書　評　目　次

「ウェーブレットと確率過程入門」

謝　衷潔・鈴木　武共著
内田老鶴圃　2002 年
viii＋195 頁

一橋大学大学院経済学研究科　田中勝人

和書に限れば，本書は統計学の観点から書かれたウェーブレットの本としては最初のものであり，出版の意義は大きい．本書の構成は，次のようになっている．

第 0 章　はじめに～ウェーブレットへの誘い～
第 1 章　多重解像度解析とウェーブレット
第 2 章　定常増分を持つ確率過程のウェーブレット変換
第 3 章　定常ノイズの存在のもとでの回帰関数の推定
第 4 章　ウェーブレットの手法による跳躍点の検出
第 5 章　確率過程におけるウェーブレットの応用—最近の発展
第 6 章　補足説明

本書のタイトルが示唆するように，全体の内容は，前半（第 0 章から第 2 章）でウェーブレットそのものの定義や性質を述べ，後半（第 3 章から第 5 章）で確率過程に関連した統計学的問題への応用を述べている．最後の第 6 章は数学的な付録である．

前半部分では，最初に，ウェーブレット解析の意義が述べられ，フーリエ変換との違いが説明されている．通常のフーリエ変換は，次のような弱点をもっている．

1. 周波数の 1 点における情報を得るために，$(-\infty,\ \infty)$ 全体にわたる関数のすべての情報を必要とする．
2. 関数 $f(t)$ の周波数成分が時間とともに変化しても，フーリエ変換 $\hat{f}(t)$ はそのような変化を反映しない．

このような弱点を補うために考案された窓フーリエ変換をもってしても，問題は解消されない．この事実は，バリアン＝ロウの定理として知られている．フーリエ変換に付随するこのような欠点の理由は，結局のところ，変換に要するパラメータが 1 個だけである点に帰着する．これに対して，ウェーブレット変換は，波長の伸縮に関連するディレーション・パラメータと，時間移動に関連するシフト・パラメータの 2 個のパラメータを使った変換であり，局所的な変化に柔軟に対応することが可能となる．具体的には，ウェーブレット関数 $\psi(t)$ が与えられたとき，次の積分

$$C_{a,b}(\psi,f)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)f(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_{a,b}(t)f(t)dt$$

を関数 $f(t)$ のウェーブレット変換という．ここで，

$$\tilde{\psi}_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\quad(0<a,\ -\infty<b<\infty)$$

である．上述したように，ウェーブレット変換は，ディレーション・パラメータ a と，シフト・パラメータ b を使って定義されており，それは，関数 $\tilde{\psi}_{a,b}(t)$ に反映されている．そして，ウェーブレット変換は，現在では次のような理由により，利用価値の高いものとなっている．

1. 望ましい時間—周波数特性
2. 変換および計算の簡便性
3. ピラミッド・アルゴリズムのような高速演算の存在

実際にウェーブレット変換を実行するためには，ウェーブレット関数 $\psi(t)$ を特定化しなければならない．ウェーブレット関数は，実数の集合 R 上で 2 乗可積分な関数空間 $L^2(R)$ に属し，関数そのものの積分値が 0，関数の 2 乗の積分値が 1 に規準化されているような関数である．さらに，j と k が整数の集合 Z の要素であるとき，

$$(1)\quad \psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k)\quad(j,k\in Z)$$

が $L^2(R)$ で正規直交基底となるような制約を課した上で，$\psi(t)$ を求めるのが普通である，以上の条件をみたす $\psi(t)$ は，マザー・ウェーブレットと呼ばれ

る．そして，このような方法で $\psi(t)$ を求めるための議論は多重解像度解析と呼ばれる．興味あることは，ウェーブレット関数を求めるために，スケーリング関数と呼ばれるもう1つの関数を導入する点であり，さらに面白いのは，前者をマザー・ウェーブレットというのに対して，それを生み出す後者がファーザー・ウェーブレットと呼ばれる点である．この用語に対するコメントとして，Percival and Walden (2000, p. 80) を参照されたい．

いずれにしろ，多重解像度解析の議論を経て，さまざまなウェーブレット関数が作り出された．特に，コンパクト・サポートをもつドーブシー (Daubechies (1992)) のウェーブレットは有名である．ただし，現実の問題では，離散的なデータのウェーブレット変換が必要となる．この点の議論は，本書ではあまり説明されていないので，Percival and Walden (2000) などを参照されたい．

本書の後半では，確率過程に関連した数多くの問題をウェーブレットを使って分析している．第3章では，シグナル・プラス・ノイズモデルにおいて，非確率的，有界変動なシグナルを抽出する問題を考察している．そして，ここで提案された方法が為替レート変動のトレンド成分の検出に応用されている．第4章では，前章のモデルにおいて，跳躍点の存在の有無を検出するためのウェーブレットの方法が議論されている．

第5章は，数多くの最近のトピックを手短に説明している．それらは，ウェーブレット分散の推定，発展スペクトル解析，非線形自己励起閾値 (self-exciting threshold) 自己回帰モデリング，隠れ周期解析，再生核密度推定，不均一分散のスコア検定，そして，k-定常過程，弱調和過程，カルーネンクラス過程，次数 D の定常増分過程などのウェーブレット解析である．

紙幅の関係で，ここではこれらすべてを説明することはできない．以下では，ウェーブレット分散の推定とその応用について少し詳しく述べることにする．対象とする確率過程は，長期記憶時系列

$$(1-L)^d y_t=\varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\}\sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$$

である．ここで，階差パラメータ d は正の実数である．時系列 $\{y_t\}$ は，$d<1/2$ ならば定常，さもなくば非定常である．長期記憶時系列をウェーブレット解析する場合の利点は，原系列が非定常であっても，ウェーブレット変換後の系列は，変換の際のフィルターに関するゆるやかな条件のもとで，定常性が保証される点である．しかも，時間的に，かつ，レベルごとに，ほぼ無相関な系列となることがわかっている．

今，標本サイズを $T=2^J$ として，

$$\boldsymbol{W}_j=(W_{j,1}, W_{j,2}, \cdots, W_{j,T_j})', \quad T_j=T/2^j$$

を，$y_1, \cdots, y_T$ をウェーブレット変換した場合のレベル $j(j=1, \cdots, J)$ のウェーブレット係数ベクトルとする．このとき，レベル j のウェーブレット分散 σ_j^2 は，

$$\sigma_j^2=V(W_{j,t})$$

により定義される．このとき，σ_j^2 の不偏推定量は，

$$\hat{\sigma}_j^2=\frac{1}{T_j-M_j}\sum_{t=M_j+1}^{T_j} W_{j,t}^2$$
$$T_j=T/2^j, \quad M_j=(m-2)(1-2^{-j})$$

により構成できる．ただし，m はウェーブレット・フィルターの幅である．

さらに，$f(\omega)$ と $f_j(\omega)$ を，それぞれ $\{y_t\}$ と $\{W_{j,t}\}$ のスペクトラムとすれば，

$$\sigma_j^2=V(W_{j,t})=\int_{-1/2}^{1/2} f_j(\omega)d\omega=\int_{-1/2}^{1/2} H_j(\omega)f(\omega)d\omega$$

と表される．ここで，$H_j(\omega)$ は，ゲイン関数である．このとき，次の近似が成り立つ (McCoy and Walden (1996), Jensen (1999))．

$$\begin{aligned}\sigma_j^2 &\approx 2^{j+1}\int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j} f(\omega)d\omega\\ &=\text{const.}\times 2^{j+1}\times\int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j}\frac{1}{(4\sin^2(\omega/2))^d}d\omega\\ &\approx \text{const.}\times 2^{j+1}\times\int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j}\omega^{-2d}d\omega\\ &=\text{const.}\times 4^{jd}\end{aligned}$$

以上から，次の関係が得られる．

$$\log\sigma_j^2\approx\text{const.}+d\times\log 4^j$$

したがって，σ_j^2 の不偏推定量を求めることにより，上の式に基づく回帰から，階差のパラメータ d を推定することができる．この推定量は，周波数領域における回帰から得られる推定量 (Granger and Poter-Hudak (1983)) よりも優れていることが知られている．さらに，正規性の仮定のもとでは，ウェーブレット変換の無相関性から，尤度関数が簡潔に近似されるので，擬似最尤法を使って，より精度の高い推定が可能となる．

上述したように，本書では数多くの統計的問題をウェーブレットの方法で分析している．ウェーブレットの方法と一口にいっても，問題に応じてさまざまな手法があるが，本書では，これらを簡潔に説明

し，適切な参考文献を紹介している．その意味で，ウェーブレットの初学者だけでなく，ウェーブレットをより深く学ぼうとする者や実際の応用に興味をもつ者にとっても非常に有益である．

ウェーブレット解析は，現在では，工学をはじめとして，情報科学，数学，物理学，統計学，地震学，医学，経済学などさまざまな分野に応用されている．本書で扱っている問題以外にも，インターネット検索により膨大な情報を得ることができるので，興味ある読者は試みられたい．

最後に，ウェーブレットに関する書物や論文を読む上で，注意すべき点を指摘したい．それは，多重解像度解析において現れる正規直交基底の表現(1)に関してである．この表現は，レベルjが大きくなるにつれて，解像度が低くなることを示唆する．これは，ドーブシー流の定義である．他方，(1)においてjを$-j$に置き換えた表現も使われており，その場合には，jの値と解像度の関係が逆になる．これは，メイヤー（Meyer (1993)）流の定義である．本書では，後者の定義が使われている．評者自身は，前者の定義に親しみを覚えるので，あえて前者を使った次第である．

参考文献

Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia: SIAM.

Granger, C. W. J. and Porter-Hudak, S. (1983). "The estimation and application of long memory time series models," *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 221-238.

Jensen, M. J. (1999). "Using wavelets to obtain a consistent ordinary least squares esti-mator of the long-memory parameter," *Journal of Forecasting*, **18**, 17-32.

McCoy, E. J. and Walden, A. T. (1996). "Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory processes," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **5**, 26-56.

Meyer, Y. (1993). *Wavelets: Algorithms and Applications*. Philadelphia: SIAM.

Percival, D. B. and Walden, A. T. (2000). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.