので時計の針を百数十年戻して明治初期の我々の先輩達のことを考えてみる必要がある。当時の日本は今でいう発展途上国のようなものであったろう。我々の先輩達は、先祖伝来の文化を誇りにし、母国を外国の植民地化することを決して望まず、欧米先進諸国に匹敵するような国力を築き上げるため教育制度の整備を急いでいると想像しよう。学校制度、組織などはある程度先進諸国の真似をして、さてそこで何を教えるか。まず母国の独自の文化を継承し発展させるために日本語すなわち国語を、次に諸外国との交流を深めいろいろな事を吸収するために一定の水準以上の教育課程においては外国語を、この二つを一応の柱とする。具体的な教育内容は、政治情勢、国際情勢などとからんで定めればよい。あともうひとつ、「読み書き算盤」のそろばん、すなわち算術がある。諸外国の実情を見ると工業技術振興のために何をなすべきかということはそれこそやらねばならぬことが山のようにあるが、教育としては基礎的なことをやればよい。その基礎的な学問としては算術の延長である「数

学」というものをえらんで高等教育においてこれを履習させる。大体以上のようにして「英・国・数」の三教科が定まったものと想像できる。

突如として数学が出きてきたが、その理由は工業振興のためという以上のものがある。古代の数学を見るまでもなく、数学は測量術と無関係でないのは明らかである。三角法などはまさにそのようして生れ発展してきたのであった。測量術の発達と航海術の向上とは不可分である。「風が吹けば桶屋が儲る」式の論理展開になって来たけれど、結論は明らかである。端的に言えば、工業発展もさりながら、軍の近代装備のための基礎学問が数学だったのである。今から百数年前、現在の日本数学会の前身である東京数学会社が設立されたが、当時そのメンバーの多くは海軍士官であった。

教育の柱が決められたならば、次になすべきことはその教育の担い手であり実践者である、教師を育成するとである。これは高等教育とくに大学における教育の重大な使命のひとつであり、またここが大衆教育の要となる。我国においては明治初期に幸運な状態で以上述べたような教育制度とその内容の充実が行なわれた。単一民族国家（と言い切ってしまうのは多少問題があるが）であり、江戸時代からの文化の蓄積のおかげもあって、文盲率も低く、数学に限っても和算の伝統もあって、兎にも角にも初等教育の実践者は大きな苦労もなく用意できた。その結果として、中等高等教育の担い手の方も、諸外国からの人的援助は比較的短期間に限るだけで、独力で生産できるようになった。従って極めて早い時期から、高級官僚や将校など国家的エリートをつくりだすことが出き、益々富国強兵に専心することができたのである。

以上のような歴史的経過により定められた教育の根幹は、太平洋戦争の敗戦により外見を一変させたが、本質的なところはそのまま現在にうけつがれていると言ってよいだろう。そして今、百数十年続いてきた「西欧に追いつき追いこせ」という行動原理の存立基盤が危うくなっているのは周知のとおりである。「なぜ入試に数学があるのか」という素朴な疑問に対して我々は歴史的な事情をもって説明としてきた。ところで現在、明治以後の原理を変えねばならぬような転換期をむかえているとすれば、全てを白紙に還えして考えなおさなければならな

い。なぜ数学を勉強しなくてはいけないのか、と。そしてこれは結局数学とは何かを考えることである。

日本における数学

日本における数学の歴史的経過をみるなかで得た数学の社会的位置付けというのは、結局、工業振興にしろ軍備拡張にしろ何か他の分野への応用のための基礎学問ないしは教科ということであった。この傾向は日本に限らず一般にどこの国でも似たようなものであろう。ただ、欧米のように文化的な伝統としての数学ということはないので、その分だけ、基礎科学は軽視する方針が日本の方が徹底しているだけである。以下、もう少し「国際社会における日本の数学の社会的現状」ということを述べてみることにする。数学の研究という側面から見ると日本のレベルは他の基礎科学と同様高いところへ到達している。このことは前出の数学辞典を見てもあきらかである、というより数学辞典を出版できる程度に質、量ともそれなりの水準を保っている。するとよく耳にする議論というのは『日本人は欧米人の真似をしたり業績をす早く吸収して応用したりするのは上手だが、独創的な仕事は少ない』という「悪口」である。これは、基礎科学の研究を徹底的に軽視する伝統と明治以後の教育原理のせいで、半分は本当のことである。他方、なにしろスタートしてから百余年しかたっていないのだからある意味では仕方のないこととも言える。数学に限ってみると現時点で欧米諸国に独創的な仕事をする数学者がそう沢山いるとは思えないし、また日本人の極めて独創性の高い仕事がないわけではない。後で触れることもあるだろうが数学は十九世紀中葉以後に大転換をとげた。その担い手となった数学者たちの独創性とダイナミズムと比べると我々は小さなものだが、といって欧米諸国も似たような現状である。独創性云々といった議論は本質をついているようで意味と内容はないのである。まして、「日本人のノーベル賞受賞者は少ない」などという議論にいたっては、「日本人は黄色人種である」というのと同程度だから、科学とは全く無縁である。

話が脱線してきたのでもとに戻す。世界のなかで日本の数学というものを考える際に、絶対に忘れてはならぬことがある。それは、我々は研究論文を日本語で書くことが可能であるということである。事実、数学辞典のよ

うな研究者向けの書物が日本語で書かれ、その英訳が利用されているのである。明治初期に洋算の紹介は当然外国語の文献によってなされ、日本語で書かれた算術の教科書を作るという作業がまず第一にとりかかられた。そして現在、我々は研究論文は原則として外国語、ほとんど英語で書くが、これは日本語では書けないからではなく、日本語で書いたら誰も読めないからに他ならない。

日本語で書くということは即ち日本語で考えるということである。ところで数学の記号法というのは欧州で使用されていたものをそのまま使う。それ故、数学の記号は、論文なり教科書なりが日本語であろうと中国語であろうとロシア語、英語、仏語、何語で書かれていても共通なものが使用される。数式も同じである。数式というのは、あるきまった型の文章を記号を用いて表現したものである。従って数式はそれ自身、主語も述語もある文章となっている。英語でも仏語でも、式に表わされた順序のまま読み上げていくとそのままで文章が完成するが日本語ではそうではない。根本的に言語構造が異なるからである。たとえば

$$a+b=c$$

は何と読まれるだろう。「aたすbはc」というのはむりやり語順を並べかえた直訳で文章にはなっていない。本来の日本語で同じ内容を表現すると「aにbを加えるとcに等しい」となる。従って日本語の文法通りにこの内容を式で表現すると、記号は同一のものを使用するとしても、

$$ab+c=$$

となる。

「数学」というものを考察する際に、我々が留意しなければならないのはこの点である。すなわち、日本語で数学を考えるということは、つねに日本語のなかに文法としても言語としても極めて異質なものを挿入しつづけているのである。そして、もしかすると逆に、我々は日本語で数学を考えるという行為そのものによって数学自身のなかに何か異質なものを持ち込んでいるのかもしれない。

結局、以上の議論のなかで言いたかったことは「日本語と数学」というのはそれ自身として大事なテーマである、ということである。数学の研究ばかりでなく、数学教育においても重要な意味をもつ。というより、現実に

は教育の面においてこそ、ないがしろにはできない事実なのである。この点については、福原満洲雄編著「数学と日本語」(共立書店)を参照されたい。

コンピュータと数学

これまで我々は日本における「数学」の現状を、ひとつには歴史的事情を通して、また、日本語という言葉との関係において見てきた。そこで次に、社会のなかにおける数学を、もう少し数学内部にたち入って考えてみることにする。その契機となるべきテーマは、「コンピュータと数学」である。コンピュータは数学者フォン・ノイマンの提案により生まれたプログラム内蔵方式の電子計算機が起源である。初期の電子計算機は、一万八千本の真空管、七万個の抵抗器、一万個のコンデサーが使用されていたという。今から三十五年程前のことである。今時真空管などというものはどこへ行ってもおめにかからない過去の遺物のようになってしまったが、真空管の寿命は意外と短いのである。いま仮りにこれを三千時間(相当高性能の真空管でも本当はもっと短かいだろう)と大きく見積っても、一万八千本も使っていれば、十分間に一本の割合で故障がおこる勘定になる。今から思えば、計算機の保守だけで大変な苦労であったろう。

そろばんはともかくとして、自動的な桁上げの機構をつけた計算機械は、一六四二年のパスカルによる加減算機が元祖といえるだろう。単純な個々の加減乗除を行なう卓上計算機に対して、あらかじめつくって機械に挿入してあるプログラムに従って、四則を結み合わせた複雑な計算を自動的に遂行する機械を自動計算機とよぶ。これは十九世紀に一数学者により提案されたが、機械技術の方がこのアイデアについていけなかった。それが実現したのは一九四〇年代、いゆるリレー式計算機によってである。前出のノイマンの計算機はこのリレー式計算機より数百倍も計算が早かったのであった。一九六一年に、四つのトランジスターを集積した微小電子回路、いわゆるICが開発され、真空管はこれにおきかえられることとなった。それ以来、ICは毎年平均2倍の割合で集積度が増加して来たというから、現在では当初の約百万倍にもなったわけである。このようなエレクトロニクスの大進歩によりコンピュータの性能はどんどん改良され、コンピュータ本体はこれに比例して小型化されてきたの

は周知のとおりである。エレクトロニクスの面からみたコンピュータの現状と将来について論ずるのは本稿の目的ではないから一切省略するが、興味のある方のために参考文献として雑誌「科学」特集号「マイクロエレクトロニクスの進歩とコンピュータの将来」(一九八一年十月号、岩波書店)をあげておく。

コンピュータの基本的アイデアは、数学者によりなされ、大いに進歩した現在にいたるまで本質的には続いている。自動計算機というアイデアからして数学者の出したものであるから、コンピュータは数学の産物と言って言えないこともないだろうが、現実のコンピュータの発達はもっとダイナミックなものである。それは数学をちょっと応用して、機械技術の開発をして、といった矮小なものではなく、数学、物理、工学など動員できるものは全て動員し、人間の英知と資本を惜しみなく投下することによりコンピュータ・サイエンスという総合的な科学を作り上げていく過程であった。既成の科学たとえば自然科学などは何千年もの蓄積の上にでき上がってきたものだが、コンピュータ・サイエンスの方はわずか三十余年りのうちに形成されたのである。コンピュータについて勉強しようとするとかなり高度な理学・工学の知識を必要とするから、コンピュータ・サイエンスは自然科学の一分野であると思うかもしれない。たしかにコンピュータについて大学で学ぼうとすると、所謂理科系へすすまなければならないが、コンピュータ・サイエンスの社会に与える影響をみるとそうではないことがわかる。我々は、家庭に居ながら、月面の様子や土星の輪を見ることができる。ロボットの導入により生産は省力化され、無人の工場で自動車が作られていく。これらは皆コンピュータ・サイエンスの発達とともに可能になったことである。見方をかえれば、このような進歩はたとえば労働力の配分のし方を一変し、もっと卑近な例をあげれば、オフィス・コンピュータの導入は事務処理の革命的合理化を可能にし、いわゆる窓際族を作りだす。コンピュータ・サイエンスは社会科学にも新らしいテーマと研究の契機を与えるであろうし、また社会科学の方法論においてもコンピュータは無視できない。

数学の将来とコンピュータ

コンピュータの応用は大雑把に言って、「数値的応用」

と「非算術的応用」の二つにわけられる。数値的応用というのは、一般にコンピュータを用いて人間の力ではとうていできないような計算をやらせることである。四則計算というのがその源であるが、ここでは微分方程式の数値解法というのを例にあげよう。ニュートンの万有引力の法則の発見により我々は天体の運動を微分方程式で記述することができる。天体というのは月とか太陽とかばかりではなくロケットとか人工衛星とかも含まれる。この微分方程式を厳密に解くことができれば天体の運動は完全にわかったということになる。ところが数学的にはこの方程式は「解けない」ことが知られている。これは前世記に、ポアンカレにより証明されたことである。「解けない」というのは少し注意を要するがこれは数学の専門的な知識を必要とする事柄であるから我々は細かく考えないことにしよう。とにかく解けないが近似値ならわかる。現実にロケットをとばしたりするには厳密には解けなくても、ある精度以上の近似値がわかれば十分なのであるから、結局コンピュータの性能がよければよいだけ精密な宇宙旅行ができるわけである。スペースシャトルも宇宙戦艦ヤマトも基本的にはこれによって飛行している。ただし、コンピュータの精度には限りがある。たとえば円周率πの近似値は百万桁でも時間さえかければ計算してくれるが、こうして得られた値はあくまでも近似値であって円周率πそのものではない。この点については後でもう一度たちかえって議論することにしよう。

さて、次に非算術的応用の方であるが、これは分類、翻訳、大きい表から情報を見つけ出す検索など、一般に情報処理といわれるものである。これまで「計算」とは思われていなかった、このような機能が実行されるようになったということの社会に与えた影響の大きさは、前にあげた事務の合理化すなわち、銀行のオンライン、国鉄の緑の窓口、電話の自動交換などなど繰り返すまでもあるまい。数学との関係では、四色問題の証明をあげよう。これは単に応用とばかり言い切れない問題点を含んでいる。四色問題というのは、『地球上、あるいは平面上の任意の地図を色分けするには、四色あれば十分である』ということを証明せよ、という問題である。一八七九年に数学者ケーリーがロンドン地理学会で提出して以来、一九七六年まで証明されなかった。今、我々はこれ

を問題ではなく「四色定理」として紹介することができるわけだが、この最初の証明は大型コンピュータの使用によりなされた。そしてコンピュータを使わない証明というのは今だに知られていないし、それに、そんなことは不可能だと信じる数学者が多い。コンピュータなくしては証明できない定理が存在したわけであるが、このような定理は他にもある。まして、コンピュータを思考の道具として使いながら証明を発見した定理というのはもっとずっと多いだろう。『数学は紙と鉛筆だけあれば仕事ができる』ということは以前よく言われていたが、今では、これは単なる揶揄でしかなくなってしまった。

今後、コンピュータ・サイエンスが益々発達していけば、およそ証明などというものは人間がやるより早く正確にコンピュータがやってくれる時代が来るかもしれない。理論物理学者ホーキングは講演「理論物理学の終りはみえているか」を次のような言葉で締め括っている。『現在、コンピュータは研究における有用な助手でしかなく、人間の精神によって指導されなくてはなりません。しかしながら、コンピュータというものは、最近の急速な発展速度を外挿して考えるならば、理論物理学において私達に完全にとってかわることも全く可能であると思われるのです。ですから、多分、理論物理学者の終りはすでにみえているのです。理論物理学の終りではないにしても。』これは「科学」一九八一年五月号より引用した。理論物理学というところを数学におきかえたらどうか。我々は、数学は永遠に不滅です。と言える程楽天家ではないし、どうせコンピュータは数学から出たんだからどっちにしても同じだ、と思える程野放図でもない。あのホーキング大先生の言うことだから、と一瞬ドキッとするが、彼程悲観的（楽観的？）にはなれない。前出の四色問題の証明にしたって、コンピュータが本質的役割りを果たしたのは本当だが、証明のアイデアまでコンピュータが考えついたわけではない。兎にも角にも現状はコンピュータは有用な助手でしかない。そして将来のことはわからない、というのを現時点での答にしておく。

数学という世界

前に、コンピュータの精度と関連して、近似値はいくら計算しても近似値でしかないということを述べた。こ

れは別の見方をすると有限か無限かということである。つまり、円周率πは無理数だから決して循環しない無限小数で表わされるが、近似値は百万でも百億でもとにかく有限個で切ってしまうから有理数である。この問題を以下考えてみることにする。数列の極限とか無限級数の和とかいうことは一応知っているものとして話をすすめる。例をあげよう。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$$

という級数、すなわち自然数の逆数を次々に加えていく級数を調和級数という。これは発散することが知られている。すなわち、

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

とおくと、nをどんどん大きくしていったとき、S_nもいくらでも大きくなる、これを、コンピュータを使って確かめてみようということになって、一方項ほど計算してみると、大体

$$S_{1000}=9.787606$$

という値が得られる。nを大きくすればS_nも大きくなるはずだが、実行しようとするとすぐコンピュータの精度が問題になる。いま仮りに三〇桁まで計算できるとすると、nが、十の三〇乗より大きくなると、nの逆数は全て零として計算される。従って調和級数は、ある番号から全部「同じ値」だから、ある数に「収集」する。この「極限値」は、コンピュータに依存する。こういうのは数学的な意味で収束するとはいわない。それでは、調和級数が発散するということは現実的にどんな意味があるだろうか。真の意味で精度が無限大の計算機が開発されたとして、それを使用することにして毎秒百万項ずつという超高速で計算を実行する。一時間後には

$$S_{3,600,000,000}$$

の値が求まるが、どうせ発散することを確かめるのが目的だから、二百億年程コンピュータを動かしつづけることにする。ちなみに、二百億年というのは、宇宙開闢から今までの時間である。計算される項の数は

$$6.31\times10^{23}$$

すなわち、0°C、1気圧における約二三・五リットルの気体に含まれる、気体分子の数と大体同じである。肝心の和の方は、約

にしかならない。無限大とはほど遠い。このような計算は、数学的に示される評価式を用いて、それに数値を代入し電卓で計算して得られた。ここで述べた例は、小島順氏の講座「微積分入門」（数学セミナー、一九八一年六月号、日本評論社）を参考にした。

　この例は、コンピュータの普及も含めた現実の世界で認識できることと、数学という世界によってはじめて認識できることとの相異を際立たせてくれる。コンピュータによる数値計算でははっきりととらえられない調和級数の和ということが数学の世界のなかではじめて確定的な意味をもつ。コンピュータを勉強するなら数学もわかなくてはならない、とか、理系にすすむためには数学は必須である、とか、近頃は文系といえども数学を使うからある程度やっておく、とか、よく言われるが、これらは「数学を理解するということは認識の世界をひろくする」という意味ならば全て正しい。世界をひろくしようとせまくしようと勝手だと言えばそうかもしれない。次のような話がある。ある大学で、『nが大きくなったときの$\frac{1}{n}\log n$の極限値を求めよ』という練習問題を出したところ、ある学生は『極限値は0である』と答えたという。その理由を問われたその学生、『電卓で計算してみたらそうなりました』と答えた。こうなると、むしろ無理矢理認識の世界（視野といってもよい）を狭くしているような気がする。数学教育という観点から考えると事態は深刻である。前にあげた調和級数のはなしは高校の数学で履修する。だから、二百億年計算していくつになるか、という計算も、言われてみれば高校生ができるべきものなのである。ところが現実はそうなってはいない。文系は数IIBまでで十分などと数学を勝手に切ってしまって、それ以上のことはやらなくてよいことになっているのが実験数学の現状である。よほどの物好きでもなければ数Ⅲを勉強しない、というより勉強することが「禁止」されていると同様なのである。数学という世界を、その内部構造と関係なく分割してあたかも知識の量を増やすことが数学の勉強であるという強制を行っているのである。これは勝手だ、ではすまないのである。一次方程式を知

っていればなんでもないことを「鶴亀算」という特別なものとして教える。これと同じことがいつまでも行なわれている。

数学的体系

数学を理解するということは、数学という世界を認識することである、という命題をもう少しほりさげていってみよう。そのために他の学問分野との対比で数学がどの様な役割りをはたしているか考えてみる。たとえば経済学を例にとれば、経済現象を抽象化していわゆる数量化を行ない、微分方程式などの数学的対象でもって表現しなおすのが第一歩であろう。次に、数学の言葉に翻訳された問題を数学的に処理して必要な解を決定し、それに対して再び経済学的な解釈を加えてもとの問題を考えてみる。大雑把にとらえればこのような手続きで数学が応用される。この意味でたしかに数学は「数・量について研究する学問」であるが、ここで述べた数量化という言葉は、経済学における世界から数学への移行を表わすものと理解すべきである。従って「量」と言っても、直観的に理解される「量」とは違うものである。応用というと、「ちょっと道具をかりてきて」というような手軽な感じがするが、決してそうではないことは、たとえば二階堂副包著『現代経済学の数学的方法』(岩波書店)という本を読むとわかる。ここでは、経済均衡論において数学が見事に「応用」されているが、ここで応用されているのは「位相空間論」という数学的体系である。この本は、数学に関する部分だけを抽出すると「位相空間論入門」というべき性格の本であるが、純粋な数学の教科書とは異なる。というのは、数学的体系としての「位相空間論」を紹介しながら、同時にたえず経済学的な見地を注入している。たまたま手許にあるのでこの本を例にあげたが、肝心なことだけ繰り返しておくこと、ここで言う「数学」とはあるひとつの数学的体系のことである、ということである。それでは、数学的体系とは何なのか。

数学辞典で「数学的体系」というのを調べると次のような意味のことが書いてある。すなわち『具体的な基礎集合と基礎概念が、ある型における条件と公理とを満足するとき、この基礎集合と基礎概念との組は、その数学的構造をもつひとつの数学的体系という』とある。少し

説明を加えよう。基礎集合とか基礎概念とかは、とにかくにも「基礎となるもの」である。これが適当な「条件と公理」を満たす、というのは、「基礎になるもの」の「組み立て方」が決まっている、ということである。もちろん、「条件と公理」が決して矛盾を内包しないこと（無矛盾性という）は大前提である。「基礎になるもの」と「組み立て方」が決まった時、その全体を数学的体系という。曖昧模糊とした言葉であるが、最も大切なことは、数学的体系においては「基礎となるもの」と「組み立て方」の二つがある、という事である。数学的体系のなかに「集合」という言葉がでてきた。中学高校以来訓染みのある言葉だが、数学の歴史のなかで集合という概念がはっきりととらえられだしたのは、そんなに古いことではない。十九世紀中葉以後、主として解析学の基礎づけと関連してあらわれたものである。このことからもわかるように、数学辞典のいうような数学的体系というのも比較的新らしい概念である。この歴史的な事情と経過や、それがどのように数学へかかわってきたかということを考えるのは、それ自身興味深いことであるが、残念ながら本稿では立ち入らぬことにする。たとえば、松坂和夫氏の論説『数学小史』（一橋論叢、八十一巻四号）を参照されたい。

さて、我々は数学的体系という言葉を、数学辞典とは少し違う意味で用いたい。そのために、折角馴染み深い集合という言葉を避けて単に「基礎となるもの」と言ってきたのである。集合という考え方の数学における位置は、数学を一軒の家にたとえるならば、家を建てるべき敷き地のようなものである。だからと言って、家に住む人が不断に敷き地のことを考えつづける必要がないのと同様に、我々は集合のことは深く考えないことにする。我々は数学辞典の言うよりももっと小さい体系も数学的体系と呼ぶことにする。たとえばある定理があったとき、この定理と、これを証明するために必要な事柄を全部あわせて、数学的体系と言ってもよいことにする。このとき、「基礎となるもの」は、それこそ集合という概念でもよいし、また証明すべき定理よりもっと簡単ないくつかの別の定理たちであってもよい。「組み立て方」とは、定理の証明の方針であるとか、道具であるとか、それらを総称したものである。数学的体系を以上の意味にとると、『数学とは数学的体系のあつまったもの』と言って

よい。数学的体系は数学という世界の構成要素である。さて、数学を勉強するとか、経済学に数学を応用するとかいうときに、我々が具体的に扱う数学とは皆この数学的体系である。たとえば、二次方程式の根の公式を考えてみる。具体的に根を計算することは単なる手続きであって、それだけが数学ではない。『二次方程式とは何か』『なぜそのようなものを考えるのか』等々、それら全てが数学である。

数学的現象

数学的体系における「基礎になるもの」をもう少し考えてみる。前に、たとえばいくつかの定理でもよい、と述べたが、「定理」とは一体何だろう。我々は完成された「定理」といわれるものに接することが多いから、『なぜこのような定理があるのか』とは深く考えもしない。しかし誰かが最初にその定理を作ったときは、どのようにしてそこに到達したのだろう。数学の研究者以外にはどうでもよいこと、かもしれぬが、「数学とは何だろうか」と考えている我々には必要なことである。数学者小平邦彦氏は次のように言っている。『自然現象の背後に数学的現象なるものが実在している。数学者は、物理学者が自然現象を研究すると同じ意味で、実在する数学的現象を研究している。そして数学を理解するということは、その数学的現象を「みる」ことである。「みる」というのは数覚によって知覚することである、というのが僕の実感ですけどもね』。これは、「科学」一九八一年九月号に載った、数学者飯高茂氏による〈インタヴュー〉『数学とは何だろうか』から抜粋した。「数覚」という聞きなれない言葉が出てきたが、これは小平氏の造語で、「数学を知覚する機能」をあらわす。我々は音楽や絵画を鑑賞するように、「数学を鑑賞する」ことができる。従って、「定理」とは数学的現象のひとつを表現するものであるから、本来発明されるものではなく、発見されるものなのである。音楽をわかるためにはその良さといったものを証明する必要がないのと同様、数学における証明は数学と理解するための手段であるから、我々の数覚がもっと鋭くなれば不必要なものになるかもしれぬ。

数学の教育というのは数学者を育成するためだけにあるのではないことはもちろんだが、それでも「数学的現

象」という考え方は説得力がある。数学教育は、各人の数覚を自分で再発見しそれを研くための手助けとなるべきものである。数覚ということが大切なのである。それは結局数学がわかるということなのである。数学的知識の量が増えたというだけのことではなくて、数学的現象を見ることができた、すなわち数学の世界にふれることができた、ということである。数学的現象というのは、一般に認知された言葉ではなく、所詮「実感」以上の域を出ないのかもしれない。しかし、自然現象との対比で考えるとき、それは比較的はっきりした形をもってあらわれる。理論物理学と数学との関係は、歴史的にも現実的にもそれを示している。物理現象を深く考察することにより我々は数学的現象をみることができた。微分積分学の誕生はまさにそれである。逆に、数学的現象をみることを通して物理現象が一層際立ってくる。これは量子力学以後の近代物理学においては顕著にあらわれた現象である。「数学とは何か」を考えることは「物理学とは何か」を考えることと無縁ではないのだが、我々は残念ながらこの点を将来の問題として残しておくしかない。

数学における厳密性

数学、すなわち数学的体系のもうひとつの要素、我々の言葉でいると「組み立て方」についてはくどくど述べる必要はないだろう。ただひとつだけ「厳密性」ということに触れておく。現在、我々は定理の証明とか、数学の基礎とかいった、数学の「厳密性」ということに非常に敏感である。しかし、いつの時代でもそうだったわけではない。ただしここで言う「厳密性」とは、英語の rigorous にあたるから、我々は以下この「リゴラス」という言葉を用いる。十八・九世紀の数学は必ずしも厳密ではなかった、と言うことがよくあるが、これはリゴラスではなかった、という意味である。数学上の重要な発見の多くは十八・九世紀に得られた。それらの仕事は現在のリゴラスな立場から見直おしをしてみると、途中の推論などには極めて曖昧なところが多いが、結果の正しさは残る。数学的現象を発見したのだから、現象すなわち「事実」が、リゴラスかどうかという「ものの見方」によらないのは当然であるが、他方、リゴラスに見ると結果の正し

くないもの、言い換えれば数学的現象を正しくとらえていない仕事も少なくない。このような曖昧さに対する深刻な反省の上にたって集合論、数学基礎論が生まれてきた、という事情は前に触れた。この集合という概念も十九世紀になされた発見である。厳密であることは数学にとって一応は避けて通れない道であったので、これにより数学が進歩したことは間違いない。

実は厳密をあらわす英語には

exact

というのもあって、現在我々は、「リゴラス」と「イグザクト」とを区別して使う。イグザクトとはどういう意味かを説明するために例をあげる。『実数係数の奇数次の方程式は必ず実根をもつ』これは「中間値の定理」を用いて「リゴラス」に証明できる。ところでいま、ある実数係数の五次方程式が具体的に与えられたとしよう。これが少なくともひとつ実根をもつこと、前の一般的定理の系として得られるが、この事実を示すにはもうひとつのやり方がある。それは、方程式が具体的に与えられた以上、その実根を具体的に書いてしまうやり方である。『1が根だから、この五次方程式は実根をもつ』これはやはり厳密な証明なのだが、「リゴラス」とは区別して「イグザクト」であるという、要するに、論理的な推論はともかくとして答を書いてしまう、という立場が「イグザクト」である。二次方程式の根の公式という例をとれば、これは「リゴラス」に得られた「イグザクト」な結果なのである。前に述べた十九世紀の数学的発見はリゴラスではなくともイグザクトなものも多い。この意味ではやはり厳密なのである。何でもイグザクトに答が求まれば申し分ないがなかなかそうはいかない。五次以上の方程式には「根の公式」は存在しないことがリゴラスに証明される。従って前にあげた定理は、方程式が特別のものでない限り、イグザクトにわかるとは言えない。

現在、高等学校の数学教育ではこのイグザクトなものに準拠している。その意味で十分厳密な数学を教育しているのだから、無理に集合とか論証とかリゴラスな立場を導入しなくても十分に数学的世界にふれることができるはなのである。そうなっていないのは、やはり受験戦争のせいなのかもしれない。

最後に、前項で言い残したことをつけ加えておく。物理学というのは歴史的にも現在もイグザクトであるかど

うかということについて数学以上に敏感である。数学者のなかに、物理学には厳密性を欠く部分が多い、という意味のことを言う人もいるが、たとえリゴラスではなくても、物理現象に裏打ちされた、イグザクトな理論ということもある。立派な理論というのは、出発はともかくとして、リゴラスな数学的理論をつくりあげてためしてみてもやっぱり正しい。我々はこのことを今世紀になってずい分経験してきた。ちなみに、物理学と数学とは古くから学問としては分離した存在であったが、物理学者と数学者が別の存在になったのはほんのごく最近のことである。

終わりに

以上、「数学とは何だろうか」というテーマでいろいろな側面を観察してきた。こうやって整理してみても考えなければならぬことはいくつでもあることがわかっただけで、結論らしいことは出てこなかった。本稿では、数学自身の内部に深くたち入らなかったので、当然のことながら、数学の周囲をぐるぐる歩いてまわることに終始してしまった。そのため説明不足になったが、後半で述べた数学的現象に関するところは一数学者としての著者の考え方である。御批判を乞うために、あえて未熟な考えを披露した次第である。数学の全体像を浮かび上がらせるという目的で出発したにしては不十分なものになってしまったが、一応、大目標のための一歩をふみだしたところ、ということで御勘弁願いたい。もし機会があれば、ここで提出した問題のいくつかをもっと深く考えてみたい。

（一橋大学助教授）