

デリバティブ再入門

(第5回)

デリバティブ理論と保険の数理

石 村 直 之

目 次

- | | |
|-------------------|-----------|
| 1. はじめに | 4. 確率制御問題 |
| 2. Poisson過程とその周辺 | 5. 終わりに |
| 3. 激甚災害証券 | |

連載最後の今回は、デリバティブ理論と保険の数理との関連についての話題である。周知のように保険制度の考え方そのものは、既に17世紀終わりにロンドンで始まったとされる。ほぼ時を同じくして、生命保険の数理の基礎となる生命表 (life table) が用いられ始めた。ハレー彗星で著名なEdmond Halley (1656-1742) にも生命表に関する業績がある (1693年)。しかし、デリバティブ理論あるいは金融工学が発展してきた現在では、少なくとも数理モデルの立場からは、もはや保険の数理と金融の数理に大きな違いはない。リスク管理の観点からはなおさらであろう。今回の目的はそのような状況の一端を伝えることである。

まず、数理モデルにおけるこの分野の基礎となるPoisson過程とその周辺について手短かに復習する。次に損害保険分野に数理ファイナンスが適用された成功例として、激甚災害証券について述べる。最後に不確実な変動過程の下での最適化問題に関して、通常の決定論的な場合を復習しながら解説する。

1. はじめに

(1) 保険の数理

デリバティブ理論の優れた存在意義は、そのリスク移転機能である、と述べて大きな誤りはないが、そう述べたとき、伝統的にある種のリスク移転機能を果たしてきた保険制度との比較に関心が向かざるを得ないことも確かである。現在におい

て、両者はどのような関係があるのだろうか。

その関係を考察する前に、大ざっぱではあるが保険の数理の歴史を振り返ろう。

周知のように保険制度の考え方そのものは、17世紀後半のロンドンで始まったとされる。近代的な確率論や統計学はまだ生まれていない時期である。18世紀に著されたアダム・スミス (A. Smith, 1723-1790) の『国富論』(The Wealth of



石村 直之 (いしむら なおゆき)

一橋大学 大学院経済学研究科教授。1989年東京大学大学院理学系研究科修士課程修了。同年4月、東京大学理学部数学教室助手。東京大学大学院数理科学研究科助手、一橋大学経済学部助教授を経て、2005年4月より現職。主な著書に『経済数学』(新世社、2003年、武隈愼一教授と共著) がある。

Nations) にも、保険業者への言及がある(注1)。

保険制度が現れたほぼ同じころに、生命保険数理の基礎となる生命表 (life table) がJohn Graunt (1620-1674) により最初に考案されたとされる。ハレー彗星で著名なEdmond Halley (1656-1742) にも生命表に関する業績がある (1693年)。その後、保険業務の数理専門職としてアクチュアリー (actuary) が確立され、日本でも日本アクチュアリー会が明治32年 (1899年) に創立されている (<http://www.actuaries.jp/>)。日本アクチュアリー会が行う資格試験合格者がアクチュアリーとなるのである。ちなみにその試験は、一次試験と二次試験に分かれており、一次試験科目は数学、生保数理、年金数理、損保数理、会計・経済・投資理論の5科目である。二次試験は専門科目2科目で、生保、年金、損保から1分野を選択する。一次試験合格者まで含めても、現在2,000名程度の専門職集団である。何人かのアクチュアリーの方を存じ上げているとはいえるものの、筆者自身は日本アクチュアリー会と直接の交流があるわけではない。Bühlmann教授の著書[1970]をはじめとして、研究対象として勉強したのみである。尊敬する同僚の藤田岳彦教授 (一橋大学大学院商学研究科) は、平成17年度に数学科目のうちにモデリングが含まれてから、アクチュアリー講座講師を務めている。

ともあれ伝統の点では、保険数理の方がはるかに長い歴史を持つ。よって確率の記号でも、アクチュアリーは独特の記号を用いる。よく知ら

れたH. U. Gerberの教科書 [1997] にも、第2章で確率記号を用い始める際に “... the international actuarial community uses a time-honoured notation, to which we shall adhere” と書かれている(注2)。ほかにも、計算機が発達していない時代ならではの、手計算に便利な、巧妙な手法や記号も考案されている。

以上が保険の数理の、大体の歴史の流れである。

(2) デリバティブ理論と保険の数理

さて、デリバティブ理論が発展してきた現在において、この保険の数理とはどのような関係となっているのだろうか。例として、代表的な保険の一つである生命保険を考えてみよう。契約者が保険会社に毎月保険料を支払い、契約期間内に死亡すれば保険金が支払われるという基本的な保険としよう。これは保険会社から見れば、契約者の余命を原資産とするアメリカ型コールオプションを契約者に販売していることになる。保険料がオプションの契約料である。他の保険商品も、当然ながらこのような金融商品である。

このように考えれば、政策とか規制とかは別にして、数理モデルの視点からはもはや金融数理と保険数理に根本的な違いはない。もちろん保険の場合、契約者が反対売買できないという制約はある。また生命保険では一般に契約期間が長く、金利の影響も甚大である。しかし少なくとも数理モデリングでは、両者は同じ分野である。以下では、この金融数理と保険数理共に関連する話題の幾つ

(注1) 第1編第10章に「損をする機会はしばしば過小評価され、実質以上に評価されることはめったにないということは、保険業者たちの利潤がきわめて穏当なものであることから知ることができよう。火災保険であれ海上保険であれ、保険を一個の商売とするためには、通常の保険料が通常の損失を償い、経営の費用を支払い、何かふつうの商売に用いられた等額の資本から引き出されえただろうような利潤をあげるにたるものでなければならない。(以下略)」(水田洋監訳、杉山忠平訳『国富論 (I)』、岩波書店、2000年) などとある。

(注2) 「国際アクチュアリーの間では歴史的な記号を用いており、それを我々も踏襲しよう。」(筆者訳)

かを考える。まず、この分野の数理モデルの基本となるPoisson過程について再訪する。

2. Poisson過程とその周辺

(1) Poisson過程

(Poisson分布、指数分布)

比較的に稀に発生する現象の数理モデルとして、Poisson過程は中心的な役割を果たす。ここでは手短に、Poisson過程の基礎事項について復習しておこう。

0以上の自然数に値を持つ確率変数 N_λ が強度(intensity) $\lambda(>0)$ のPoisson分布(Poisson distribution)に従うとは、 $n=0,1,2,\dots$ に対して

$$P(N_\lambda = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

となるときをいう。記号で $N_\lambda \sim \text{Pois}(\lambda)$ などと表す。左辺は、確率変数 N_λ が n という値をとる確率を表す。右辺の値は、 n が大きくなれば急速に0に近づくことに注意しよう。もちろんその総和は、 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$ である。保険数理におけるPoisson分布は、統計学における正規分布と同じように、全体の理論の基礎となる分布である。Poisson分布は、電球の故障や交通事故などの、比較的に稀な現象のモデル化に用いられる。また強度 λ は、後でPoisson過程を考える際に、連載第4回で触れたデフォルトのモデル化におけるハザード率に対応することになる。

もし連続的な値を持つ確率変数を考察したいならば、指数分布を考える。定義は次である。0以上の実数に値を持つ確率変数 X_λ が、強度 $\lambda(>0)$ の指数分布(exponential distribution)に従うとは、 X_λ の密度関数が $\lambda e^{-\lambda x}$ であるときを言う。すなわち、 $0 < a < b$ に対して

$$P(a \leq X_\lambda \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

指数関数 e^{-x} は、 x が大きくなれば急速に0に近づく。数学ではどこまでいっても0ではないが、物理学などの他の自然科学では、 $x \geq 2$ ともなれば近似的に0とすることが多いようだ。

指数分布は無記憶性(absence of memory)を持つ。すなわち、 $s, t > 0$ に対して

$$P(X_\lambda > t+s | X_\lambda > t) = \frac{\int_{t+s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = P(X_\lambda > s)$$

となる。上の式で左辺は、 $\{X_\lambda > t\}$ の下で $\{X_\lambda > t+s\}$ となる条件付き確率を表す。等式の意味は、指数分布で表される現象は、それまでの履歴には無関係に、それぞれ各時点からの経過時刻のみに依存して決まる、ということである。

(Poisson過程)

$t \geq 0$ に対して定められた確率変数 $N(t)$ ($N(0) = 0$ とする)が、強度 $\lambda(>0)$ のPoisson過程(Poisson process)であるとは、次の二つの条件を満たすときに言う。

- $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対し $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ は独立
- $s < t$ に対して $(N(t) - N(s)) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$

定義のそのものには、恐らく疑義はないであろうが、具体的にはまた典型的にはどのような例があるのだろうか。それは、指数分布を用いて構成される。今 $\tau_1, \tau_2, \dots$ を、独立同分布(iid = identically and independently distributed)の強度 $\lambda(>0)$ の指数分布とする。つまり $P(\tau_i \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$ である。この $\tau_1, \tau_2, \dots$ に対して、 $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ と置く。ただし、 $T_0 = 0$ とする。連載第2回に出てきた対称ランダムウォークは、 $\tau_1, \tau_2, \dots$ が半々の確

率で±1 値をとる場合であることに注意しよう。ともあれ、このとき $N(t) = \sup\{n \mid T_n \leq t\}$ と定めれば、この $N(t)$ が、強度 λ の Poisson 過程となることが知られている。強度 λ が定数の今の場合を斉次 Poisson 過程 (homogeneous Poisson process) という。これらの証明には、最近の日本語で書かれた好著として熊谷 [2003] を挙げておく。さらに、 $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ となることも示すことができる。すなわち各 $N(t)$ は、強度 λt の Poisson 分布である。

この $N(t)$ の別の表現は、

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

である。すなわち $N(t)$ は、指数分布 τ_i で記述される稀な現象が、時刻 t までに発生した回数を表す。この意味では Poisson 過程は、計測過程 (counting process) あるいは更新過程 (renewal process) の一つである。

(2) claim 総額過程

保険契約の数理モデルは、一般に次のように与えられる。

- $\tau_1, \tau_2, \dots$ を独立同分布な正値確率分布とし、
 $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ 、 $T_0 = 0$ とおく。 τ_i は必ずしも指数分布ではない。 T_n は保険請求が発生する時刻のモデル化である。また、 $N(t) = \sup\{n \mid T_n \leq t\}$ とおく。これは Poisson 過程の構成のときと同じである。
- 時刻 T_n に発生する請求額 (claim amount) を、独立同分布な正値確率分布 $X_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ で表す。

このとき、claim 総額過程

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

がどのような分布となるのか調べるのである。このモデルを Sparre-Anderson model という。特に、 τ_i が強度 λ の指数分布であるとき、よって $N(t)$ が強度 λ の Poisson 過程であるときを、Cramér-Lundberg model という。あるいは $S(t)$ は複合 Poisson 過程 (compound Poisson process) であるという。

このほかにも拡張モデルが知られている。強度 λ が正値な確率過程であるとき、対応する claim 総額過程 $S(t)$ を Cox 過程 (Cox process) あるいは二重 Poisson 過程 (doubly stochastic Poisson process) という。

以上が基本的な確率過程である。さらに一般には無限分解可能分布である Lévy 過程を考えることになる。実際、ブラウン運動を含めてすべて Lévy 過程の一つである (Cont and Tankov [2004] 参照)。ともあれ、これらは保険数理のみならず、例えば信用リスクでのデフォルトのモデルとしても用いられる。分布の計算などの詳しい性質については、Rolski *et al.* [1998]、Mikosch [2009] 等を参照されたい。

3. 激甚災害証券

保険と金融の融合の例として、われわれの研究に関連して激甚災害証券に関する話題を取り上げよう。

激甚災害とは、ここでは、巨大地震や強大な台風などの、主に自然災害による直接・間接の被害を意味することとする。日本は地震国であり、正確な予測は困難であるものの、周期的に大地震に襲われることが予想されている。1995年1月の阪神・淡路大震災は死者6,000人を超す大災害を

もたらし、まだ記憶にも新しい。また、毎年のように豪雨や台風に見舞われている。台風では、数千人を超す死者は59年9月下旬の伊勢湾台風以来記録されていないものの、現在でも災害の人的経済的被害は痛ましい。ここでの話題は、これら大災害を、自然科学や工学として予測したり被害を小さくしたりする方向ではなく、大災害が起こった後の経済的損失を軽減する保険の仕組みに関するものである。

このような災害に対する損害保険会社の対応は、伝統的には再保険 (reinsurance) によりリスクを分散させるものであった。状況を変化させたのは、92年8月にFloridaを襲ったハリケーン Andrewである。統計により異なるが、約300億米ドルの甚大な損害をもたらし、再保険市場にも混乱を引き起こした。そこで、不幸にも災害が起こることをオプションの権利行使と見なし、そのような金融商品を考案することで、広く投資家にリスクを分担してもらおう考えが現れた。これが激甚災害証券 (catastrophe securities) である。基本的なアイデアの萌芽そのものは、中世イタリアでの船舶事故に対する負債償還にも見られる (Doherty [2000])。

激甚災害証券が成立するとされる一つの根拠には、市場総額と災害被害総額との比較がある。例えば2009年8月14日 (金) 終値での東証一部の時価総額は約320兆円強であり、その3%でも約10兆円弱である。阪神・淡路大震災の被害総額は、阪神・淡路大震災記念 人と防災未来センター (<http://www.dri.ne.jp>) の資料によると約10兆円と見積もられている。市場が3%変動する確率はそう珍しいことではなく、大災害が起こる確率よりも頻繁であると考えられるので、激甚災害証券の成立余地があるというのである。もちろんこの考え方には批判もある。

ともあれ最初の、このような意味での激甚災害証券は、92年Chicago Board of Trade (CBOT) で取引が始まったが、取引が低調でこれは成功しなかった。非金融機関が発行した激甚災害債券 (catastrophe bond) の最初の成功例は、99年株式会社オリエンタルランドによるものとされている。東京周辺の大地震により損害を被るであろう東京ディズニーランドの施設を回復する目的であった。現在では、大災害からテロ攻撃に対するものまで何種類かの激甚災害証券が発行され、その幾つかは市場で取引されている。

以上が、大ざっぱながら激甚災害証券に関する基礎事項である。

さて、このような激甚災害証券の数理モデルにおける問題点は、当然のことながら考えている大災害のモデルである。もちろん対象により、大きく異なることになる。藤田岳彦教授ほかとの拙論 (Fujita *et al.* [2008]) では、主に台風災害を想定し、市場株価 Y_t の変動モデルを

$$Y_t = Y_0 \exp \left\{ -\alpha S(t) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + W_t \right\}$$

とした。ただし、 α 、 μ 、 σ は正定数であり、 Y_0 は初期値である。さらに、 W_t は標準ブラウン運動であり、また $S(t)$ は前章の(1)においてCox過程を考えたものである。この変動モデルの下での激甚災害オプションの評価を、無裁定価格理論を用いて求めた。もちろん、 $S(t)$ が複合Poisson過程の場合等、幾つかの先行研究に依存する部分はある。詳細や参考文献は拙論を参照いただきたい。一橋大学経済学研究科ホームページ (<http://www.econ.hit-u.ac.jp>) での刊行物情報より入手できる。

ところで、われわれの拙論は単なる理論研究であるが、実際の価格評価では、大災害としてどのようなモデルを採用するかで結果が大きく異なる。しかも大災害のモデルは、不断に改善が図ら

れているとはいうものの、当然ながら一概に決められるものではない。激甚災害証券は便利な仕組みではあるが、その利用には注意が必要というところだろう。

4. 確率制御問題

最後に、不確実な変動過程の下での最適化問題を考察しよう。すなわち、前章で取り上げたように不確実な損失が発生する可能性がある状況の下で、企業がその価値を最大化しようとするような問題である。これは一般には確率制御問題(stochastic control)として定式化される。

とはいえ確率制御の理論は、自然科学系でもおそらく学部では難しく、大学院で扱われる内容である。ここでは、通常の決定論的な最適化問題を復習し、その類推によって理解を容易にしたい。以下しばらく、武隈・石村 [2003] を参考にする。

(1) 決定論的な場合の最適化問題

(制約条件がない場合)

次の1変数関数の簡単な例題を考えよう。

例題. ある店では100円で仕入れた商品を x 円 ($x \geq 100$) で売り利益を上げようとしている。ただし、売れる個数は1日平均 $400 - 2x$ 個であるとする。利益が最大となるような値段 x 円はいくらか求めよ。

やさしいとは思いますが解を与えておく。1日平均の利益を $f(x)$ とすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-100)(400-2x) \\ &= -2x^2 + 600x - 40000 \end{aligned}$$

よって最適となるのは $f'(x) = -4x + 600 = 0$ のとき、すなわち $x = 150$ であり、このとき利益は5,000円となる。

これは利益を表す関数 $f(x)$ を最大とする点 x を見いだす問題である。最大となる点 x では、 $f'(x) = 0$ が成り立つ (注3)。これを一階必要条件という。今の場合さらに $f''(x) = -4 < 0$ なので、確かに $x = 150$ において最大となることが分かる。これを二階十分条件と言う (注4)。

多変数となった場合、例えば2変数関数の場合でも同様な特徴付けがある。すなわち、2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で極大あるいは極小、つまり極値となるならば

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0,$$

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

この定理、つまり極値となる点で一階微分係数が消えるという性質は、実際には極値の候補を見いだすために用いられることが多い。例えば、関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値の候補は、

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad f_y = -3x + 3y^2 = 0$$

より $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ である。二階十分条件を用いて、この候補が実際に極大なのか極小なのかを

(注3) x で最大 (極大) となるので、微小な h に対して $f(x+h) \leq f(x)$ が成り立つ。 $h > 0$ のときは $(f(x+h) - f(x))/h \leq 0$ であり、 $h < 0$ のときは $(f(x+h) - f(x))/h \geq 0$ である。ともに $h \rightarrow 0$ とすれば、微分係数の定義よりそれぞれ、 $f'(x) \leq 0$, $f'(x) \geq 0$ となるので $f'(x) = 0$ である。このように微小な変動を考える手法を変分法という。金利でのいわゆるポツイチの変化である

(注4) 命題「 $p \Rightarrow q$ (p ならば q)」が真であるとき、 q を p であるための必要条件 (necessary condition)、 p を q であるための十分条件 (sufficient condition) という。これは数学上の形式論理であり、必ずしも日常生活での用いられ方と合致するものではない。

■ デリバティブ再入門 ■

判定する。多変数の場合は、少々ややこしくなる（注5）。この例では、(0,0)は極値でないが、(1,1)は極小点である。

（等式制約条件の場合）

制約条件がある場合の最適化問題では、Lagrange関数を用いられることが多い。2変数関数で等式制約の場合を例題で見てみよう。

例題. ある人が、りんご x 個とバナナ y 個を食べたときの満足度は $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ であるとする。合わせて5個食べるとき満足度を最大にするようりんごとバナナの組み合わせを求めよ。言い換えると、 $x+y=5$ の下で関数 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ を最大とするような x, y を求めよ。

もちろん、 $x+y=5$ より $y=5-x$ であるから、それを用いて x の1変数関数の極値問題とできる。しかし、Lagrange関数を用いれば、多変数のままあたかも制約条件が存在しないかのごとくに極値であるための必要条件が求められる。すなわち、 λ を未定定数としLagrange関数 L を

$$L(x, y, \lambda) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} + \lambda(5 - x - y)$$

と定める。このとき、満足度が最大となる点では、ある λ が存在して

$$L_x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda = 0$$

$$L_y = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - \lambda = 0,$$

$$L_\lambda = 5 - x - y = 0$$

となる。最後の式は等式制約条件そのものである。これはまさに、3変数関数 $L(x, y, \lambda)$ が制約条件なしに極値をとる場合の必要条件である。この連立方程式を解くと、確かに $x=3, y=2$ を得る。

（不等式制約条件の場合）

制約条件が不等式の場合、例えば上の例題で、「りんご x 個とバナナ y 個を合わせて5個まで食べるとする。満足度 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ が最大になるような組み合わせを求めよ。」となるような状況である。このときもLagrange関数を用いての極値であるための必要条件が得られる。それはKuhn-Tucker条件としてよく知られている（注6）。西村教授の好著[1990]等を参考にしていきたい。

（動学の場合）

次に時間変数が入った場合の最適化問題はどのようなのであろうか。この場合を動学（dynamic）と呼んでおり、上の時間を考慮しない静学（static）の場合と区別することがある。例題で見てみよう。

例題. ある会社が期日 T において、一つの製品を K 単位（ $K \geq T^2$ ）納入する契約を得た。最小の費用で製造したい。ただし、時刻 t （ $0 \leq t \leq T$ ）までに製造した製品量を $x(t)$ とすると、単位時間当たりの製造費用は $x'(t)^2$ 必要であり、保管費用は $4x(t)$ 必要であるとする。よって総費用 C は時刻 t により積分して

（注5） 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となるとする。 $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$ とおく。このとき $AC - B^2 < 0$ ならば点 (a, b) は極値でない。 $AC - B^2 > 0$ かつ $A < 0$ ならば点 (a, b) は極大である。 $AC - B^2 > 0$ かつ $A > 0$ ならば点 (a, b) は極小である。 $AC - B^2 = 0$ のときはどちらともいえない。

（注6） 問題は、 $x + y \leq 5$ の下で関数 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ を最大とするような x, y を求めよ、である。等式制約のときと同じLagrange関数 $L(x, y, \lambda)$ に対して、Kuhn-Tucker条件は、 $L_x = L_y = 0, L_\lambda \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda L_\lambda = 0$ を解くことになる。やはり $x=3, y=2$ を得る。

$$C[x] = \int_0^T (x'(t)^2 + 4x(t))dt$$

となる。この $C[x]$ を最小にするような $x(t)$ を、 $x(0) = 0$ 、 $x(T) = K$ を満たし単調に増加する関数のうちから見いだしたいのである。

$C[x]$ を極小にする関数 $x(t)$ は、Euler(-Lagrange)方程式を満たす(注7)。今の場合それは $\frac{d}{dt}(2x'(t)) = 4$ である。よって t により2回積分すると、 $x(t) = t^2 + \frac{K-T^2}{T}t$ が $C[x]$ を極小にする関数であることが分かる。この設定では、納期に向かって製造を加速させるのが最適なのである(注8)。

(2) 確率変動する場合の最適化問題

少し詳しく通常の決定論的な場合の最適化問題を述べてきたが、確率変動する場合はこの延長線上にあることが予想されるであろう。実際、 $X_t^f (0 \leq t \leq T)$ を、ある制御変数 f_t を含む確率過程とする。制御変数とは、それを動かして極大ないしは極小を達成させるような変数のことである。より詳しくは、例えば

$$dX_t^f = f_t \mu dt + f_t \sigma dW_t^{(1)} + dW_t^{(2)} \quad (2)$$

などの確率変動を仮定することになる。ここで、 μ, σ は定数である。また、 $dW_t^{(1)}$ 、 $dW_t^{(2)}$ はそれぞれ標準ブラウン運動で、簡単のため今は独立とする。これは二つの不確実性に起動される過程であり、制御変数はそれぞれの不確実性に依存するないし

は投資する割合を表している。もちろん他の確率過程も考えられるが、通常は従属しない二つ以上の不確実性を含む。特に飛びを含むLévy過程の場合は、最近の重要な研究対象である。

このとき、企業の利益に対応する効用関数 (utility function) u に対して、値関数 (value function) と呼ばれる

$$V(x, t) = \sup_f E[u(X_T^f) | X_t^f = x]$$

がどのような性質を持つのか調べたいのである。ここで、 E は期待値を表す。式の意味は、時刻 t において状態が x である変動過程に対して、満期 T における最適な利益の期待値を $V(x, t)$ と定めている。そのとき制御変数、すなわち投資割合を変化させて最適な利益の期待値を達成するのである。もちろんEuler(-Lagrange)方程式でのように、ある条件を満たす制御変数のうちで、最適なものを探すこととなる。ともあれ値関数は、確率過程と利益 u により規定された数理モデルの特徴を表している。

さて、値関数 $V(x, t)$ が満たすべき方程式を求めるには、今までと同様に最適を与える確率過程の微小変動を考える。確率過程の微小変動であるため、Itoの公式 $(dW_t)^2 = dt$ が重要な役割を果たすことになる。というのは、標準ブラウン運動の期待値は0であるが、二階微分から出てくる $(dW_t)^2 = dt$ を含む項の期待値は残るからである。詳しい導出は省略するが、満たすべき方程式は

(注7) 一般に、 $x(0)$ と $x(T)$ が指定された値をとる下で、積分 $\int_0^T f(t, x(t), x'(t))dt$ を極小ないし極大にする関数 $x(t)$ は $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}(t, x(t), x'(t))\right) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) = 0$ を満たす。 $\partial f / \partial x'$ は、 f を x' で偏微分することに注意。これをEuler(-Lagrange)方程式という。極値を与える関数の微小変化を考えて導出する。

(注8) 一様に製造する計画は $x(t) = \frac{K}{T}t$ であるが、このときの総費用は $C = 2KT + \frac{K^2}{T}$ となる。本文中で求めた最適計画の場合は、計算すると $C = 2KT + \frac{K^2}{T} - \frac{T^3}{3}$ となるので、一様に製造する計画よりも確かに少ない費用である。

HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式として得られる。例えば上の(2)式の場合、値関数がある程度なめらかな関数ならば、さらに幾つかの仮定の下で結局は

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^2 \frac{(\partial V / \partial x)^2}{\partial^2 V / \partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

と大変に複雑な非線形偏微分方程式となる。これを満期条件 $V(x, T) = u(x)$ の下で解くのである。残念ながら簡単に解を求めることができない。拙論 (Abe and Ishimura [2008]) では、この偏微分方程式の表すリスク選好指標について考察したことを付記しておく。

HJB方程式は、確率変動する下での最適化問題、すなわち一般に確率制御問題において基本的な方程式である。前回取り上げたリアル・オプションにおいても自然に現れる。将来が不確実な状況の下で、最良の価値判断を行うという最適化問題を考えるからである。しかし一方で、HJB方程式の解析は難解であることもよく知られている。そもそも値関数がどこまでなめらかであるのか、数学としては既に取り扱いが複雑な問題である。よくまとめられた解説書として Korn and Korn [2001] を挙げておく。

最近の拙論 (Ishimura and Mita [2009]) では、ブラウン運動のような連続過程ではなく、二項モデルのような離散過程における確率制御問題を考察した。連載第2回で述べた藤田岳彦教授 (一橋大学) による離散Ito公式を用いている。離散HJB方程式を導出しているが、離散の場合、離散HJB方程式を解くことは漸化式を解くことになる。解析的にも数値的にも扱いやすいのではないかと考えている。しかし、金融や保険の世界で重要な応用を見いだしていくことは今後の課題である。

5. 終わりに

今回は、デリバティブ理論と保険数理との関係を、幾つかの実例と共に考察した。保険数理では、アクチュアリーと呼ばれる数理専門職集団の位置付けが確立しているが、近年の爆発的なデリバティブ理論あるいは金融工学理論の発展により、両者の距離はますます近くなっている。政策とか規制とかは別にして、数理モデルの観点からは、両者は同じ土俵で議論される。

保険数理の特徴の一つは、ブラウン運動のような確率変動する要素を、多くの場合複数個含むことである。そのため価格評価が一般に困難となる。無裁定価格理論を用いた評価でも、値が一意に決まらないのが普通である。確率制御問題とした場合も、効用関数の選択に不定性がある。このほかにも追求すべき課題は多い。よって今後の進歩も期待できる分野である。

さて、5回にわたり「デリバティブ再入門」を連載させていただいたが、筆者の力量不足もあり、主題とした数理モデルの観点からでも、いささか中途半端になったと反省している。筆者自身にとっては、これまでの内容を整理する助けとなった。最終回までお付き合い下さった読者の方に感謝しつつ、さらなる研究課題に取り組みたいと考えている。

保険の数理に関しては、稲盛財団2006年度－2007年度研究助成金 (研究課題「金融工学の手法による保険数理の研究」) の援助を受けた。また、確率最適化問題に関しては、財団法人清明会2008年度－2009年度研究助成金 (研究課題「ファイナンスでの最適化問題におけるリスク選好指標の研究」) の援助を受けた。ともに深く感謝する。筆者は論文執筆に通常は英文のTexを利用しているため、この連載では論文用に使い慣れていない

ワードに、ともすれば苦勞する面もあった。このワードの利用に関しては、一橋大学数学・統計準備室の平澤眞理子さんに大変お世話になった。改めてお礼を述べる。残っているであろう誤りの責はもちろん筆者にある。

〔参考文献〕

- 熊谷隆 [2003] 『確率論』、共立出版。
- 武隈慎一・石村直之 [2003] 『経済数学』、新世社。
- 西村清彦 [1990] 『経済学のための最適化理論入門』、東京大学出版会。
- Bühlmann, H. [1970] *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer.
- Cont, R. and P. Tankov [2004] *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman&Hall/CRC.
- Doherty, N.A. [2000] *Integrated Risk Management*, McGraw-Hill.
- Gerber, H.U. [1997] *Life Insurance Mathematics*, 3rd Edition, Springer.
- Korn, R. and E. Korn [2001] *Option Pricing and Portfolio Optimization*, American Mathematical Society.
- Mikosch, T. [2009] *Non-Life Insurance Mathematics*, 2nd Edition, Springer.
- Rolski, T., H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels [1998] *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley.
- Abe, R. and N. Ishimura [2008] “Existence of solutions for the nonlinear partial differential equation arising in the optimal investment problem,” *Proceedings of the Japan Academy* Vol.84, Ser.A, No.1, pp.11-14.
- Fujita, T., N. Ishimura, and D. Tanaka [2008] “An arbitrage approach to the pricing of catastrophe options involving the Cox process,” *Hitotsubashi Journal of Economics* Vol.49, No.2, pp.67-74.
- Ishimura, N. and Y. Mita [2009] “A note on the optimal portfolio problem in discrete processes,” *Kybernetika* Vol.45, No.4, pp.681-688.