Discussion Paper Series

No.228

経済時系列分析と単位根検定：
これまでの発展と今後の展望

黒住英司

December 2007

Hitotsubashi University Research Unit
for Statistical Analysis in Social Sciences
A 21st-Century COE Program

Institute of Economic Research
Hitotsubashi University
Kunitachi, Tokyo, 186-8603 Japan
http://hi-stat.ier.hit-u.ac.jp/

経済時系列分析と単位根検定：これまでの発展と今後の展望

黒住　英司

一橋大学大学院経済学研究科

2007 年 9 月 30 日

概 要

本稿では，単位根検定に関するこれまでの主流な研究結果を振り返り，今後の展望について考察する．まず最初に，単位根問題とはどのような検定問題であるのか整理し，ADF 検定から始まる一連の研究の流れを追うことにする．また，単位根問題から派生した構造変化の問題についても言及する．その上で，今後の発展について探ることにする．

1. はじめに

時系列分析，とりわけ経済時系列分析において，単位根問題は過去 30 年近く最も注目を浴び続けたトピックスの一つである．このように長きにわたり多くの学者の興味を引き続けてきた理由として，理論的な観点からは，いわゆる「スタンダード」な漸近理論が成り立たないことが挙げられる．すなわち，定常過程において成立する中心極限定理が単位根過程に対しては成り立たないため，既存の先行研究の成果をそのまま当てはめることができないのである．これは，定常過程において興味のあるパラメータはパラメータ空間の内点に存在するのに対し，単位根過程では端点に存在するという違いから生じる結果である．このため，多くの新しい理論を確立せねばならず，理論的な研究対象として興味深いものとなっているのである．

一方，実証分析でも単位根の有無は経済時系列の解釈に大きな違いを与える．例えば，単位根の有無によってデータが平均回帰的であるか否かの判断が分かれ，ビジネス・サイクルの解釈が変わってくる．また，ファイナンスでは単位根の存在を市場の効率性と結び付けて考えることができるため，単位根検定が重要になってくる．さらに，購買力平価説の成立のためには，単位根仮説を否定しなければならない．今や，経済時系列分析においては単位根検定を行ってから次の分析プロセスに移るというのが常識となってきている．

単位根検定は長期にわたり理論・実証の両面から発展してきており，関連する論文の数は膨大であり，そのすべてをサーベイすることは到底困難である．しかしながら，膨大な数の研究成果の中でも，いわゆる「メイン・ストリーム」として研究されてきた流れというものがあるのも事実である．本稿では，そのような流れを追うとともに，今後，単位根検定の研究がどのような方向へ発展していくのか，その展望を探ることにする．具体的には，モデルを AR 過程で近似する「ADF 検定」を主軸にこれまでの流れを追い，今後の発展を考察する．この「ADF 検定」は実証研究ではもはや定番となっている検定方法であり，非常に多くの論文で使われているものである．しかしながら，理論的にはこの検定の短所もいくつか指摘されており，その改良方法や別の検定手法が提案されている．そこで，本稿でははじめにそのような流れを追い，いくつかの単位根検定について考察を行った後，今後の展望について述べることにする．

以下，第 2 節では単位根検定とはそもそもどのような検定問題であるかということを紹介し，続いて単位根検定の歴史を振り返ることにする．はじめに ADF 検定を説明した上で，そ

の欠点を克服するための手法を考察する．第 3 節では単位根問題から派生した構造変化の問題について考察する．そして第 4 節で今後の展望について探ることにする．

2. 単位根検定

2.1. モデルと検定問題

観測値 y_t に対して以下のようなモデルを考える．

$$y_t = \mu' z_t + x_t, \quad \phi(L)x_t = u_t \quad (t = 1, 2, \cdots, T). \tag{1}$$

ただし，z_t は非確率変数，$u_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$ とし，$\phi(L)$ は L をラグ・オペレータとした p 次のラグ多項式

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$

である．また，初期値 $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{1-p}$ は所与で標本の大きさ T には依存しないものとする．x_t は非観測変数である．したがって，このモデルでは観測値 y_t は非確率項 $\mu' z_t$ の周りを p 次の自己回帰 (AR(p)) 過程に従って変動していると解釈できる．z_t に関しては三角関数や非線形関数なども想定できるが，多くの経済モデルでは z_t は定数もしくは定数と線形トレンドからなると想定されることから，本稿では $z_t = 1$ (定数項モデル) と $z_t = [1, t]'$ (トレンドモデル) の二つのモデルについて分析する．

さて，我々の関心は，y_t が $\mu' z_t$ を中心に単位根過程に従っているのか (すなわち，$x_t = y_t - \mu' z_t$ が単位根過程に従っているのか)，それとも定常に変動しているのかという点にあるので，帰無仮説として単位根モデル，対立仮説として (トレンド周りの漸近的な) 定常モデルを想定することにする．y_t が単位根過程であるとは，モデル (1) において x_t のラグ多項式に関する特性方程式 $\phi(z) = 0$ が 1 を根として持つということであるから，検定問題は

$$H_0: \ \phi(1) = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \ \phi(1) > 0 \tag{2}$$

となる．ここで，対立仮説を $\phi(1) > 0$ としたのは，仮に $\phi(1) < 0$ とすると，$\phi(0) = 1$ という事実から $(0, 1)$ 区間に特性方程式の解が存在し (中間値の定理)，定常性の仮定に反するためで

ある．なお，単位根過程はしばしば I(1) 過程 (an integrated process of order 1) と呼ばれるのに対して，(トレンド周りの) 定常過程を I(0) 過程ということがある．

次に，定数項モデル，トレンドモデルそれぞれの場合について，具体的に検定問題を考えることにする．まず，定数項モデルでは $\mu' z_t = \mu$ であるので，モデル (1) は

$$y_t = \mu + x_t, \quad \phi(L)x_t = u_t$$

となる．この式に左から $\phi(L)$ をかけて y_t でモデルを表現すると，

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t \tag{3}$$

となる．ただし，$c = \phi(1)\mu$ である．さらに，上の式は以下のように変形できることが知られている．

$$\Delta y_t = c + \rho y_{t-1} + \psi_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \psi_{p-1}\Delta y_{t-p+1} + u_t. \tag{4}$$

ただし，$\Delta = 1 - L$ で，

$$\rho = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1, \quad \psi_i = -\sum_{j=i+1}^{p} \phi_j \quad (i = 1, 2, \cdots, p-1)$$

である．ここで，$\rho = -\phi(1)$ および $c = \phi(1)\mu$ であることに注目すれば，検定問題 (2) はモデル (4) においては

$$H_0: \ \rho = 0 \quad \text{かつ} \quad c = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \ \rho < 0 \tag{5}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
&(\text{帰無モデル}) \quad : \quad \Delta y_t = \psi_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \psi_{p-1}\Delta y_{t-p+1} + u_t, \\
&(\text{対立モデル}) \quad : \quad y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t,
\end{aligned}$$

となるので，帰無仮説の下では y_t はドリフト無しの単位根モデル，対立仮説の下では平均が未知の定常モデルとなる．

トレンドモデルにおいても，同様に考えて検定問題を表現することができる．まず，トレンドモデルは

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + x_t, \quad \phi(L)x_t = u_t$$

となるが，先ほどと同様にモデルを y_t で表現すると

$$y_t = c_0 + c_1 t + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t \tag{6}$$

となる．ただし，$c_0 = \phi(1)\mu_0 - \phi'(1)\mu_1$，$c_1 = \phi(1)\mu_1$ である．ここでさらに，(3) から (4) への変形と同様にして

$$\Delta y_t = c_0 + c_1 t + \rho y_{t-1} + \psi_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \psi_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t \tag{7}$$

が得られる．したがって，検定問題 (2) はトレンドモデル (7) においては

$$H_0:\ \rho = 0 \quad \text{かつ} \quad c_1 = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1:\ \rho < 0 \tag{8}$$

となることがわかる．したがって，

$$\begin{aligned} &(\text{帰無モデル}) \quad : \quad \Delta y_t = c_0 + \psi_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \psi_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t, \\ &(\text{対立モデル}) \quad : \quad y_t = c_0 + c_1 t + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t, \end{aligned}$$

となるので，帰無仮説の下では y_t はドリフトつきの単位根モデル，対立仮説の下では線形トレンドの周りを定常に変動しているモデルとなる．後者のことを特に，トレンド定常モデルと呼ぶ．

以上のように，定数項モデル，トレンドモデルどちらのモデルにおいても単位根仮説は複合仮説として表現できることから，Dickey and Fuller (1981) は検定問題 (5) および (8) に対して尤度比検定統計量を用いて仮説検定を行うことを提唱し，その極限分布を導出した．しかしながら，その他の先行研究においては多くの場合，c や c_1 に関する制約には触れずに，$\rho = 0$ という仮説のみに関する研究が行われている．したがって，本稿でも

$$H_0':\ \rho = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1':\ \rho < 0 \tag{9}$$

という検定問題に焦点を絞って議論を進めることにする．

2.2. ADF 検定

はじめに述べたように，単位根モデルにおいては標準的な漸近理論が成り立たず，パラメータの推定量は必ずしも正規分布とならない．今，検定問題は (9) であるから，H_0' の下での ρ

の推定量の分布が検定に重要な役割を果たすことになる．ここで，定数項モデル (4) において Δy_t を定数と y_{t-1}，$\Delta y_{t-1},\cdots,\Delta y_{t-p+1}$ に回帰したときの y_{t-1} の係数推定量を $\hat{\rho}_\mu$，トレンドモデル (7) において Δy_t を定数と線形トレンド，y_{t-1}，$\Delta y_{t-1},\cdots,\Delta y_{t-p+1}$ に回帰したときの y_{t-1} の係数推定量を $\hat{\rho}_\tau$ とする．Dickey and Fuller (1979) や Said and Dickey (1984), Phillips (1987) はこれらの推定量の極限分布が以下のようになることを示した．

$$T\hat{\rho}_\mu \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}(B^2(1)-1)-B(1)\int_0^1 B(s)ds}{\int_0^1 B^2(s)ds-(\int_0^1 B(s)ds)^2},\quad T\hat{\rho}_\tau \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}(B^2(1)-1)+A}{D}. \tag{10}$$

ただし，$B(r)$ は $0\le r\le 1$ 上の標準ブラウン運動で，

$$A=12\left(\int_0^1 sB(s)ds-\frac{1}{2}\int_0^1 B(s)ds\right)\left(\int_0^1 B(s)ds-\frac{1}{2}B(1)\right)-B(1)\int_0^1 B(s)ds,$$

$$D=\int_0^1 B^2(s)ds-12\left(\int_0^1 sB(s)ds\right)^2+12\int_0^1 B(s)ds\int_0^1 sB(s)ds-4\left(\int_0^1 B(s)ds\right)^2$$

である．これらの極限分布は正規分布とは異なるものの，シミュレーションや特性関数を反転させて数値積分を行うなどの方法で，分布の分位点を求めることができる．したがって，$T\hat{\rho}_\mu$ および $T\hat{\rho}_\tau$ を単位根仮説の検定統計量とみなすことができる．

また，ρ に関する t 統計量を検定統計量とすることも可能である．今，モデル (4) および (7) の ρ に関する t 統計量をそれぞれ t_μ^{ADF}，t_τ^{ADF} とすると，

$$t_\mu^{ADF} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}(B^2(1)-1)-B(1)\int_0^1 B(s)ds}{\sqrt{\int_0^1 B^2(s)ds-(\int_0^1 B(s)ds)^2}},\quad t_\tau^{ADF} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}(B^2(1)-1)+A}{\sqrt{D}} \tag{11}$$

となる．

このように，モデル (4) や (7) を最小 2 乗法で推定して $T\hat{\rho}_\mu$，$T\hat{\rho}_\tau$，t_μ^{ADF}，t_τ^{ADF} を用いて行う単位根検定のことを，ADF(augmented Dickey-Fuller) 検定という．なお，$p=1$ の AR(1) モデルでの単位根検定を特に DF(Dickey-Fuller) 検定という．t 統計量タイプの ADF 検定は重回帰の t 値を参照するだけなので，多くのコンピューター・パッケージ・プログラムに組み込まれており，単位根検定に一番多く使われている検定方法である．

2.3. ADF-GLS 検定

ADF 検定はその使いやすさから広く使われてきたが，一方で，その検出力の低さがしばしば指摘されてきた．そこで，ADF 検定よりも検出力の高い検定方法として Elliott, Rothenberg and Stock (1996, 以後，ERS と表記) により提案された ADF-GLS 検定が注目されるようになっている．

まずはじめに，ADF-GLS 検定と関係が深い POI(point optimal invariant) 検定の説明から始めることにする．POI 検定の導出には誤差項に正規性を仮定し，H_1' にみられるような固定対立仮説ではなく，以下のような局所対立仮説を想定する．

$$H_0^\ell:\ \rho = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1^\ell:\ \rho = \rho(\theta) = -\frac{\theta}{T}\ \ (\theta > 0).$$

局所対立仮説は，検定統計量の漸近的な検出力が検定のサイズ α と 1 の間となるように設定されている．ここで，モデルの真のパラメータは $\rho = \rho^* = -\theta^*/T$ であるとする．また，検定統計量はある不変なクラスで考えているものとする．我々の目的は検出力の高い検定を構築することであるが，上の検定問題に対しては一様最強力検定が存在しないことが知られているので，そのような検定を作ることは不可能である．しかしながら，対立仮説の θ を固定すれば，その固定した一点 $\rho(\theta)$ に対しては最強力検定を構築することができる．今，$y = [y_1, y_2, \cdots, y_T]'$ の密度関数を $f(y;\theta)$ とすると，Neyman-Pearson の補題より，

$$\mathcal{L}(\theta;\alpha) \equiv \frac{f(y;\theta)}{f(y;0)} \geq k_\alpha$$

を棄却域とする検定が，対立仮説 $\rho(\theta)$ に対する最強力検定となる．ただし，k_α は $P_{\theta^*=0}(\mathcal{L}(\theta;\alpha) \geq k_\alpha) = \alpha$ を満たすものとする．この検定の検出力関数は

$$\varphi(\theta,\theta^*;\alpha) \equiv P_{\theta^*}(\mathcal{L}(\theta;\alpha) \geq k_\alpha)$$

と θ^* の関数で表現できるので，θ^* を様々な値に変えれば最強力検定の検出力関数を描くことができる．ここで，$\varphi(\theta,\theta^*;\alpha)$ における θ は我々が対立仮説としてあらかじめ設定するパラメータであるのに対し，θ^* は分布の真のパラメータであることに注意する．このように構築した検定は，一点の対立仮説 $\rho(\theta)$ に対してのみ最強力であることから，POI 検定と呼ばれる．

POI 検定は，想定した対立仮説 $\rho(\theta)$ と真の分布の $\rho(\theta^*)$ が一致する場合は最強力検定となるが，それ以外の場合は一般には最強力検定ではない．そこで，実際に POI 検定を用いる場合，どのような対立仮説 $\rho(\theta)$ を設定すべきかが問題となってくる．そのためにまず，検出力の上限を考える．θ^* を真のパラメータとする分布に対しては $\theta = \theta^*$ を対立仮説として設定して検定統計量を作成すれば検出力は最大となり，その検出力は $\varphi(\theta^*,\theta^*;\alpha)$ で与えられる．し

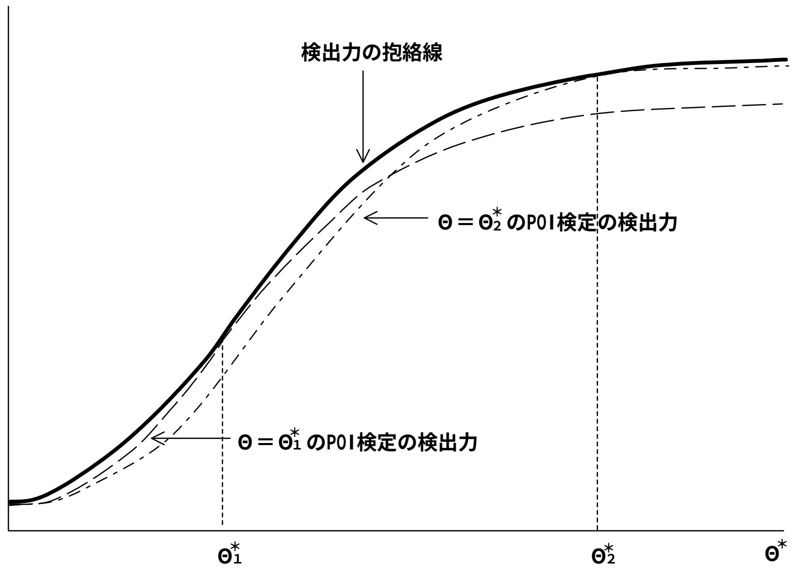


図 1: 検出力の抱絡線と POI 検定の検出力の関係

たがって，$\varphi(\theta^*, \theta^*; \alpha)$ を θ^* の関数としてグラフを描けば，POI 検定の検出力の上限をつないだ抱絡線が得られる．この関係を図示したものが図 1 である．対立仮説として $\theta = \theta_1^*$ を想定した POI 検定の検出力関数は θ_1^* で検出力の抱絡線と接するが，一般にその他の点では検出力は抱絡線より低くなる．θ_2^* を想定した場合の POI 検定の検出力関数と抱絡線の関係も同様である．

一般に，POI 検定の検出力の抱絡線は到達不能な曲線であるが，検出力関数がこの抱絡線に近いほど，より望ましい検定であるということができる．King (1983) や Tanaka (1996) では POI 検定の検出力関数 $\varphi(\theta, \theta^*; \alpha)$ が抱絡線の 50%点で接するように θ を設定すれば，POI 検定の検出力関数が全体的に抱絡線に近づくことに着目し，そのような θ の選び方を推奨している．ERS はこの方法にしたがい，単位根検定の POI 検定を導出した．具体的には，定数項モデルでは $\theta = 7$ を，トレンドモデルでは $\theta = 13.5$ と設定した POI 検定を推奨している．

ERS ではさらに POI 検定と ADF 検定の違いを分析し，二つの検定の検出力の違いが主に定数・トレンド項のパラメータ推定の効率性の違いに起因していることを指摘し，ADF 検定においてもこれらのパラメータを効率的に推定すれば検出力がより高くなることを示した．彼

らの提案した検定は ADF-GLS 検定と呼ばれ，検定統計量は以下の手順で作成される．

(1) y_t および z_t を以下のように変換する．

$$y_t^{qd} = \begin{cases} y_1 & : \ t=1 \\ y_t - a y_{t-1} & : \ t \geq 2 \end{cases}, \quad z_t^{qd} = \begin{cases} z_1 & : \ t=1 \\ z_t - a z_{t-1} & : \ t \geq 2 \end{cases}$$

ただし，定数項モデルでは $a = 1 - 7/T$，トレンドモデルでは $a = 1 - 13.5/T$ とする．

(2) y_t^{qd} を z_t^{qd} に回帰し，得られた推定量を $\hat{\mu}_{qd}$ とする．

(3) y_t から定数・トレンドを除いた系列

$$x_t^{qd} = y_t - \hat{\mu}'_{qd} z_t$$

を作成する．

(4) x_t^{qd} をベースに，ADF 検定統計量 (t 統計量) を定数項無しのモデルで作成する．すなわち，

$$\Delta x_t^{qd} = \rho x_{t-1}^{qd} + \psi_1 \Delta x_{t-1}^{qd} + \cdots + \psi_{p-1} \Delta x_{t-p+1}^{qd} + e_t$$

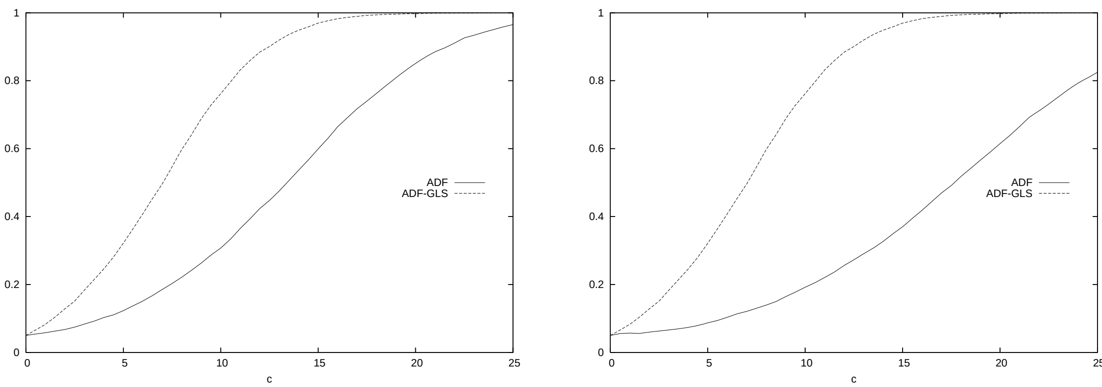
を OLS で推定し，ρ に関する t 統計量を t_μ^{GLS}(定数項モデルの場合)，t_τ^{GLS}(トレンドモデルの場合) とする．

ERS によると，帰無仮説の下での t_μ^{GLS} および t_τ^{GLS} の極限分布は以下のようになる．

$$t_\mu^{GLS} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}(B^2(1)-1)}{\sqrt{\int_0^2 B^2(s)ds}}, \quad t_\tau^{GLS} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}(V^2(1,\theta)-1)}{\sqrt{\int_0^2 V^2(s,\theta)ds}}.$$

ただし，$V(r,\theta) = B(r) - r\{\lambda B(1) + 3(1-\lambda)\int_0^1 sB(s)ds\}$，$\lambda = (1-\theta)/(1-\theta+\theta^2/3)$ で，定数項モデルでは $\theta = 7$，トレンドモデルでは $\theta = 13.5$ である．t_μ^{GLS} および t_τ^{GLS} に基づく単位根検定を ADF-GLS 検定と呼ぶ．

図 2 は ADF 検定と ADF-GLS 検定の漸近的な検出力を描いたものである．定数項モデル，トレンドモデルどちらにおいても，ADF-GLS 検定の検出力の方が高いことが分かる．特に，トレンドモデルにおける検出力の差は顕著である．このような関係から，実証分析においても ADF 検定のみならず，ADF-GLS 検定も使われ始めている．



(i) 定数項モデル　　(ii) トレンドモデル

図 2: ADF 検定と ADF-GLS 検定の局所対立仮説下の漸近的検出力

2.4. ラグ次数の選択

これまでの議論はモデルが自己回帰モデルであり，ラグ次数が既知であることを前提としていた．しかしながら，Box and Jenkins (1971) 以降，時系列データを以下のような次数 p, q の自己回帰移動平均 (ARMA(p,q)) 過程でモデル化することも多い．

$$y_t = \mu' z_t + x_t, \quad \phi(L)x_t = \vartheta(L)u_t.$$

ただし，p 次のラグ多項式 $\phi(L)$ の根は単位円外もしくは 1 とし，$\vartheta(L)$ は反転可能な q 次のラグ多項式で，$\phi(L)$ と $\vartheta(L)$ は共通の根を持たないものとする．上のモデルで $\phi(L)$ が単位根を持つ場合は特に自己回帰和分移動平均 (ARIMA$(p-1,1,q)$) モデルと呼ばれる．経済データ，特にマクロ経済データでは移動平均 (MA) 項の存在が観測されることが多いので，上記のような ARIMA モデルがしばしば想定される．ARIMA モデルにおける単位根検定は Hall (1989), Pantula and Hall (1991)，Ahn (1993) などで提案されている．

しかしながら，ARIMA モデルの問題点として，MA 項のラグ多項式 $\vartheta(L)$ の根が比較的 1 に近い場合，パラメータの推定に問題が生じることが知られている．そこで $\vartheta(L)$ を反転させ，モデルを AR(∞) で表現して考えることにする．すなわち，

$$\phi^*(L)x_t = u_t, \quad \text{ただし，} \quad \phi^*(L) \equiv \phi(L)\vartheta^{-1}(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^* L^i, \tag{12}$$

とモデルを AR(∞) で表現し，これを有限次の AR(p) モデルで近似して ADF 検定などの単位根検定を行うのである．このような近似の有効性は定常モデルでは Berk (1974)，単位根モデルでは Said and Dickey (1984) や Ng and Perron (1995) で証明されている．ただし，単位根検定が妥当であるためには近似するラグの次数 p がサンプルサイズ T とともに大きくなる必要がある．

また，ARIMA モデルに限定せず，以下のようなセミパラメトリック・モデルを出発点として考えることも可能である．

$$y_t = \mu' z_t + x_t, \quad (1 - \phi L) x_t = w_t, \quad w_t \text{ は共分散定常過程.} \tag{13}$$

この場合，Wold の分解定理より w_t は

$$w_t = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i u_{t-i}, \quad \text{ただし,} \quad \psi_0 = 1,\ \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

と w_t を MA(∞) で表現できる．さらに Brillinger(1981) によれば，この場合，MA 項を反転させることが可能なので，w_t はモデル (12) のように AR(∞) で表現することができる．

このように，一般的なモデル (13) においても AR(∞) 表現が可能であるので，モデルを有限次元の AR モデルで近似して，これまでどおり (4) や (7) に基づいた ADF 検定や ADF-GLS 検定を行うことができる．ここで問題となるのが，ラグ次数の選択である．Ng and Perron (1995) では以下の次数選択の方法を分析している．

(1) サンプル・サイズ T に依存した方法：この方法は Schwartz (1989) によりシミュレーション結果に基づいて提案された方法で，

$$p = \text{int}\left\{4\left(\frac{T}{100}\right)^{1/4}\right\} \quad \text{もしくは} \quad p = \text{int}\left\{12\left(\frac{T}{100}\right)^{1/4}\right\}$$

であるが，理論的な根拠は乏しい．

(2) 情報量基準による方法：情報量基準 AIC や BIC をもとに次数 p を選択する．

(3) 係数の逐次検定に基づく方法：この方法ではまず，ラグ次数 p の上限 $\bar{p}$ を設定し，最初に $p = \bar{p}$ でモデルを推定する．もし $\phi_{\bar{p}}$ の推定値の t 値が有意ならば AR($\bar{p}$) で単位根検定を行い，$\phi_{\bar{p}}$ の t 値が有意でなければ AR($\bar{p} - 1$) モデルを再推定する．AR($\bar{p} - 1$) の推

定でも同様に $\phi_{\bar{p}-1}$ の t 値が有意ならば単位根検定を，有意でなければ AR($\bar{p}-2$) モデルを再推定する．このように，モデルの最高次数に関する係数の有意性を検証してモデルの次数を下げていき，有意になった段階で次数 p を固定して単位根検定を行うというものである．

Ng and Perron (1995) では，有限標本での検定のサイズ・検出力両面において，3 番目の逐次検定に基づく方法を推奨している．

一方，Ng and Perron (2001) は，モデルに MA 項が存在してそのラグ多項式の根が比較的大きな値の場合，上のいずれの方法でもサイズに歪みが生じることがある点を指摘している．とくに Ng and Perron (2001) では単位根仮説下では AIC や BIC などの情報量基準におけるペナルティー項が必ずしも適切ではないため，ラグ次数を短めに選ぶ傾向をがある点に着目し，以下のような修正された情報量基準 (MIC) を最小にするラグ次数を選択することを推奨している．

$$MIC = \ln \hat{\sigma}_p^2 + \frac{C_T(\tau_T(p) + p - 1)}{T - \bar{p}}.$$

ただし，$\hat{\rho}$，$\hat{u}_{p,t}$ は (4) もしくは (7) の OLS より推定されたものとして

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{T-\bar{p}} \sum_{t=\bar{p}+1}^{T} \hat{u}_{p,t}^2, \quad \tau_T(p) = \frac{\hat{\rho}^2 \sum_{t=\bar{p}+1}^{T} (\tilde{x}_{t-1}^{qd})^2}{\hat{\sigma}_p^2}$$

とする．AIC をベースにした MAIC では $C_T = 2$，BIC をベースにした MBIC では $C_T = \ln(T-\bar{p})$ を用いる．Ng and Perron (2001) では，モデルに MA 項が含まれている場合，MAIC を用いた単位根検定はサイズの歪みが少ないことをシミュレーションで検証している．

2.5. 初期値問題

第 2.4 節で説明したように，単位根検定の漸近的な検出力を考慮すると，ADF-GLS 検定の方が ADF 検定よりも理論的に優れているといえる．その一方で，Müller and Elliott (2003) は有限標本におけるデータの初期値の影響について詳しく分析を行い，初期値が小さな値ならば ADF-GLS 検定の方が有限標本での検出力が高いが，初期値が大きな値の場合は ADF 検定の方が優れていることを指摘した．

有限標本における検出力が初期値の影響を受けることは以下のように説明される．簡単のために以下のような AR(1) モデルを考える．

$$y_t = \mu' z_t + x_t, \quad x_t = \phi x_{t-1} + u_t. \tag{14}$$

今，$\phi = 1$ の単位根モデルでは，

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^{t} u_i$$

と表現できることから，初期値 x_0 は定数項を持つ非確率項 z_t に吸収されるために検定統計量が初期値に関して不変となり，検定のサイズは x_0 の影響をまったく受けない．しかしながら，対立仮説の下では，

$$x_t = \rho^t x_0 + \sum_{i=1}^{t} \rho^{t-i} u_i$$

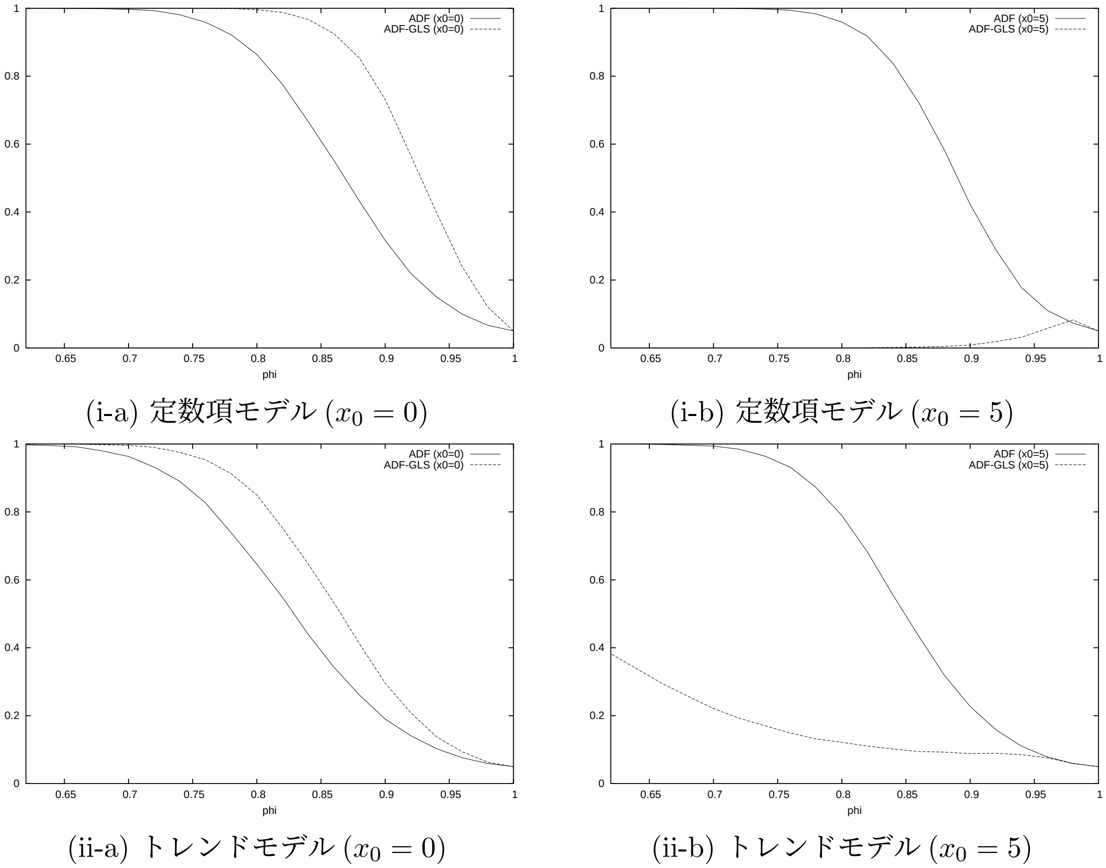
となり，初期値は $\rho^t x_0$ を通じて検定統計量に現れるので，有限標本の検出力にも影響を及ぼす．

Müller and Elliott (2003) ではまず，初期値 x_0 の分布 $F(x_0)$ が $N(0, k\sigma^2)$ に従うと仮定して，初期値に関する検出力の加重平均を最大にする最適検定族 $\varphi_0(\phi^*, k)$ を求めている．

$$\varphi_0(\phi^*, k) = \arg_\varphi \max \int P\left(\varphi \text{ rejects} | \phi = \phi^*, x_0\right) dF(x_0)$$

ここで，φ は任意の検定を表す．したがって，検定族 $\varphi_0(\phi^*, k)$ の中でも，$k = 0$ に対応する $\varphi(\phi^*, 0)$ は初期値 $x_0 = 0$ に全ウェイトをかけた検定となり，初期値が 0 の系列に対して検出力が高い．一方，k の値が大きな検定は初期値の絶対値が大きなものにもウェイトをおいているため，初期値が 0 から離れている系列に対して高い検出力を持つことになる．Müller and Elliott (2003) は ADF 検定や ADF-GLS 検定を含めた既存の単位根検定がこの検定族に含まれるか，もしくは密接に関係することを示しており，特に，ADF-GLS 検定は $k = 0$ に，ADF 検定は k が大きな値に対応しているため，有限標本での検出力に差が出ることを指摘している．

具体的に検定のサイズが初期値の影響をどの程度うけるか示すために，AR(1) モデル (14) で $T = 100$ の場合のサイズ調整済み検出力をシミュレーションにより求め，図 3 に示している．定数項モデルで初期値が 0 の場合 (図 3(i-a))，漸近理論同様，ADF-GLS 検定の方が ADF 検定よりも検出力が高い．しかし，初期値を 5 に変更すると (図 3(i-b))ADF-GLS 検定は検出力を失う一方，ADF 検定の検出力は高くなる．同様の傾向はトレンドモデルでも観測される (図 3(ii))．



(i-a) 定数項モデル ($x_0 = 0$)　(i-b) 定数項モデル ($x_0 = 5$)

(ii-a) トレンドモデル ($x_0 = 0$)　(ii-b) トレンドモデル ($x_0 = 5$)

図 3: 単位根検定に対する初期値の影響

以上のような初期値問題は ρ^t の方向に不変な検定統計量を作成すれば対立仮説の下でも初期値の影響を受けないことになるが，そのような統計量では検出力が上がらないことが Elliott and Müller (2006) によって示されている．そのうえで，彼らは初期値の影響を受けにくい以下の検定統計量を提案している．

$$\hat{Q}^m = q_0^m + q_1^m \left(\frac{\hat{y}_0^m}{\sqrt{T}} \right)^2 + q_3^m \frac{\hat{y}_0^m \hat{y}_T^m}{T} + q_4^m \frac{\sum_{t=1}^T \left(\hat{y}_{t-1}^m \right)^2}{T^2}.$$

ただし，$m = \mu$ の場合が定数項モデルで，$\hat{y}_t^\mu = (y_t - \sum_{s=0}^T y_s / T) / \hat{\omega}$，$\hat{\omega}^2$ は x_t に AR(1) モデ

ルを当てはめた後の誤差項の長期分散 ($2\pi\times$ 原点でのスペクトル) の一致推定量，また，

$$q_0^\mu = -10, \quad q_1^\mu = -4.95, \quad q_2^\mu = 9.05, \quad q_3^\mu = 0.9, \quad q_4^\mu = 100$$

である．$m = \tau$ の場合がレンドモデルで，$\hat{y}_t^\tau$ は $\hat{y}_t^\mu$ を 1 と t に回帰させた残差，

$$q_0^\tau = -15, \quad q_1^\tau = -7.127, \quad q_2^\tau = 12.166, \quad q_3^\tau = -3.31, \quad q_4^\tau = 225$$

である．

一方，初期値の影響は各検定統計量ごとに異なることに着目して，複数の検定統計量の加重平均を考えることにより，初期値問題を回避する試みもある．Harvey and Leybourne (2005) では ADF 検定統計量と ADF-GLS 検定統計量の加重平均を，Harvey and Leybourne (2006) では ADF 検定統計量と Elliott and Müller (2006) の $\hat{Q}^m$ の加重平均を提案してる．ただし，加重平均に用いるウェイトはデータより算出するものとする．

いずれにしてもこれらの統計量用いることにより，初期値に関する事前情報が利用できない場合には検出力の極端な低下を避けることができる．ただし，初期値に関する何らかの情報が利用できる場合には，それに応じて特定の検定統計量を用いた方がより高い検出力が期待できるのは Müller and Elliott (2003) で説明されているとおりである．

2.5. その他の単位根検定

これまで述べてきた ADF や ADF-GLS 検定以外でも，様々な単位根検定の方法が提案されてきているので，ここでいくつか紹介しておく．時系列理論の論文で引用されたり実証研究でたびたび使用されるものとしては，Phillips and Perron (1988) の検定がある．彼らは (13) のようなセミパラメトリック・モデルを考え，DF 検定統計量の極限分布が誤差項 w_t の分散および長期分散に依存することを示し，これらのパラメータの一致推定量で統計量を修正することにより，従来の DF 検定統計量と同じ極限分布をもつ統計量を提案した．Phillips-Perron 検定は ADF 検定と比較してサイズの歪みが大きくなる場合がるが，この問題は Perron and NG (1996) が提案した修正統計量により，ある程度緩和されることが知られている．

一方，推定段階で OLS とは異なる手法を用いることにより，サイズの歪みを取り除いたり検出力を高める試みも提案されている．Pantula, Gonzalez-Farias and Fuller (1994) は正規分

布に従う定常 AR 過程においては時間を逆転させても定常 AR 過程となる性質を利用して WS (weighted symmetric) 推定量を用いた検定を提案している．So and Shin (1999) では y_{t-1} の符号を操作変数として用いる Cauchy 推定量を利用することにより，帰無分布が正規分布となるような検定統計量を開発した．さらに，Shin and So (2001) では定数項を逐次平均調整法で推定することにより，検定統計量の有限標本でのパフォーマンスが改善することを示している．また，ADF 検定のようないわゆる Wald タイプの検定以外にも，Dickey and Fuller (1981) は尤度比検定を，Schmidt and Phillips (1992) はラグランジュ乗数検定を提案している．

いずれにしても，一連の単位根検定は ADF 検定をベンチマークにして有限標本特性を改善させるべく提案されているが，やはり Müller and Elliott (2003) にあるとおり，どれか一つの検定が他を優越するということはないため，一番使いやすい ADF 検定が今でも主流となっている．

3. 単位根検定と構造変化

3.1. 構造変化点が既知のモデル

これまで見てきた単位根検定は，Nelson and Plosser (1982) がアメリカの多くのマクロ経済データに単位根が存在すると主張して以来，理論・実証の両面から広く研究され使われてきた．しかしながらマクロ経済データの観測期間は比較的長く，政権交代やオイル・ショック，経済を取り巻く様々な状況の変化により，構造変化が起きている可能性がある．図 4 はアメリカの common stock prices の対数値 (実線) と 1929 前後で異なる切片・傾きを持つトレンド (点線) を示してる．このデータに見られるように，変数が構造変化をもつトレンド周りで単位根過程したがっているのか定常な変動をしているのかを議論した方がより適切であると，Perron (1989) は主張している．

Perron (1989) はまず，真のモデルがトレンド項に構造変化をもつトレンド定常過程であっても，構造変化を無視してこれまでどおりの単位根検定を行うと，誤って帰無仮説 (単位根仮説) が採択されやすくなるという事実を理論的に証明した．その上で，彼は帰無仮説として以下のような構造変化をおり込んだモデルを考えている．

$$\text{モデル A:} \qquad y_t = \mu_0^a + \mu_0^b DU_t + \mu_1 t + x_t, \qquad x_t = \phi x_{t-1} + w_t,$$

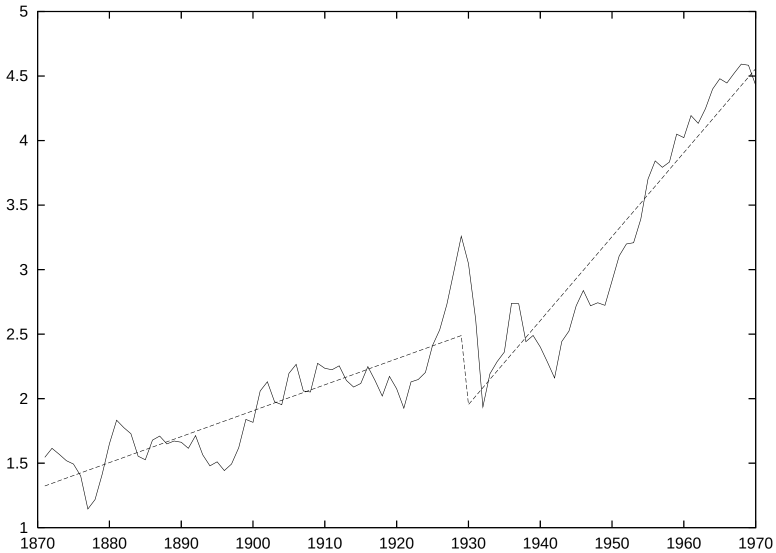


図 4: 株価の対数値とトレンドの関係

$$\text{モデル B:} \qquad y_t = \mu_0 + \mu_1^a t + \mu_1^b DT_t^* + x_t, \qquad x_t = \phi x_{t-1} + w_t,$$

$$\text{モデル C:} \quad y_t = \mu_0^a + \mu_0^b DU_t + \mu_1^a t + \mu_1^b DT_t + x_t, \quad x_t = \phi x_{t-1} + w_t,$$

ただし，w_t は共分散定常過程，構造変化点 T_B^* は既知とした上で，

$$DU_t = \begin{cases} 0 & : \ t \leq T_B^* \\ 1 & : \ t > T_B \end{cases}, \ DT_t^* = \begin{cases} 0 & : \ t \leq T_B^* \\ t - T_B^* & : \ t > T_B \end{cases}, \ DT_t = \begin{cases} 0 & : \ t \leq T_B^* \\ t & : \ t > T_B \end{cases}$$

とする．したがって，$\phi = 1$ のときにモデルに単位根が存在，$\phi < 1$ では非確率項に構造変化をもつトレンド定常モデルと解釈される．モデル A ではトレンドの傾きは変化せずに定数項のみが変化，モデル B では定数項は変化せずに傾きのみが変化，モデル C では定数項と傾きの両方が変化している．なお，上のモデルは構造変化のショックが $T_B^* + 1$ のみで観測値 y_t に伝わることから，AO (additive outlier) モデルと呼ばれる．これに対し，構造変化の影響がタイム・ラグを持って徐々に y_t に伝達される IO (innovational outlier) モデルというものも考えられているが，以下では AO モデルを中心に説明することとする．

モデル A，B，C の取り扱いで注意すべき点は，モデルを観測値 y_t で表現したときに，非確率項の表現が帰無仮説と対立仮説の下では異なることである．実際，各モデルを帰無・対立

両仮説の下で表現しなおすと，

$$\begin{cases} \text{帰無モデル A:} & y_t = c_0^a + dD(T_B^*)_t + y_{t-1} + w_t, \\ \text{対立モデル A:} & y_t = c_0^a + c_0^b DU_t + c_1 t + w_t, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \text{帰無モデル B:} & y_t = c_0 + c_1 DU_t + y_{t-1} + w_t, \\ \text{対立モデル B:} & y_t = c_0 + c_1^a t + c_1^b DT_t^* + w_t, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \text{帰無モデル C:} & y_t = c_0 + dD(T_B^*)_t + C_1 DU_t + y_{t-1} + w_t, \\ \text{対立モデル C:} & y_t = c_0^a + c_0^b DU_t + c_1^a t + c_1^b DT_t + w_t, \end{cases}$$

となる．ただし，$D(T_B^*)_t$ は $t = T_B^* + 1$ のとき 1，その他の場合は 0 とする．Perron (1989) ではこの点に注意をして，まず，y_t を非確率項に回帰し，次に残差系列に対して定数項無しの単位根検定を行うことを提案している．この方法によれば，先ほど説明したような誤って帰無仮説を採択しやすいという現象を回避することが可能になる．実際，Perron (1989) はこれまで単位根仮説を棄却できなかったマクロ経済データの中にも，彼の提案した検定方法を用いれば単位根仮説を棄却できるものがあることを示した．

また，この検定では検定統計量の分位点が T に対する構造変化点の相対的な位置 ($\lambda^* = T_B^*/T$) に依存するから，実際に検定を行うには分位点が掲載されている細かな表を参照する必要がある．これを回避するために，Park and Sung (1994) では統計量の分位点が構造変化点に依存しないようなデータ変換方法を提案している．

なお，モデル A–C はトレンドモデルをベースに考えられているが，定数項モデルでも同様の問題が生じることが Perron (1990) や Perron and Vogelsang (1992b) で分析されている．

3.2. 構造変化点が未知の場合 (1)

Perron (1989) によって提起された構造変化と単位根検定の問題では構造変化点が既知であると仮定されているが，この仮定は Christiano (1992)，Banerjee, Lumsdaine and Stock (1992)，Zivot and Andrews (1992) などで批判されている．というのも，構造変化点は多くの場合未知であり，データをグラフ化して変化点を決めるようなやり方では検定にバイアスが生じる可能性があるからである．そこで，Banerjee, Lumsdaine and Stock (1992) や Zivot and Andrews (1992) は以下のような検定方法を提案している．まず，ある構造変化点 T_B を想定して，y_t を非確率項に回帰し，残差系列に対する ADF 検定統計量 $t_\rho(\lambda)$ を作成する．ただし，$\lambda = T_B/T$ である．今，構造変化が起きている可能性がある λ の領域を Λ と想定する

と，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $t_\rho(\lambda)$ を計算して，

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} t_\rho$$

を検定統計量とする．Λ は事前情報があればそれを利用して決めるが，Zivot and Andrews (1992) では $\Lambda = [2/T, (T-1)/T]$ が考えられている．

これに対し，Perron (1997) では，非確率項への回帰において定数項の変化 c_0^b もしくはトレンドの変化 c_1^b の推定値の t 値を求め，この t 値の絶対値がもっとも大きな値をとる点を $\hat{\lambda}_c$ として，$t_\rho(\hat{\lambda}_c)$ を検定統計量として提案している．

この他にも，Amsler and Lee (1995) のラグランジュ乗数タイプの検定などが提案されている．また，定数項モデルで構造変化点が未知のケースは Perron and Vogelsang (1992a) で取り扱われている．

ここで注意すべき点は，これらの検定はいずれも帰無仮説の下では構造変化は起きておらず，第 2.1 節で説明した帰無モデルを想定している点である．未知の構造変化はあくまでも対立仮説の下でのみ想定されている．一方，Perron (1989) では既知の構造変化が帰無仮説・対立仮説両方の下で想定されている．したがって，この説で取り上げた検定は Perron (1989) の検定を単に未知の構造変化点の場合に拡張しただけではなく，帰無仮説から構造変化をなくしてしまったという点に気をつけなければならない．

3.3. 構造変化点が未知の場合 (2)

帰無仮説の下でも構造変化を許すかどうかは，検定統計量の作成の手順や漸近分布に違いをもたらすばかりではなく，既存の検定にも大きな影響を与える．Leybourne, Mills and Newbold (1998) は，真のモデルが構造変化を伴う単位根モデルであるにもかかわらず，その様なモデルに対して (構造変化を考慮しない) 通常の ADF 検定を行うと，帰無仮説を棄却してしまう場合があることを指摘している．したがって，見かけ上，単位根の存在は否定されてしまうのである．この現象はある意味，Perron (1989) が指摘した問題と全く逆の問題であるといえる．すなわち，

- Perron (1989)
  対立仮説の下での構造変化の見落とし　→　単位根仮説の誤った受容
- Leybourne, Mills and Newbold (1998)
  帰無仮説の下での構造変化の見落とし　→　単位根仮説の誤った棄却

という二つの問題が存在することになる．

さらに，Vogelsang and Perron (1998) や Hatanaka and Yamada (1999) は，真のモデルが構造変化を伴う単位根過程である場合，Zivot and Andews (1992) タイプの検定は誤って帰無仮説を棄却することが多くなる点を指摘している．

このような問題のため，帰無仮説の下で構造変化を許した単位根検定が必要となり，Vogelsang and Perron (1998) や Hatanaka and Yamada (1999) では Zivot and Andrews (1992) の検定とは異なり，まず初めに構造変化点を推定し，推定した変化点 $\hat{\lambda}$ を用いた $t_\rho(\hat{\lambda})$ を検定統計量として考え，その特性を明らかにしている．

帰無仮説の下で構造変化を許した単位根検定はこの他に，Harvey, Leybourne and Newbold (2001)，Lee and Strazicich (2001), Carrion-i-Silvestre and Sansó (2006) でも取り上げられている．また，Perron and Rodríguez (2003) では構造変化を許した ADF-GLS タイプの検定についても言及し，Liu and Rodrǵuez (2006) では構造変化と初期値問題について考察している．さらに，Saikkonen and Lütkepohl (2002) では非確率項を一般的な非線形関数に拡張して単位根検定を考えている．

3.4. 複数の構造変化への対応

Perron (1989) から始まる構造変化を考慮したこれまでの単位根検定は，構造変化が一度起きているのにもかかわらずそれを無視して従来の検定を行った場合，適切な仮説検定ができなくなる，という事実が背後にあった．これとまったく同じ論理が，構造変化が 2 回起きている場合にも当てはまる．すなわち，構造変化が 2 回起きているにもかかわらずモデルには 1 回の構造変化しか取り入れずに単位根検定を行うと，対立仮説が正しい場合でも帰無仮説を棄却しにくくなるということが予想される．Lumsdaine and Papell (1997) はこの点を考慮し，2 回の構造変化を想定した単位根検定を考えている．

また，帰無仮説に構造変化を取り入れるかどうかについても，第 3.3 節と同様の問題が生じる．Kim, Leybourne and Newbold (2000) は，真のモデルが構造変化を 2 回伴う単位根過程

に従うものであっても，構造変化の回数を 1 回としてモデルを推定してしまうと，誤って単位根仮説を棄却しやすい場合があることを指摘している．Hatanaka and Yamada (1999) や Lee and Strazicich (2003) ではこの点も考慮に入れ，2 回の構造変化を帰無仮説の下で想定した単位根検定を考えている．

4. 今後の展望

単位根検定は過去 30 年近く研究されてきており，理論的にかなり研究し尽くされてきているといえる．とはいえ，第 2 節，3 節で振り返ったように，単位根検定に関する論文は 2000 年以降もかなりの数を数えることができる．そこで，今後，単位根検定に関する研究がどのような方向に進むのかを考えてみたい．

まず，第 2 節で説明した純粋な単位根検定に関する理論的な研究はかなり進んでいるが，基本的には検定のサイズを安定させる方法に関する研究と検出力を高める研究に大きく分類できる．サイズに関しては Ng and Perron (2001) の MAIC で AR 次数を選択する方法が有力に思えるが，統計学的にはバイアス修正を行うことも安定したサイズを持つ検定を作る方法の一つである．現在のところ，バイアス修正を施した単位根検定はあまり見受けられず，実証研究でもほとんど使われていないが，今後，そのような方向に研究が及ぶことが考えられよう．また，検出力に関しては初期値の問題が絡むことは Elliott and Müller (2003) で指摘されているとおりである．Elliott and Müller (2006) では初期値の影響を受けにくい検出力を持つ検定を提案しているが，彼ら以外の有力な方法が今後研究される可能性もあるだろう．

また，第 2 節で説明した理論が今後，どこまで実証面に反映されていくかも興味のある点である．経済の実証論文を読むと，残念ながらいまだに ADF 検定しか行っていないものも見受けられる．しかしながら，最近の研究では，ADF と ADF-GLS の両方の検定を行う傾向も見受けられるので，今後はまず，ADF-GLS 検定が実証分析で多用されていくことになるだろう．また，ラグ次数に関しては旧来の情報量基準により選択しているものが多い．今後はそれらに取って代わり，Ng and Perron (2001) の MAIC が使われていく可能性がある．一方，初期値問題については実証面ではまだあまり認知されていないように思われる．Elliott and Müller (2006) で新たな検定統計量が提案されているが，統計量の作成がやや複雑なため，実証分析に普及していくかどうかは難しいところである．また，Harvey and Leybourne (2005)

ではADFとADF-GLS検定の加重平均を検定統計量としているので，検定統計量の作成そのものは比較的易しい．しかし，統計量の導出過程がアド・ホックであるため，一般的に受け入れられるかどうかは判断が難しい．やはり実証面で普及されるためには，理論的なバックグラウンドがあり，かつ，比較的計算しやすいという条件をクリアする必要があるだろう．この条件をクリアするような，初期値問題を克服した単位根検定の開発が今後待たれることになる．

構造変化に関連した単位根検定では，変化の回数が1回の場合は理論的に整備されたといってよいだろう．まだジャーナルに発表されていない論文も考慮に入れると，今後数年で2度の構造変化を伴う単位根検定に関しても，理論が整備されていくことになると思われる．ただし，最近では長期の時系列データや高頻度データが整備されてきており，長期間に及ぶデータを用いた分析も見受けられる．そのような場合には，3回，4回の構造変化の可能性も考えなければならない．そうすると，一般にm回の構造変化があると想定した場合，mをどのように決めるか，決められたmに対してどのように検定統計量をつくり分位点を求めていくか，などが理論的に重要なテーマとなってくると思われる．その答えの一部はHatanaka and Yamada (1999)で述べられている．そのような理論は基本的には構造変化が1度のケースの延長であり，今後は実証分析の論文の中でそのような理論が展開されていくということも考えれられる．

最後に，非線形モデルと単位根モデルの組み合わせというのも今後発展していく可能性がある．最近ではTAR (threshold AR) モデルやSTAR (smooth transition AR) モデルなどに単位根モデルを組み込んで分析が行われることがある．このような非線形モデルと単位根モデルを組み合わせて，有限標本でのサイズを安定させる方法や最適検定などの研究がすすんでいくことが考えられる．いずれにしろ，これまでの単位根検定に関する研究の枠組みが基礎となり，発展していくことは間違いないだろう．

参考文献

[1] Ahn, S. K. (1993). Some Tests for Unit Roots in Autoregressive-Integrated-Moving Average Models with Deterministic Trends. *Biometrika* 80, 855-868.

[2] Amsler, C. and J. Lee (1995). An LM Test for a Unit Root in the Presence of a Structural Change. *Econometric Theory* 11, 359-368.

[3] Banerjee, A., R. L. Lumsdaine and J. H. Stock (1992). Recursive and Sequential Tests of the Unit-Root and Trend-Break Hypothesis: Theory and International Evidence. *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 271-287.

[4] Berk, K. N. (1974). Consistent Autoregressive Spectral Estimates. *Annals of Statistics* 2, 289-502.

[5] Box, G. E. P. and G. M. Jenkins (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (2nd. ed.). Honden-Day, San Francisco.

[6] Brillinger, D. R. (1981). *Time Series Data Analysis and Theory.* Holden-Day, San Francisco.

[7] Carrion-i-Silvestre, J. L. and A. Sansó (2006). Joint Hypothesis Specification for Unit Root Tests with a Structural Break. *Econometrics Journal* 9, 196-224.

[8] Christiano, L. J. (1992). Searching for a Break in GNP. *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 237-250.

[9] Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association* 74, 427-431.

[10] Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1981). Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica* 49, 1057-1072.

[11] Elliott, G. and U. K. Müller (2006). Minimizing the impact of the initial condition on testing for unit roots. *Econometrica* 71, 1269-1286.

[12] Elliott, G., T. J. Rothenberg and J. Stock (1996). Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root. *Econometrica* 64, 813-836.

[13] Hall, P. (1989). Testing for a Unit Root in the Presence of Moving Average Errors. *Biometrika* 76, 49-56.

[14] Harvey, D. I. and S. J. Leybourne (2005). On testing for unit roots and the initial condition. *Econometrics Journal* 8, 97-111.

[15] Harvey, D. I. and S. J. Leybourne (2006). Power of a Unit-Root test and the Initial Condition. *Journal of Time Series Analysis* 27, 739-752.

[16] Harvey, D., S. J. Leybourne and P. Newbold (2001). Innovational Outlier Unit Root Tests with an Endogenously Determined Break in Level. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 63, 559-575.

[17] Harvey, D. I., S. J. Leybourne and P. Newbold (2001). Innovational Outlier Unit Root Tests with an Endogenously Determined Break in Level. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 63, 559-575.

[18] Hatanaka, M. and K. Yamamda (1999). A Unit Root Test in the Presence of Structural Changes in I(1) and I(0) Models. In R. F. Engle and H. White (eds.), *Cointegration, causality, and forecasting: A festschrift in honour of Clive W. J. Granger*, 256-282.

[19] Kim, T-H., S. J. Leybourne and P. Newbold (2000). Spurious Rejections by Perron Tests in the Presence of a Break. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 62, 433-444.

[20] King, M. L. (1983). Testing for Moving Average Regression Disturbances. *Australian Journal of Statistics* 25, 23-34.

[21] Lee, J. and M. C. Strazicich (2001). Break Point Estimation and Spurious Rejections with Endogenous Unit Root Tests. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 63, 535-558.

[22] Lee, J. and M. C. Strazicich (2003). Minimum Lagrange Multiplier Unit Root Test with Two Structural Breaks. *Review of Economics and Statistics* 85, 1082-1089.

[23] Leybourne, S. J., T. C. Mills and P. Newbold (1998). Spurious Rejections by Dickey-Fuller Tests in the Presence of a Break under the Null. *Journal of Econometrics* 87, 191-203.

[24] Liu, H. and G. Rodrǵuez (2006). Unit Root Tests and Structural Change When the Initial Observation is Drawn from its Unconditional Distribution. *Econometrics Journal* 9, 225-251.

[25] Lumsdaine, R. L. and D. H. Papell (1997). Multiple Trend Breaks and the Unit-Root Hypothesis. *Review of Economics and Statistics* 79, 212-218.

[26] Müller, U. K. and G. Elliott (2003). Tests for Unit Roots and the Initial Condition. *Journal of Econometrics* 135, 285-310.

[27] Nelson, C. R. and C. I. Plosser (1982). Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. *Journal of Monetary Economics* 10, 139-162.

[28] Ng, S. and P. Perron (1995). Unit Root Tests in ARMA Models with Data-Dependent Methods for the Selection of the Truncation Lag. *Journal of the American Statistical Society* 90, 268-281.

[29] Ng, S. and P. Perron (2001). Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests With Good Size and Power. *Econometrica* 69, 1519-1554.

[30] Pantula, S. G., G. Gonzales-Farias and W. A. Fuller (1994). A Comparison of Unit-Root Test Criteria. *Journal of Business and Economic Statistics* 12, 449-459.

[31] Pantula, S. G. and A. Hall (1991). Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models: An Instrumental Variable Approach. *Journal of Econometrics* 48, 325-353.

[32] Park, J. Y. and J. Sung (1994). Testing for Unit Roots in Models with Structural Change. *Econometric Theory* 10, 917-936.

[33] Perron, P. (1989). The Great Crash, the Oil Price shock, and the Unit Root Hypothesis. *Econometrica* 57, 1361-1401 (Erratum, 61, 249-249).

[34] Perron, P. (1990). Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean. *Journal of Business and Economic Statistics* 8, 153-162.

[35] Perron, P. (1997). Further Evidence on Breaking Trend Functions in Macroeconomic Variables. *Journal of Econometrics* 80, 355-385.

[36] Perron, P. and S. Ng (1996). Useful Modifications to Some Unit Root Tests with Dependent Errors and Their Local Asymptotic Properties. *Review of Economic Studies* 63, 435-463.

[37] Perron, P. and G. Rodríguez (2003). GLS Detrending, Efficient Unit Root Tests and Structural Change. *Journal of Econometrics* 115, 1-27.

[38] Perron, P. and T. J. Vogelsang (1992a). Nonstationarity and Level Shifts with an Application to Purchasing Power Parity. *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 301-320.

[39] Perron, P. and T. J. Vogelsang (1992b). Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean: Corrections and Extensions. *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 467-470.

[40] Phillips, P. C. B. (1987). Time Series Regression with a Unit Root. *Econometrica* 55, 277-301.

[41] Phillips, P. C. B. and P. Perron (1988). Testing for a Unit Root in Time Series Regression. *Biometrika* 75, 335-346.

[42] Said, E. S. and D. A. Dickey (1984). Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika* 71, 599-607.

[43] Saikkonen, P. and H. Lütkepohl (2002). Testing for a Unit Root in a Time Series with a Level Shift at Unknown Time. *Econometric Theory* 18, 313-348.

[44] Schmidt, P. and P. C. B. Phillips (1992). LM Tests for a Unit Root in the Presence of Deterministic Trends. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 54, 257-287.

[45] Schwart, G. W. (1989). Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation. *Journal of Business and Economic Statistics* 7, 147-160.

[46] Shin, D. W. and B. S. So (2001). Recursive Mean Adjustment for Unit Root Tests. *Journal of Time Series Analysis* 22, 595-612.

[47] So, B. S. and D. W. Shin (1999). Cauchy Estimators for Autoregressive Processes with Applications to Unit Root Tests and Confidence Intervals. *Econometric Theory* 15, 165-176.

[48] Tanaka, K. (1996). *Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory.* Wiley, New York.

[49] Vogelsang, T. J. and P. Perron (1998). Additional Tests for a Unit Root Allowing for a Break in the Trend Function at an Unknown Time. *International Economic Review* 39, 1073-1100.

[50] Zivot, E. and W. K. Andrews (1992). Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit Root Hypothesis. *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 251-270.