重み付き多数決における拒否権と投票力分布*

市川　実†

2010 年 3 月 18 日

Abstract

本稿の目的は，議会制度における拒否権が投票力分布に及ぼす効果を Shapley-Shubik 指数（SS 指数）を用いて明らかにすることである．本稿では, McCarty(2000) の拒否権パラメータを伴う重みつき多数決ゲームを構築する．このモデルは，すべての勝利提携に含まれる投票者が拒否権者であるという協力ゲームにおける従来の拒否権のみならず，再可決によって覆すことができる種類の拒否権をも扱うことが可能である．ある投票者の拒否権パラメータの増加は，他の投票者の投票力を減少させる場合があるだけでなく，増加させる場合もあることを示す．さらに本モデルにおける SS 指数の効率的な計算アルゴリズムを提示する．この応用として実際に SS 指数を計算し，重みの分布が二大政党制に近い状況では，再議決ラインの３分の２から５分の４への変更が SS 指数に影響しないことを明らかにする．さらに，日本の地方議会における首長の拒否権が投票力分布に与える影響を分析する．

Keywords : weighted voting, veto rights parameter, Shapley-Shubik index, Japanese local legislatures

---

* 本研究を進めるにあたり適切な助言と指導を頂いた一橋大学経済学研究科の蓼沼宏一教授と早稲田大学商学部の佐々木宏夫教授に深く感謝致します．また，菊地和也氏，松木順氏，宮城島要氏，阿武秀和氏，赤星立氏，原和弘氏，河村耕平氏，早稲田大学商学部セミナー参加者の皆様に多くの有益なコメントを頂きました．ここに感謝の意を記します．

† 一橋大学大学院経済学研究科修士課程．東京都国立市中２－１．E-mail: ichikawam8@gmail.com

Veto power and the distribution of power under weighted voting *

Minoru Ichikawa **

March 18, 2010

Abstract

This paper examines the effect of a veto power on the distribution of power under weighted voting by using the Shapley-Shubik index (SS index). We construct a weighted voting model with veto rights parameters of McCarty(2000). The model treats not only non-overridable but also overridable veto under weighted voting. It is shown that an increase in certain voter's veto rights parameter may not only decrease some voter's SS indices but also increase other voter's SS indices. We also derive a method to compute the SS indices efficiently. By applying this method, we show that in the case of two-party competition, the change from two-thirds to four-fifth of re-approval quota has no influence on the distribution of the SS indices. As an application, we analyze the effect of a veto power in Japanese local legislatures.

Keywords: weighted voting, veto rights parameter, Shapley-Shubik index, Japanese local legislatures

---

* I wish to thank Professor Koich Tadenuma and Professor Hiroo Sasaki for their useful comments and encouragement. I am also grateful to Kazuya Kikuchi, Jun Matsuki, Kaname Miyagishima, Hidekazu Anno, Takashi Akahoshi, Kazuhiro Hara, Kohei Kawamura and seminar participants at Waseda University for their helpful discussions.

** Graduate School of Economics, Hitotsubashi University, 2-1 Naka, Kunitachi, Tokyo, Japan. E-mail: ichikawam8@gmail.com

1　序論

集団的意思決定において，それぞれの投票者が異なる票数を持つ制度がしばしば採用される．代表的なものは企業の株主総会である．株主総会において各株主は株式の保有比率だけ票数を有していると言える．立法議会においても，各政党を単一の投票者と見なせば，各投票者が複数票を持つ投票制度と見なすことができる．投票者が異なる票数を持つ投票制度は重みつき多数決と呼ばれる．

一方，投票制度において，特定の投票者が拒否権を保有している場合がある．議会制度における拒否権の効力は大別して２種類に分けられる．

１つは，国際連合安全保障理事会 (United Nations Security Council；国連安保理) で採用されているタイプの拒否権である．国際連合安全保障理事会は，アメリカ合衆国，ロシア，中国，イギリス，フランスの５カ国の常任理事国 (Permanent members) と任期２年の非常任理事国 (Elected members) の１５カ国により構成されている．国連安保理での可決要件は，１) ９票以上の賛成票の獲得，２) 常任理事国が拒否権を行使していないこと，の２つを満たすことである[*1]．したがって５カ国の常任理事国のうち１カ国でも拒否権を行使すれば議案は否決される．国連安保理において常任理事国が保有しているタイプの拒否権をより一般的に述べれば,「拒否権者が議案に反対ないしは拒否権を発動した場合，その議案は否決される」という効力を持つ拒否権と言うことができる．このような効力を持つ拒否権を完全拒否権と呼ぶことにしよう．すなわち，国連安保理において常任理事国は完全拒否権を保有している．完全拒否権者は拒否権を行使すればただちに議案を否決に持ち込めるので，非常に大きな権利を投票制度において保有していると考えられる．

一方，もう１つのタイプの拒否権は，アメリカ合衆国の立法議会で採用されているタイプの拒否権である．アメリカ合衆国の立法議会では，大統領は拒否権を保有している．たとえば，議案Ａが上院及び下院において過半数以上の票を得て可決されたとしよう．その議決に対して大統領が拒否権を行使した場合，議案Ａは再議決に付され，再可決されるためには上院及び下院において出席議員の３分の２以上の賛成が必要となる．大統領が保有する拒否権を一般的に述べれば,「拒否権者が議案に反対ないしは拒否権を発動した場合，一定のルールに基づいて拒否権は無効となる」という効力を持つ拒否権であると言うことができる．このような効力を持つ拒否権を不完全拒否権と呼ぶことにしよう．

このように拒否権は完全拒否権と不完全拒否権の２種類に分けられる．それぞれの拒否

[*1] 安保理では棄権が認められている．常任理事国が棄権した場合，拒否権の行使とは見なされない．

権は投票者の投票力分布にどのような影響を与えるのだろうか？市川・上條 (2008) は完全拒否権者が存在する重みつき多数決ゲームについて SS 指数とシミュレーションを用いた分析を行っている彼らの結果は，過半数ルールの下では重みの分布にかかわらず完全拒否権の導入は拒否権を持たない投票者の SS 指数をおよそ半減させることを示唆している．従来の協力ゲーム理論では完全拒否権のみに焦点が当てられてきており，不完全拒否権を十分に扱ってこなかった．McCarty(1998, 2000) は，不完全拒否権のパラメータを，各投票者の反対を覆すのに必要な票数として定式化した．これによって，完全拒否権を不完全拒否権の特殊ケースとして表現できる．しかし，McCarty(1998,2000) のモデルは１人１票の議会制度に限っている．１人１票のモデルによる分析は，複数政党による議会制度を分析する上では不充分である．そこで本稿では，拒否権パラメータを伴う重みつき多数決をモデル化した．重みつき多数決を扱うことで，拒否権が投票者の投票力分布に与える影響についてより広く分析することが可能となる．特に応用として，わが国の地方議会の首長の拒否権や両院制議会の分析を考えることが可能となる．

本稿の目的は拒否権が投票者の投票力分布をどのように変化させるかを明らかにすることである．第２節では，ある１人の投票者の拒否権パラメータが増加するとき，その投票者の SS 指数が増加することを示す．また，完全拒否権を扱っている市川・上條 (2008) は，拒否権の影響は SS 指数の比率の意味で拒否権者以外のすべての投票者にとって公平な影響を与えることを示しているが，本稿で扱う拒否権は投票者の権利配分に不公平な影響を与える可能性があることを数値例を用いて示す．不公平な影響が具体的に意味するところは，拒否権によって SS 指数が減少する投票者のみならず，上昇する投票者も存在することを指す．さらに，拒否権者が１人のケースにおける拒否権を伴う重みつき多数決ゲームの SS 指数の効率的な計算方法を示す．第３節では，応用として地方議会における首長の拒否権の効果を分析する．実際に SS 指数を計算した結果，二大政党制に近い状況では，再可決ラインの３分の２から４分の３ないしは５分の４への変更が何ら効力をを持たないことが示唆される．

投票制度における投票者の権利配分に関する分析には，協力ゲームによるアプローチから様々な貢献がなされてきた．

議会制度における各投票者の議決に与える影響力を定量的に測定する代表的かつ理論的な方法は，Shaplay-Shubik(1954) 指数 (SS 指数)，Banzhaf(1965) 指数 (Bz 指数)，Deegan-Packel(1978) 指数をはじめとする投票力指数を用いる方法である．SS 指数と Bz 指数は決定票 (casting vote) をより多く握る投票者がより議決に大きな影響を与えている，という観点から定義されており，現実の様々な投票制度を対象にこれらの指数を用いた分析が行われている．たとえば，Owen(1975) は，Bz 指数の近似計算方法を提示し

た上で，アメリカ合衆国の選挙制度における Bz 指数を計算している．また，Algaba et al.(2006) や Bilbao et al.(2002) が欧州議会の分析を SS 指数と Bz 指数を用いて行っている．わが国の両院制議会については福田・脇田 (2009) が提携構造を考慮した投票力指数 (coalition-structure value) を用いて分析を試みている．協力ゲームの解における配分を非協力ゲームの均衡で遂行するという問題では，Gul(1989) が Shapley 値を一定の条件の下で定常部分ゲーム完全均衡（Stationary Subgame Perfect Equilibrium: SSPE）で遂行できることを証明している．また，Laruelle and Valenciano(2008) は，提案者に選ばれる確率が SS 指数で与えられているときに，割引因子が 1 に収束する極限点で SSPE 利得が SS 指数に収束することを示している．

2　拒否権を伴う重みつき多数決ゲーム

序論でも触れたように，McCarty(1998,2000) は，拒否権パラメータをある投票者の反対を覆すのに必要な票数として定式化した．これによって，完全拒否権を不完全拒否権の特殊ケースとしてモデル化できる．

単純な過半数ルールの投票制度では，すべての投票者が総票数の 2 分の 1 を拒否権パラメータとして保有していると考えられる．なぜなら，ある投票者が反対している場合，総票数の 2 分の 1 を上回る賛成があれば彼の反対を覆す，すなわち議案を通すことができるからである．

わが国の地方議会では首長が不完全拒否権を保有している[*2]．たとえば議案 A が過半数の賛成を得て可決されたとしても，首長が拒否権を行使すれば議案は再議に付され，再可決には出席議員の 3 分の 2 以上の賛成が必要である[*3]．拒否権パラメータを用いると首長は地方議会の全議席数の 3 分の 2 の拒否権パラメータを保有していると表現することができる．なぜなら，首長の反対を覆すには 3 分の 2 以上の賛成を得る必要があるからである[*4]．

首長の拒否権に代表される不完全拒否権は，すべての勝利提携に含まれる投票者を拒否

[*2] 首長とは，都道府県知事，市町村長，特別区長の総称である．

[*3] 地方自治法 176 条：普通地方公共団体の議会における条例の制定若しくは改廃又は予算に関する議決について異議があるときは，当該普通地方公共団体の長は，この法律に特別の定があるものを除く外，その送付を受けた日から十日以内に理由を示してこれを再議に付することができる．第 2 項：前項の規定による議会の議決が再議に付された議決と同じ議決であるときは，その議決は，確定する．第 3 項：前項の規定による議決については，出席議員の三分の二以上の者の同意がなければならない．

[*4] 厳密には全議席の 3 分の 2 以上の賛成ということと，出席議員の 3 分の 2 以上の賛成では意味が異なるのであるが，本稿では単純化のために欠席 (棄権) という選択肢を投票者は持たないと仮定する．

権者と定義する従来のモデルでは表現することができない．そこで本稿では，拒否権パラメータの概念と重みつき多数決を組み合わせたゲームを導入することで不完全拒否権を表現できることを示す．

投票者の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，N の任意の部分集合を提携と呼ぶ．$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ を重みベクトルといい，各 w_i は各プレイヤーの保有票数を表し，正の整数とする．また $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ とする．$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ を拒否権パラメータ・ベクトルと定める．拒否権パラメータ・ベクトルの成分 k_i は正の整数であり，プレイヤー i の反対を覆すのに必要な票数を表している．さらに任意の $i \in N$ に対して $k_i > \frac{1}{2}w(N)$ を満たすとする．

以上の設定の下で，議案を可決できる提携を勝利提携と呼ぶことにし，勝利提携の集合を $\mathcal{W}$ と書くことにする．このとき，

$$\mathcal{W} = \left\{ S \in 2^N \mid w(S) \geq \max\{k_j \mid j \in S^c\} \right\}$$

であり，かつ $N \in \mathcal{W}$ と定める[*5]．以上の性質を満たす組 $G = (N, \mathbf{k}, \mathbf{w})$ を拒否権を伴う重みつき多数決ゲームと呼ぶことにする．特に混乱がない限り N を省略し $G = (\mathbf{k}, \mathbf{w})$ を単にゲームと呼ぶ．なお，ゲーム $G = (\mathbf{k}, \mathbf{w})$ は単純ゲーム (simple game) の１つのクラスである[*6]．また，以下では簡略化のために $K(S) = \max\{k_j \mid j \in S^c\}$ と書くことにする．

例 2.1. 拒否権を伴う重みつき多数決ゲームの例
$n = 4$, $\mathbf{w} = (40, 30, 20, 10), \mathbf{k} = (51, 51, 51, 67)$.
このとき，提携 $\{1, 3\}$ は勝利提携ではないが提携 $\{1, 3, 4\}$ は勝利提携である．提携 $\{1, 3\}$ の総票数は *60* であるが，プレイヤー４が提携に参加していないため議案を通すためには *67* 票が必要だからである．２分の１の票数で通常は可決できるが，プレイヤー４が２分の１の可決に対しては拒否権を保有し否決することができる．プレイヤー４が拒否権を発動した場合には３分の２の票数で再可決できる *(* プレイヤー４の拒否権を覆せる *)* 議会制度を本例は表していると言える．

一定の大きさを超える拒否権パラメータをプレイヤーが持つとき，プレイヤーはすべての勝利提携に含まれる．そのようなプレイヤーを完全拒否権者という[*7]．

[*5] $\max\{\emptyset\}$ は存在しないため，$N \in \mathcal{W}$ の仮定を置く．

[*6] $\Gamma = \{\gamma \mid \gamma : 2^N \to \mathbf{R}, \gamma(\emptyset) = 0\}$ とし，$\gamma \in \Gamma$ を提携形ゲーム (coalitional game) と呼ぶことにする．任意の $S \in 2^N$ に対し $\gamma(S) \in \{0, 1\}$ となる提携形ゲーム $\gamma \in \Gamma$ を単純ゲームという．

[*7] なお，独裁者と拒否権者は異なる概念である．プレイヤー i が独裁者であるとは，i を含むすべての提携

定義 1. 任意の $S \in 2^N$ に対して $i \notin S$ ならば $S \notin \mathcal{W}$ であるとき，プレイヤー i は完全拒否権を持つという．

あるプレイヤーが完全拒否権を持つ重みつき多数決ゲームは，市川・上條 (2008) で分析しているゲームである．したがって本モデルの拒否権パラメータは，彼らが扱っている完全拒否権を包含する概念であると言える[*8]．次の命題は完全拒否権を本稿のモデルで表現できることを示している．

命題 1. プレイヤー i について $k_i \geq w(N \setminus \{i\})$ であるならば，i は完全拒否権を持つ．

証明. 結論を否定して，ある $S \in \mathcal{W}$ が存在して，$i \notin S$ であると仮定する．すると，そのような S について，$w_i > 0$ より

$$w(S) \leq w(N \setminus \{i\}) < k_i$$

が成り立つ．これは $S \in \mathcal{W}$，すなわち $w(S) \geq K(S)$ に矛盾する． Q.E.D.

なお，この逆は成り立たない．なぜなら，重みが十分に大きければ，拒否権パラメータが命題の条件を満たしていなくともすべての勝利提携に含まれる場合が存在するからである[*9]．また，命題 1 に関して，あるプレイヤー i について $k_i > w(N)$ であるときも，全員提携 N は勝利提携となることを注意しておく．

次の命題 2 は，ゲーム $(\mathbf{k}, \mathbf{w})$ が投票システムとして保持すべき上記の望ましい性質を備えていることを主張している．

命題 2. ゲーム $G = (\mathbf{k}, \mathbf{w})$ は次の 3 つの性質を満たす．
(1) 全員提携は必ず投票に勝利する *($N \in \mathcal{W}$)*
(2) 単調性 *(*任意の $S, T \in 2^N$ に対して $S \in \mathcal{W}$ かつ $S \subseteq T$ ならば $T \in \mathcal{W}$*)*
(3) 勝利提携の補集合は敗北提携である *(*任意の $S \in 2^N$ に対して $S \in \mathcal{W}$ ならば $N \setminus S \notin \mathcal{W}$*)*

が勝利提携となるときをいう．ゆえに独裁者ならば拒否権者であるが，その逆は成り立つとは限らない．なお，あるプレイヤー i が存在して，任意の $j \in N \setminus \{i\}$ に対して $w_i \geq k_j$ であるとき，プレイヤー i は独裁者である．

[*8] もちろん現実の投票制度という文脈においては拒否権発動の効果が異なるので，本稿の拒否権パラメータが完全拒否権を包含するとは必ずしも言えない．しかし，分析の上では両者を同じモデルによって表現することが可能なのでこのような表現を用いた．

[*9] 独裁者がその典型的な例である．

証明. まず (1) の成立は明らかである．次に性質 (2) であるが，$S \in \mathcal{W}$ かつ $S \subseteq T$ より，

$$K(T) \le K(S) \le w(S) \le w(T)$$

なので $T \in W$ であることが言えるので，性質 (2) は満たされる．性質 (3) を満たすことを示そう．$S \in \mathcal{W}$ を仮定すると，任意の i について $k_i > \frac{1}{2}w(N)$ より

$$w(S) \ge K(S) > \frac{1}{2}w(N)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} w(N) = w(S) + w(N \setminus S) > \frac{1}{2}w(N) + w(N \setminus S) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}w(N) > w(N \setminus S) \\ &\Leftrightarrow N \setminus S \notin \mathcal{W} \end{aligned}$$

よって性質 (3) も満たされる． Q.E.D.

ここまではゲーム G について考えてきた．G においては各投票者が個別に拒否権パラメータを与えられているが，複数の投票者が提携することで拒否権を発揮できる場合も考えることが可能である．本小節の残りでは，そのような場合について G を拡張したモデルを定式化する．

複数の投票者が提携することで拒否権を発揮できる典型的な例は，黄金株である．黄金株は一言で言えば拒否権付株式のことであり，特殊な定めをされた種類株式のことを指す．なお，株式には普通株式と種類株式の 2 種類があり，株式市場で取引されているのは普通株式である．黄金株は欧米のいくつかの国では一定の条件の下での発行が以前から認められていたものである．昨今，わが国においても敵対的 M& A がもはや他人事では無くなってきていることなどにより，買収防衛策の一つとして注目されるようになってきている[*10]．黄金株の拒否権発動の仕組みを大まかに述べると次のようになる[*11]．はじめに普通株主総会においてある議案 X が可決される．次に種類株主総会が開かれる．種類株

[*10] たとえば黄金株を発行している A 社に B 社が敵対的買収を仕掛けたとする．B 社が TOB によって経営権を取得できるだけの株式 (たとえば取締役の選任を通じて会社の経営を決定することが出来るに十分な議決権の取得に足るだけ) を取得し，株主総会で自分達に有利な取締役の人選をしたとしよう．しかしA 社に味方する者が黄金株を保有していれば，拒否権を発動することでその人事提案を廃案にすることが出来るのである

[*11] 会社法第 108 条第一項並びに同条同項の 8 は，「株主総会で決議すべき事項に，通常の株主総会の他に種類株式を持つ株主のみで行う種類株主総会での決議を必要とするものを認める」という条件を付与した「種類株式」の発行を認めている．この条件を持つ種類株主の持ち主が，通常の株主総会で可決された案を種類株主総会において否決することで廃案に持ち込むことが，拒否権が発動される厳密な仕組みである．

主総会は黄金株の保有者が参加する株主総会である[*12]．そして種類株主総会において議案 X が否決された場合は，議案 X は廃案となる[*13]．黄金株は通常 1 株のみ発行されるが，複数発行する状況も考えられる．先の例に基づいて考えると，この場合，種類株主総会において多数決が行われ，議案 X が過半数を得ることができずに否決されれば，議案 X は廃案となる．すなわち，複数の黄金株主が提携を形成することで完全拒否権を保有することができる．

一方，複数の投票者が協力することでより大きな不完全拒否権を保有することができる場合も考えることが可能である．わが国の「ねじれ国会」を考えよう[*14]．ねじれ国会とは，わが国の国会において，衆議院で与党が過半数の議席を持つ一方で，参議院では野党が過半数の議席を維持している状態のことを言う．ねじれ国会は，1989 年，1998 年，2007 年の参議院選挙後に発生している．2007 年のねじれ国会当時の議席配分は次の通りであった．

政党名	衆議院議席数	参議院議席数
自民党	304	83
公明党	31	20
民主党	113	109
日本共産党	9	7
社民党	7	5
国民新党	6	4
新党日本	0	1
無所属	9	13
計	479	242
過半数	240	121
再審議	320	

上記の状況では，参議院においては民主党，社民党，共産党などが提携することで過半

[*12] 通常，黄金株は 1 株のみ発行されるため，種類株主総会において黄金株主ただ 1 人が投票者となり，したがってこの場合黄金株主は種類株式総会で独裁者となる．

[*13] なお，黄金株には譲渡制限を付与することができるため，黄金株自体が買収されてしまうことも防ぐことが出来る．会社法第 108 条第一項の 4 は，種類株式に「譲渡による当該種類の株式の取得について当該株式会社の承認を要する」ことを認めている．

[*14] 福田・脇田 (2009) は，ねじれ国会を投票力指数を用いて分析している．

数を握ることができる．もし彼らが提携を形成したとすれば，衆議院においては民社共の連合野党が反対している場合は，たとえ衆議院で過半数の賛成を得て可決されたとしても参議院で否決されるため，結局は衆議院において３分の２以上の賛成が可決に必要になる．そのよう意味で，本稿のモデルにおける表現を用いれば，民主・共産・社民の提携は衆議院において全議席数の３分の２の不完全拒否権を保有していると述べることができる[*15]．次に定めるゲームを用いると，今述べた２つの例のように，各投票者が提携を形成することでより大きな拒否権を獲得できるケースを分析することが可能になる．

投票者の集合 N と重みベクトル $\mathbf{w}$ はこれまで同様である．一方，拒否権パラメータについては提携ごとに関数 $k : 2^N \to \mathbb{N}$ により定められ，関数 k は任意の $S \in 2^N$ に対して $k(S) > \dfrac{1}{2}$ を満たすとする．勝利提携の集合は

$$\mathcal{W} = \left\{ S \in 2^N \mid w(S) \geq \max\{k(T) \mid T \in 2^{S^c}\} \right\}$$

と定められ，$N \in \mathcal{W}$ を仮定する．すると k と $\mathbf{w}$ の組 $\hat{G} = (k, \mathbf{w})$ は１つの単純ゲームである．記号の簡略化のために以下では $\hat{K}(S) = \max\{k(T) \mid T \in 2^{S^c}\}$ と書くことにする．$\#S > 1$ なる提携 S について $k(S) = \max\{k(\{i\}) \mid i \in S\}$ としたとき $G = (\mathbf{k}, \mathbf{w})$ と $\hat{G} = (k, \mathbf{w})$ はゲームとして同質 ($\mathcal{W}(G) = \mathcal{W}(\hat{G})$) であることを注意しておく．この意味で $\hat{G}$ の方がゲームの概念としては広いと言える．G と同様に $\hat{G}$ は通常の投票制度の性質を保有していることを次の命題は主張している．

命題 3. $\hat{G} = (k, \mathbf{w})$ は次の３つの性質を満たす．
(１) 全員提携は必ず投票に勝利する ($N \in \mathcal{W}$)
(２) 単調性 (任意の $S, T \in 2^N$ に対して $S \in \mathcal{W}$ かつ $S \subseteq T$ ならば $T \in \mathcal{W}$)
(３) 勝利提携の補集合は敗北提携である (任意の $S \in 2^N$ に対して $S \in \mathcal{W}$ ならば $N \setminus S \notin \mathcal{W}$)

証明. まず (１) の成立は明らかである．次に性質 (２) であるが，$S \in \mathcal{W}$ かつ $S \subseteq T$ より，

$$\hat{K}(T) \leq \hat{K}(S) \leq w(S) \leq w(T)$$

なので $T \in W$ であることが言えるので，性質 (２) は満たされる．性質 (３) を満たすこ

[*15] もちろん，自民・民主の提携も３分の２の不完全拒否権を保有していると言うことができる．

とを示そう．$S \in \mathcal{W}$ を仮定すると，任意の S について $k(S) > \frac{1}{2}w(N)$ より

$$w(S) \geq \hat{K}(S) > \frac{1}{2}w(N)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} w(N) &= w(S) + w(N \setminus S) \\ &> \frac{1}{2}w(N) + w(N \setminus S) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}w(N) > w(N \setminus S) \\ &\Leftrightarrow N \setminus S \notin \mathcal{W} \end{aligned}$$

よって性質 (3) も満たされる． Q.E.D.

例 2.2. ねじれ国会の例
$k(\{$ 民主党 $\}) = 240$ であるが，$k(\{$ 民主，社民，共産党 $\}) = 320$ であると考えられる．

例 2.3. 黄金株の例
単純化のために $w(N)$ は奇数とする．したがって過半数は $\dfrac{w(N)+1}{2}$ となる．今，プレイヤーの集合 N が $\bar{N}$ と V に分割されるとする．ここで $\#V = L$ とし，$n > L \geq 3$ かつ L は奇数とする．すると任意の提携 $S \in 2^n$ は $S = \bar{S} \cup T(\bar{S} \subseteq \bar{N}, T \subseteq V)$ と書くことができる．以上の準備の下で関数 $k : 2^N \to \mathbb{N}$ を，

$$k(S) = \begin{cases} w(N) & \#T \geq \frac{L+1}{2} \\ \frac{w(N)+1}{2} & \#T < \frac{L+1}{2} \end{cases}$$

と定める．このようなゲーム $\hat{G} = (k, \mathbf{w})$ は黄金株式が複数発行されている投票制度を表現している．V に含まれる投票者が黄金株式を保有している投票者である．たとえば $\bar{N} = \{1,2,3\}, V = \{4,5,6\}$ というゲームを考えよう．このとき V に含まれる少なくとも 2 人のプレイヤーが提携に加わっていれば，あらゆる議案を否決できる．たとえば $k(\{1\} \cup \{4,5\}) = w(N)$ なので，提携 $\{2\}, \{3\}, \{2,3\}$ は勝利提携となることができない．

3 Shapley-Shubik 指数と拒否権を伴う重み付き多数決ゲーム

　議会制度における各投票者の議決に与える影響力の評価には，投票力指数がよく用いられる．その理由としては，可決に必要な票数が一定であるような単純な重みつき多数決を

考えてみたとしても，重みが各投票者の影響力を適切に表現しているとは言えないケースが数多く存在するからである．次の例はそのようなケースの典型例である．

例 3.1. $\mathbf{w} = (6, 4, 3), \mathbf{k} = (7, 7, 7)$.
この例では，$\mathcal{W} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$ であるから，どのプレイヤーも等しい影響力を持つと考えるべきであろう．

ここで鍵となる考え方は，各投票者が決定票 (casting vote) をどれだけ握ることができるか，という観点である．この観点から定義された投票力指数として代表的なものに Shapley-Shubik(1954) 指数 (SS 指数) と Banzhaf(1965) 指数がある．本稿では扱いが容易な SS 指数を用いることにする．本節では，まず SS 指数を定義し，拒否権と SS 指数の関係と重みと SS 指数の関係を明らかにする．さらに，応用上重要な本稿のモデルにおける SS 指数の計算方法を提示する．なお，以下の節では $G = (\mathbf{k}, \mathbf{w})$ のみを用い，前節の最後で定義した $\hat{G}$ は用いない．

Π を N の順列 (置換) 全体の集合とする．すると，任意の $\pi \in \Pi$ に対して，$\pi(i)$ は π における i 番目の数を表している．任意の $\pi \in \Pi$ と任意の $i \in N$ に対して $\sigma_i(\pi) = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ とする．$\sigma_i(\pi) \notin \mathcal{W}$ かつ $(\sigma_i(\pi) \cup \{i\}) \in \mathcal{W}$ となるとき，$i \in N$ は順列 π におけるピヴォットであるという．プレイヤー i の SS 指数は，i がピヴォットになる順列の個数をすべての順列の個数 $n!$ で除したものとして定義される．ここで，プレイヤー i がピヴォットとなる順列の集合は $\{\pi \in \Pi \mid \sigma_i(\pi) \notin \mathcal{W}, (\sigma_i(\pi) \cup \{i\}) \in \mathcal{W}\}$ と表すことができる．したがって，ゲーム G におけるプレイヤー i の SS 指数 φ_i は

$$\varphi_i(G) = \frac{\#\{\pi \in \Pi \mid \sigma_i(\pi) \notin \mathcal{W}, (\sigma_i(\pi) \cup \{i\}) \in \mathcal{W}\}}{n!}$$

と定義できる．実際に SS 指数を求める上では上記の表現を用いるのは不便なので，以下で定める別表現を今後は用いることとする．$\mathcal{S}_i(G)$ をプレイヤー i を含まないでかつ i が加わることで敗北提携から勝利提携に変わる提携の集合とする．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_i(G) &= \{S \in 2^N \mid S \notin \mathcal{W}, S \cup \{i\} \in \mathcal{W}, i \notin S\} \\ &= \{S \in 2^N \mid K(S \cup \{i\}) - w_i \leq w(S) < K(S), i \notin S\}\end{aligned}$$

とする．このとき，ゲーム G の SS 指数は次式で与えられる．

$$\varphi_i(G) = \sum_{S \in \mathcal{S}_i(G)} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!}$$

なお $\#S$ は提携 S に含まれる要素の数 (cardinal number) を表している．

プレイヤー i の SS 指数 φ_i は，i がピヴォットになる順列の総数をすべての順列の個数でで除したものであるから，すべての順列が等しい確率で起きると仮定するとき，SS 指数は各プレイヤーがピヴォットになる確率を表していると解釈できる[*16].

SS 指数は以下に述べる性質を持つ[*17].

(1) パレート効率性：$\sum_{i \in N} \varphi_i = 1$

(2) 対称性：$i \neq j$ なる任意のプレイヤー i, j に対して，$k_i = k_j$ かつ $w_i = w_j$ ならば $\varphi_i = \varphi_j$ である.

(3) ダミー：すべての最小勝利提携に含まれないプレイヤー i に対して $\varphi_i = 0$ である[*18].

以下に SS 指数の計算例を示す.

例 3.2. 過半数ルール　$n = 4,\ w = (40, 30, 20, 10),\ k = (51, 51, 51, 51)$.

$$\varphi = (\frac{10}{24}, \frac{6}{24}, \frac{6}{24}, \frac{2}{24})$$

例 3.3. 3 分の 2 再議決制度　$n = 4,\ w = (40, 30, 20, 10),\ k = (51, 51, 51, 67)$.

$$\varphi = (\frac{8}{24}, \frac{8}{24}, \frac{4}{24}, \frac{4}{24})$$

上記の 2 つの例は興味深い事実を示唆している．例 3.2 と例 3.3 を比較すると，プレイヤー 1 とプレイヤー 3 の SS 指数が共に減少する一方で，プレイヤー 2 とプレイヤー 4 の SS 指数は増加している． 2 つ目の例でプレイヤー 4 は他のプレイヤーよりも大きな拒否権パラメータを持つため，SS 指数が増加するのは当然と言えよう．しかしながら，プレイヤー 2 は拒否権が同じであるにもかかわらず SS 指数が増加している．この例でプレイヤー 2 の SS 指数が増加したことは，数学的には次の事実から明らかとなる．前者の例では $\mathcal{S}_2 = \{\{1\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$ である一方，後者の例では $\mathcal{S}_2 = \{\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$ となっている．すなわち，プレイヤー 4 の拒否権が上昇したことにより，プレイヤー 2 が加わることで敗北提携から勝利提携に変わる集合族は大きくなったのである．他方で $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ は集合として小さくなっているので，SS 指数は減少する．あるプレイヤーの拒否権

[*16] すべての投票者が同質で選好の差がなく，すべての議案に対してすべての投票者が同じ程度に支持する場合，どの議案に対してもどの提携形成の順列が生じるかはランダムに生じ，すべての順列が等確率で生じると考えられる.

[*17] 本稿では特に用いないため省略するが，他にはゲームの合成に関する性質がある．詳細は Dubey(1975) を参照せよ.

[*18] すべての最小勝利提携 (minimal winning coaltion) に含まれない投票者をダミー (dummy) という．最小勝利提携とは，それ以上小さな勝利提携を含まない勝利提携のことをいう．すなわち，$S \in \mathcal{W}$ かつ，$T \subseteq S$ かつ $T \neq S$ なる $T \in \mathcal{W}$ が存在しない提携 S を最小勝利提携という.

パラメータの上昇は，他のプレイヤーの SS 指数を減少させるのみならず，上昇させることもあるのである．

一般に, 拒否権パラメータと SS 指数はいかなる関係にあるのであろうか．はじめに, 拒否権パラメータと SS 指数の関係について考えてみよう．いま，異なるゲーム $G = (\mathbf{k}, \mathbf{w})$ と $G' = ((k'_i, \mathbf{k}_{-i}), \mathbf{w})$ を考え，$k_i \leq k'_i$ であるとする．すなわち G' は，あるプレイヤー i の拒否権 k_i は k'_i に増加する一方で，i 以外のプレイヤーの拒否権は不変で，さらに重みは全てのプレイヤーについて変化していないという状況を考えている．このとき $\varphi_i(G) \leq \varphi_i(G')$ が成り立つ．なぜなら，k_i の上昇はプレイヤー i が加わることで敗北提携から勝利提携に変わる提携の数が増える，すなわち i がピヴォットになる順列の個数の増加を意味しているからである．上記の事実を厳密に述べたのが次の命題である．

命題 4. $G = (\mathbf{k}, \mathbf{w})$ と $G' = ((k'_i, \mathbf{k}_{-i}), \mathbf{w})$ を考え，$k_i < k'_i$ であるとする．このとき，$\varphi_i(G) \leq \varphi_i(G')$ が成り立つ．

証明. $\mathbb{S}_i(G) \subseteq \mathbb{S}_i(G')$ を証明すればよい．$\mathbf{k}' = (k'_i, \mathbf{k}_{-i}), K'(S) = \max\{k'_j \mid j \in N \setminus S\}$ と書くことにする．任意に $S \in \mathbb{S}_i(G)$ を固定すると，そのような S に対して

$$K(S \cup \{i\}) = K'(S \cup \{i\}) \text{ かつ } K(S) \leq K'(S)$$

が成り立つ．これは $S \in \mathbb{S}_i(G')$ を意味する． Q.E.D.

ある投票者の拒否権パラメータが増加したとき，他のプレイヤーの SS 指数は減少する場合も増加する場合も共にあることを先の例は示しており，変化の方向はプレイヤー間で非対称の場合がある．より一般的には，先と同様に G と G' を考えると，任意の $S \in 2^{N \setminus \{i\}}$ に対して

$$K'(S \cup \{i\}) - K'(S) \geq K(S \cup \{i\}) - K(S)$$

が成り立つとき，$\mathbb{S}_i(G) \subseteq \mathbb{S}_i(G')$ が成り立つので i の SS 指数は増加する．

ここまで SS 指数の性質について考えてきたわけであるが，現実の投票制度を分析する際には，SS 指数を実際に計算できなければならない．SS 指数の計算方法として最も単純な方法は，単純にすべての組み合わせを調べる方法で時間計算量は $O(n2^n)$ である．しかし，プレイヤーの人数の増加につれて急激に計算量が増加してしまうため，コンピュータの性能を考えると現実的方法ではない．そこで Lucas(1983) は，通常の重みつき多数決ゲーム (すべての i について $k_i = \bar{k}$ なるゲーム) において SS 指数の高速な計算方法を考案した．その時間計算量は $O(n^2 q)$ である（q は可決必要票数である）．その方法は次のようなものである．

プレイヤー i を含まず，重みの和が u， 要素の数が s である提携の個数を $C(i,u,s)$ で表すことにしよう．$k_i = \bar{k}(i = 1, 2, \ldots, n)$ であれば，となる．したがってプレイヤー i の SS 指数は

$$\varphi_i = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{u=\bar{k}-w_i}^{\bar{k}-1} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} C(i,u,s)$$

と書くことができる．ゆえに $C(i,u,s)$ を知ることができれば SS 指数の計算が可能である．Lucas(1983) は $C(i,u,s)$ を計算するアルゴリズム (以下では Lucas アルゴリズムと呼ぶ) を提示している[*19].

しかし，本稿で用いる拒否権を伴う重みつき多数決ゲームでは Lucas の方法をそのまま適用することができない．なぜなら，提携 S に応じて $K(S)$ と $K(S \cup \{i\})$ が変化してしまうからである．Lucas の方法は $K(S)$ と $K(S \cup \{i\})$ が一定でなければ利用することができないのである．

しかし本稿では，$k_i = \bar{k}(i \neq n)$ 及び $\bar{k} < k_n$ となるゲーム G^* においては Lucas アルゴリズムを利用可能にする方法の考案に成功した．

命題 5. $k_i = \bar{k}(1 \leq i \leq n-1)$， $\bar{k} \leq k_n$ を仮定する．このようなゲーム G^* において，

$$\varphi_n = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{u=\bar{k}-w_n}^{k_n-1} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} C(n,u,s)$$

証明. $\mathcal{S}_n$ について考える．$n \notin S$ なる $S \in 2^N$ に対して，$k_i = \bar{k}(1 \leq i \leq n-1)$ より $K(S \cup \{n\}) = \max\{k_j \mid j \in N \setminus (S \cup \{n\})\} = \bar{k}$ である．また $K(S) = \max\{k_j \mid j \in N \setminus S\} = \max\{\bar{k}, k_n\} = k_n$ である．したがって $\mathcal{S}_n = \{S \in 2^N \mid \bar{k} - w_n \leq w(S) \leq k_n - 1, n \notin S\}$ となる．$C(n,u,s)$ は $\mathcal{S}_n$ に含まれる提携のうち，重みの和が u で要素の数が s である提携の個数に他ならない．ゆえに命題が成り立つ． Q.E.D.

命題 5 で示された式は Lucas アルゴリズムを適用できる形となっているので，プレイヤー n の SS 指数を Lucas アルゴリズムを用いて計算することができる．

例 3.4. $n = 4$, $w = (40, 30, 20, 10)$, $k = (51, 51, 51, 67)$.
$\mathcal{W} = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, N\}$
$C(4,u,s)$ のうち $41 \leq u \leq 66$ を満たす提携について考えると，$C(4,60,2) =$

[*19] 現在，より高速なアルゴリズムがいくつか提案されている．詳しくは Matsui and Matsui(2000) を参照せよ．

$1, C(4,50,2)=1$ である．したがって

$$\varphi_4 = \frac{2!1!}{4!} \times 2 = \frac{4}{24}$$

次に残りのプレイヤーの SS 指数の計算方法を考えよう．G^* から導かれるゲーム $G^*|_{n-1}$ は，G^* においてプレイヤー n 以外のプレイヤーで構成されるゲームで，$\mathcal{W}(G^*|_{n-1}) = \{S \in 2^{N\setminus\{n\}} \mid w(S) \geq k_n\}$ となるゲームである．よって $\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) = \{S \in 2^{N\setminus\{n\}} \mid k_n - w_i \leq w(S) < k_n\}$ である．一方, $G^*(n)$ は, G^* においてプレイヤー n が完全拒否権を持つように変わったゲームで，$\mathcal{W}(G^*(n)) = \{S \in 2^N \mid w(S) \geq \bar{k}, n \in S\}$ となるゲームである．したがって $\mathcal{S}_i(G^*(n)) = \{S \in 2^N \mid \bar{k} - w_i \leq w(S) < \bar{k}, n \in S\}$ である．定義より $\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) \cap \mathcal{S}_i(G^*(n)) = \emptyset$ が成り立つ．

定理 1. 任意の $i \in N \setminus \{n\}$ に対して

$$\mathcal{S}_i(G^*) = \mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) \cup \mathcal{S}_i(G^*(n))$$

$\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) \cap \mathcal{S}_i(G^*(n)) = \emptyset$ が成り立っている．

証明. まず $\mathcal{S}_i(G^*) \subseteq (\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) \cup \mathcal{S}_i(G^*(n)))$ を示す．任意に $S \in S_i(G^*))$ を固定する．このとき $S \in \mathcal{S}_i(G^*|_{n-1})$ または $S \in \mathcal{S}_i(G^*(n))$ が成り立つことを示す．$n \in S$ のケースを考えると，このとき $K(S) = K(S \cup \{i\}) = \bar{k}$ なので

$$\bar{k} - w_i = K(S \cup \{i\}) - w_i \leq w(S) < K(S) = \bar{k}$$

が成り立つから $S \in S_i(G^*|_{n-1})$ である．$n \notin S$ のケースを考えると，このとき $K(S) = K(S \cup \{i\}) = k_n$ なので

$$k_n - w_i = K(S \cup \{i\}) - w_i \leq w(S) < K(S) = k_n$$

が成り立つから $S \in S_i(G^*(n))$ である．

次に，逆向きの包含関係 $\mathcal{S}_i(G^*) \supseteq (\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) \cup \mathcal{S}_i(G^*(n)))$ を示す．任意に $S \in (\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) \cup \mathcal{S}_i(G^*(n))$ を固定すると，$S \in \mathcal{S}_i(G^*|_{n-1})$ または $S \in \mathcal{S}_i(G^*(n))$ のいずれか一方のみが成り立つ．$S \in \mathcal{S}_i(G^*|_{n-1})$ のときを考える．このとき $n \notin S$ より $K(S) = K(S \cup \{i\}) = k_n$ なので

$$K(S \cup \{i\}) - w_i = k_n - w_i \leq w(S) < k_n = K(S)$$

が成り立つので $S \in \mathcal{S}_i(G^*)$ である．次に，$S \in \mathcal{S}_i(G^*(n))$ のケースを考える．このときは $n \in S$ より $K(S) = K(S \cup \{i\}) = \bar{k}$ より

$$K(S \cup \{i\}) - w_i = \bar{k} - w_i \leq w(S) < \bar{k} = K(S)$$

なので $S \in \mathbb{S}_i(G^*)$ が成り立つ．以上より命題が正しいことが証明された． Q.E.D.

系 1. 任意の $i \neq n$ に対して，

$$\varphi_i(G^*) = \sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*|_{n-1})} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!} + \varphi_i(G^*(n))$$

が成り立つ．ただし $\mathbb{S}_i(G^*|_{n-1}) \cap \mathbb{S}_i(G^*(n)) = \emptyset$ が成り立っている．

証明.

$$\begin{aligned}
\varphi_i(G^*) &= \sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*)} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!} \\
&= \sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*|_{n-1}) \cup \mathbb{S}_i(G^*(n))} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!} \\
&= \sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*|_{n-1})} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!} + \sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*(n))} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!} \\
&= \sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*|_{n-1})} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!} + \varphi_i(G^*(n))
\end{aligned}$$

Q.E.D.

系 1 の右辺より，G^* における SS 指数は n が完全拒否権者のときの SS 指数に右辺第 1 項 $\sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*|_{n-1})} \frac{(n-\#S)!(\#S-1)!}{n!}$ を加えたものであることがわかる．右辺第 1 項は完全拒否権者を緩めた本稿のモデルにおける各投票者の利益と見なすことができるので，この点からも本稿のモデルが完全拒否権のある重みつき多数決ゲームと通常の重みつき多数決ゲームの中間に位置することがわかる． $\sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*|_{n-1})} \dfrac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!}$ については，

$$\sum_{S \in \mathbb{S}_i(G^*|_{n-1})} \frac{(n - \#S)!(\#S - 1)!}{n!} = \sum_{s=0}^{n-2} \sum_{u=k_n - w_i}^{k_n - 1} \frac{(n - s)!(s - 1)!}{n!} C(i, u, s)$$

となるので通常の重みつき多数決ゲームにおける Lucas アルゴリズムを用いて計算できる．一方，$\varphi(G^*(n))$ は市川・上條 (2008) で示されている方法を用いることで計算できる．以上の議論から $\varphi_i(G^*)$ を計算することが可能であることがわかった．

なお，右辺第 1 項は G^* において $k_n > w(N \setminus \{n\})$ のときゼロとなることに注意する．次の命題はすべての $i \neq n$ について系 1 の右辺第一項がゼロとなるための必要十分条件を述べたものである．

命題 6. 任意の $i \neq n$ に対して $w_i < k_n$ であるとき，任意の $i \neq n$ に対して $\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) = \emptyset$ であるための必要十分条件は $k_n > w(N \setminus \{n\})$ であることである．

証明. 必要性を示す．$k_n > w(N \setminus \{i\})$ を仮定すると，$W(G^*|_{n-1}) = \emptyset$ となるので $\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) = \emptyset$ となる．十分性を示す．逆に $\mathcal{S}_i(G^*|_{n-1}) = \emptyset$ を仮定する．すると任意の $S \in 2^{N\setminus\{n\}}$ に対して $k_n - w_i > w(S)$ または $w(S) \geq k_n$ が成り立つ．ところが，仮定より $i \in N$ に対して $w_i < k_n$ が成り立つので，特に $S = \{i\}$ を仮定すれば $w(\{i\}) \geq k_n$ は明らかに矛盾である．ゆえに $k_n - w_i > w(S)$ が成り立つ場合のみを考えればよい．この不等式は任意の $S \in 2^{N\setminus\{n\}}$ に対して成り立つので特に $S = N \setminus \{i, n\}$ とすれば $k_n > w(N \setminus \{n\})$ がただちに言える． Q.E.D.

4　応用：地方議会に投票力分布に与える首長の拒否権の効果

本節では SS 指数の数値計算を通じて拒否権の効果を考察していく．議会における再議決制度は社会において広く用いられている制度であり，先に触れた日本の国会や地方議会においても再議決制度が採用されている．ここで再議決制度とは，一旦過半数の賛成を得て可決された議案に対して何らかの形で拒否権が発動され，再び議決が行われる制度のことを指す．特に国会と地方議会では，再可決要件は出席議員の 3 分の 2 以上となっている．この 3 分の 2 という数字が持つ意味はいかなるものであろうか？再可決に必要な票数が出席議員数の 4 分の 3 や 5 分の 4 である議会制度も現実には存在するが，再議決に必要な票数が異なる以外の影響はあるのだろうか？ 3 分の 2 再議決の際には，前節の例 3.2 と 3.3 で見たように，過半数可決ラインのときに比べて SS 指数が増加する投票者もいれば減少する投票者もいるという意味においては不公平が生じることがあり得る．また，たとえば再可決要件を 3 分の 2 から 4 分の 3 の賛成へと制度を変更した際に，首長のパワーが急激に増大する可能性もある．そのような場合には，議会における権利配分を著しく歪めてしまうであろう．再議決における可決ラインが投票者の権利配分に与える影響をいくつかの数値計算を通じて調べることが本節の目的である．

次のようなゲーム $G_\nu = ((\mathbf{k}_{-n}, k_n + \nu), (\mathbf{w}_{-n}, 0))$ を考え，ゲームの列 $G_0, G_1, \ldots, G_{w(N)-k_n}$ を考える．各 $G_\nu(\nu = 0, 1, \ldots, w(N) - k_n)$ において k_i と k_n は全票数の過半数である．プレイヤー n が首長であると考え，首長は議会で投票できないため $w_n = 0$ とする．このようなゲーム G_ν について SS 指数を計算し，プレイヤー n の SS 指数の変化の様子を観察する．これにより，再可決ラインの変化と首長のパワーの関係を調べることができる．

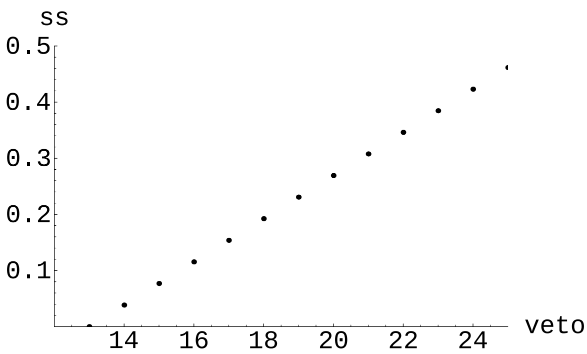
しかし，その関係は重みの分布によって異なる可能性がある．そこで，重みの分布を表す尺度として Herfindahl-Hirschman 指数 (HHI) を用いることとする． HHI は産業組織論で用いられる指標の一つで，ある産業における市場の競争に関する状態を表すものとして使用される．HHI は $\frac{1}{n}$ から 1 の値をとり，1 のときが完全な独占状態であり，下限に近づくにつれて市場はより競争的となっていることを示す．HHI は市場占有率の二乗和として表現される．すなわち，各企業 i の市場占有率を β_i とすれば

$$\mathrm{HHI} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2$$

である．この市場占有率 β_i を投票者の票数の保有比率 $\frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$ で置き換える[*20].

まず，最も単純なケースである１人１票のケースを考えよう．なお，以下では縦軸がプレイヤー n(首長) の SS 指数，横軸が $k_n + \nu$(再可決ライン) の値である[*21].

Figure1　１人１票の単純多数決における再可決ラインと拒否権者の SS 指数



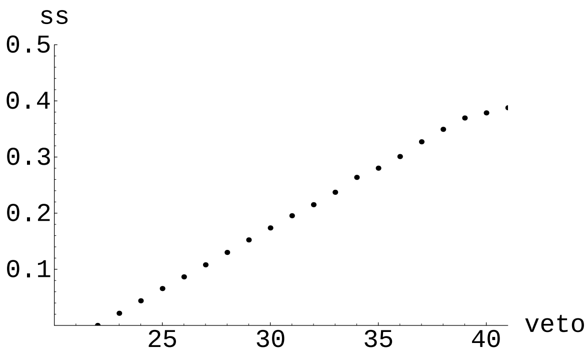
プレイヤー数	26
全議席数	25
HHI	0.04
過半数	13
2/3	17
3/4	19
4/5	20

１人１票のケースでは，拒否権パラメータの増加と首長の SS 指数は直線的な関係であることが観察される．したがって，再可決ラインの３分の２から４分の３ないしは５分の４への変更は，首長のパワーを比例的に増大させる．他方で，他のプレイヤーの SS 指数も首長の SS 指数の増加に比例して減少する．

[*20] なお，過半数を超える重みを保有するプレイヤーは存在しないケースを考えるため，本稿では HHI は 0.5 が最大値となる．
[*21] 計算には Mathematica を利用した．

１人１票のケースは，議席が最も分散しているケースであるが，分散の度合いがこれよりやや弱くなった場合はどうなるだろうか？議席配分が先の例より分散していないケースとして HHI が 0.12 である市川市議会について数値計算を試みると，次のグラフを得た*22.

Figure2　市川市議会における再可決ラインと首長の SS 指数



プレイヤー数	11
全議席数	41
HHI	0.12
過半数	22
2/3	28
3/4	31
4/5	33

Figure3　市川市議会の議席配分

政党名	議席数
公明党	8
自由クラブ	6
共産党	5
緑風会	5
ニューガバナンス	4
みらい・つばさ	4
民主クラブ	3
社民・市民ネット	3
市民連合・あい	2
道	1
計	41

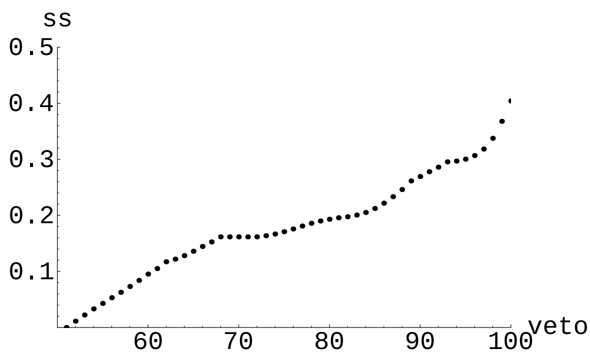
グラフからわかるように，首長の SS 指数と再可決ラインの関係は概ね直線的な関係となっている．ここから，議席配分の分散度が強い，すなわち HHI が小さいケースでは首

*22 市川市議会の詳細な議席配分は付録を参照せよ.

長の SS 指数と再可決ラインの関係は直線に近い関係となることが伺える．

一方，議席がある程度特定の政党に集中しているケースはどうなるだろうか？その例として神奈川県議会について考えてみよう*23．神奈川県議会の HHI は 0.28 であり，市川市議会よりは特定政党に議席が集中している．

Figure4　神奈川県議会における再可決ラインと首長の SS 指数



プレイヤー数	11
全議席数	100
HHI	0.28
過半数	51
2/3	67
3/4	75
4/5	80

Figure5　神奈川県議会の議席配分

政党名	議席数
自民党	39
民主・神奈川クラブ	33
公明党	12
県政会	8
大志・未来	2
市民の党	2
共産党	1
神奈川ネット	1
市民町民議員の会	1
維新の会	1
計	100

グラフは S 字型になっている*24．グラフからは，1) 過半数から 3 分の 2 に至るまで

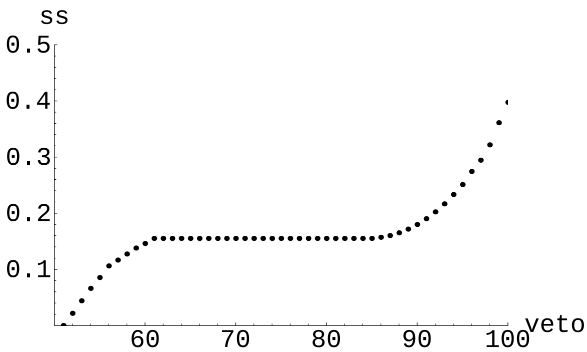
*23 神奈川県議会の詳細な勢力は付録を参照せよ．

*24 筆者が計算した限りでは，HHI が 0.2 から 0.3 のときに S 字型の発生が多かった．

は直線的に首長のパワーが増大する，２）３分の２から５分の４までは緩やかに首長のパワーが増大する，３）５分の４から１までは急激に首長のパワーが増大する，という事実が観察される．

HHI が 0.3 を超えると，二大政党制に近い状況になってくる*25．次の例は仮想的なデータを用いて二大政党に近い状況を作り出したものである*26．

Figure6　仮想的な議会における再可決ラインと首長の SS 指数



プレイヤー数	11
全議席数	100
HHI	0.37
過半数	51
2/3	67
3/4	75
4/5	80

Figure7　仮想議会の議席配分

政党名	議席数
政党１	45
政党２	40
政党３	5
政党４	2
政党５	2
政党６	2
政党７	1
政党８	1
政党９	1
政党１０	1
計	100

*25 二大政党制に近い状況とは，特定の２つの政党が議席のほぼ全てを保有し，他の政党はほとんど議席を保有していない状況である．

*26 適当な例が見つからなかったため仮想データを使用した．詳細な議席配分は付録を参照せよ．

グラフからわかるように，３分の２から５分の４の間で首長のパワーは増加していない．したがって，３分の２から４分の３ないしは５分の４への再可決ラインの変更は意味を持たない．筆者が計算した限りでは，二大政党に近い議席配分ではこのような状況が観察された．

以上の考察結果は次のようにまとめられる．

１) 再可決ライン変更の影響は議席配分に依存する．

２) 議席配分が分散しているケースでは首長のパワーと再可決ラインの関係は直線的なものとなりやすい．

３)HHI が 0.2 から 0.3 程度の議席配分がある程度集中しているケースでは首長のパワーと再可決ラインの関係は S 字型となり，特に３分の２までは直線的に首長のパワーは増大する．

４) 二大政党に近い状況では３分の２から４分の３や５分の４への制度変更が意味をもたない．

さらに，過半数から３分の２へと移行する過程で重みの大きい投票者のパワーが増大するケースがあった．しかし，その増加量はわずかであり，パワー配分に大きな影響を与えるものではなかった．

5　結論

本稿では，不完全拒否権を伴う重み付き多数決を考え，拒否権が投票力分布に与える影響を Shapley-Shubiks 指数によって分析した．まず，他の投票者の拒否権パラメータと重みを一定に保ったままでただ１人の投票者の拒否権パラメータを増加させるとき，その投票者の SS 指数が増加することを示した．また同じ状況の下で，ある投票者の拒否権パラメータを増加させたとき，SS 指数の減少する投票者のみならず，増加する投票者も存在することを数値例によって示した．さらに，SS 指数の効率的な計算方法を提示した上で，数値計算をもとに地方議会における首長の拒否権を分析した．その結果，特に二大政党に近い状況では３分の２から４分の３や５分の４への制度変更が何ら効力をもたないことが明らかになった．この結果は選挙制度を設計する際に参考となるであろう．選挙制度を設計する際に二大政党制が起こりやすい制度を採用し，さらに地方議会の首長に拒否権を付与する制度を用いるとしよう．そのとき，地方議会の首長に付与する拒否権は３分の２から５分の４の間なら何を選んでもよいことになる．

いくつかの問題が将来の研究課題として残されている．SS 指数については，わが国の地方議会における首長の拒否権のように，不完全拒否権が存在する現実の投票制度につい

て SS 指数を計算し，その分布を調べることが重要である．３分の２や４分の３といった再議決ラインと SS 指数の分布に関して，何らかの法則性が存在するか否かを明らかにすべきである．また，ゲーム G において SS 指数を計算する一般的なアルゴリズムの構築も応用可能性を考える上で重要な課題である．本稿ではモデルを提示するのみで終わってしまったが，提携ごとに拒否権が定義されるゲームである $\hat{G}$ における SS 指数の性質についても明らかにする必要がある．加えて，$\hat{G}$ において SS 指数を計算するアルゴリズムを構築することで，わが国のねじれ国会における SS 指数の計算し，それにより，両院制議会における政党間の投票力分布の性質を明らかにすることも興味深い課題である．

参考文献

[1] Algaba, E., Bilbao, J. M., and J.R.Fernandez (2006) "The distribution of power in the European Constitution." *Europian Journal of Operational Research* 176, pp.1752-1766.

[2] Banzhaf, J. F. (1965) "Weighted voting doesn't work." *Rutgers Law Review* 19(2), pp.317-343.

[3] Bilbao, J.M., Fernandez, J.R., Jimenez, N., and J.J. Lopez. (2002) "Voting power in the European Union enlargement" *European Journal of Operational Research* 143, pp.181-196.

[4] Dubey, P.(1975) "On the uniqueness of the Shapley value" *International Journal of Game Theory* 4, pp.131-139.

[5] Gul, F.(1989) "Bargaining Foundations of Shapley value" *Econometrica* 57, pp.81-95.

[6] Lucas, W.F.(1983) "Measuring power in weighted voting systems," in S.J. Brams, W.F. Lucas, P.D. Straffin (Eds.), *Political and Related Models*, Springer, pp.183-238.

[7] Laruelle, A. and F. Valenciano.(2008) "Noncooperative foundations of bargaining power in committees and the Shapley-Shubik index" *Games and Economic Behavior* 63, pp.341-53.

[8] Matsui, T. and Y. Matsui.(2000) "A Survey of Algorithms for Calculating Power Indices of Weighted Majority Games" *Journal of the Operations Research Society of Japan* 43(1), pp.71-86.

[9] McCarty, N.(1998) "Proposal Powers, Veto Powers, and the Design of Political

Institutions” *the Meetings of the American Political Science Association.*

[10] McCarty, N.(2000) “Proposal Rights, Veto Rights, and Political Bargaining” *American Journal of Political Science* 44(3), pp.506-22.

[11] Owen, G(1975) “Evaluation of a Presidential Election Game” The American Political Science Review 69(3), pp.947-953.

[12] Shapley, L.S.(1953)“A Value for n-person games,” in H.W. Kuhn, A.W. Tucker (Eds.), *Contributions to the Theory of Games.*, Annals of mathematical studies Vol.28. Princeton University Press, Princeton, pp. 307-17.

[13] Shapley, L.S. and M. Shubik.(1954) “A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System.” *American Political Science Review* 48(3), pp.787-92

[14] Snyder, J., Ting, M., and S. Ansolabhere.(2005) “Legislative Bargaining under Weighted Voting.” *The American Economic Review* 95(4), pp.981-1004.

[15] 市川実・上條裕平 (2008) “拒否権者を伴う重みつき多数決ゲームにおける Shapley-Shubik 指数の計算とその応用：黄金株導入が株主の権利配分に与える影響について” 早稲田商学 417, pp.83-108.

[16] 小野理恵・武藤滋夫 (1998) “投票システムのゲーム分析”日科技連出版.

[17] 福田恵美子・脇田祐一郎 (2009) “投票力指数による自公連立政権分析” 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌 52，pp.38-55.