

値幅制限を考慮した商品先物価格の実証分析 -MCMC による先物商品価格のモデル化を利用して-

青木 義充¹ 横内 大介² 加藤 剛³

概要

本稿では、商品先物市場を構成する要素のモデル化を通じて運用上必要な指標の算出方法を提示し、商品先物市場に対する理解を広めることを目的としている。対象とする要素は、商品先物の価格変動、レバレッジ性を考慮した証拠金取引、商品取引員と取引参加者間における取引追証拠金の預託と商品取引員が負うデフォルトリスクである。価格変動のモデル化では、商品先物取引の特色である値幅制限を取り入れるべく、商品の真の価値を定義し、その変動をモデル化している。また、実際のデータを解析した結果、同時期における株式指数には存在しなかった自己回帰構造を有することも考慮したモデルを提案している。商品先物取引時に提示される価格と実際の取引時に扱われる取引単位での価格との差を考慮した証拠金取引の仕組みをモデル化し、商品ごとに取引追証拠金が発生する確率の算出手法を示している。また、取引参加者が追証を預託する確率を考慮した、デフォルトが発生する確率とデフォルト時の平均損失金額を算出する手法を示している。

¹総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻 e-mail:yo-aoki@ism.ac.jp

²一橋大学大学院国際企業戦略研究科 e-mail:yokouchi@ics.hit-u.ac.jp

³山形大学地域教育文化学部 e-mail:tkato@e.yamagata-u.ac.jp

1 動機

商品先物市場における取引参加者，商品取引員が考慮すべきリスクを精緻に計測するためには，実際の商品先物市場を徹底的にモデル化することが必要である．本稿では，実際の制度を十分に考慮し「商品先物の価格変動」「証拠金取引制度」の2つをモデル化する．

商品先物取引市場における価格の変動をモデル化している先行研究は以下が挙げられる．Pierre/Sébastien[2003]では，商品先物市場における市場リスク算出を目的とし，ロンドン金属取引所やニューヨーク商品取引所で扱っている商品先物の収益率データに ARCH 型モデルをあてはめ，モデルパラメータの推定量の漸近分布をもとにして VaR を計算している．他方，日本の商品先物を対象としたものでは，以下のものが挙げられる．渡部/大鋸 [1996] は，商品先物の出来高および取組高と価格のボラティリティとの相関を分析し，出来高の変動と価格のボラティリティの間には正の相関があり，取組高の変動との間には有意な相関は見いだされなかったことを報告している．羽森/羽森 [2000] は，ARCH モデルと GJR モデルをあてはめを通して，収益率のボラティリティの変動について，日本とアメリカの商品先物市場の比較検討を行っている．渡部/大森 [2000] は，一日の取引回数が自己相関をもって変動している可能性を考慮に入れた動的 2 変量分布混合モデルを取り上げ，このモデルが商品先物市場における価格や出来高の変動をうまくとらえることができるかをマルコフ連鎖モンテカルロ法を利用して実証分析している．Gray/林/Geert[2006] は，商品先物のリターンは日本株のリターンとほぼ無相関で，債券のリターンとは負の相関を持つことを示し，商品先物をポートフォリオに組み込むことの効用を論じている．高見 [2007] は，商品先物の月次，週次，日次の各データに対するニューラルネットモデルと線型モデルをあてはめ具合を比較検討し，特に月次データを対象としたときのニューラルネットモデルの有用性を示している．上に挙げた先行研究ではいずれも，価格の収益率をベースにモデル化を行なっている．

しかしながら，収益率をベースにモデル化を進めた場合には以下の問題点がある．価格の収益率（騰落率）は，価格の前日差を前日の価格で除する．すなわち， t 時点における価格を P_t ，価格変動 $\Delta P_t := P_t - P_{t-1}$ ，収益率を R_t とした場合，

$$R_t := \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$$

と定式化できる．実際の商品先物市場では，対象商品の受給事情の変化や急激な先行き見通しの修正などの不確定的な事象によって，相場が急激に変動することを防ぐため，1 日における値動きについて，前日価格に対し一定金額（制限値段幅）を加減した制限値段が定められている [2007a, 2007b]．毎月，次の 1 ヶ月分の制限値段幅を設定し公表されているため，基本的には，該当月期間内であれば固定されている．いま，ある期間における制限値段幅を L とおくと，価格前日差 ΔP_t の最大変動幅は

$$|\Delta P_t| \leq L \tag{1}$$

と記述できる．すなわち，最大変動幅は時刻 t に依存しない．一方，収益率 R_t の最大変動幅は

$$|R_t| \leq \frac{L}{P_{t-1}} \tag{2}$$

と記述され，時刻 t に依存する．したがって，収益率の従う確率分布は時刻 t に依存した条件付確率分布として扱う必要が生じ，表現が複雑になってしまう．先行研究では，収益率をベースとして議論を始めているため，制限値段幅を考慮しているものはない．しかし，実際の市場では，制限値段幅の導入によって，商品先物価格の日々の変動幅には上限 / 下限が設定されているため，対象商品の潜在的な価値が高騰 / 急落していたとしても取引価格に全て反映されとは限らない．我々はこの事実を重視し，実際の商品先物取引の市場をモデル化する上において，価格の変動モデルに制限値段幅を

導入する必要があると考えている。そのため、本稿では商品先物価格の変動をモデル化するに当たり、収益率を検討の出発点とせずに、実在するヒストリカルデータを用いて探索的なモデリングを行なっている。東京工業品取引所から提供されている取引のヒストリカルデータの分析から価格の前日差（前営業日との差）が自己回帰構造を有するという結果が得られた。同期間における日経平均株価 225 種、TOPIX の代表的な株式指数の前日差には自己回帰構造がみられないことから、価格の前日差 ΔP_t が自己回帰構造を有することが商品先物価格の特徴であるとみなし、商品先物価格の前日差を自己回帰モデルにて表現している。

さらなる商品先物取引の特徴としては、高いレバレッジと証拠金取引制度が挙げられる。取引所で提示されている価格は、実際に取引参加者が取引できる単位ではない。そのため、取引参加者が考慮すべき資産の変動は、価格変動モデルに対して各々の商品に設定されている取引単位を考慮したものでなければならない。また、証拠金取引制度のモデル化においても同様であり、取引単位との差異を考慮したモデル構築が必要である。我々は、証拠金取引制度における以下の点について焦点を当てた。商品取引員によって課せられる取引本証拠金は、あらかじめ取引所によって決められた取引本証拠金基準額を基準として決定されている。取引本証拠金基準額は、商品の価格変動を取引所が勘案して決定されるもので、毎月見直し・公表をしている。商品先物価格の下落によって、取引参加者の資産における損失が取引本証拠金基準額の半額を上回った場合には取引追証拠金（追証）が発生する。我々は、価格変動モデルをもとに追証が発生する確率を 2008 年中に限月を迎える先物商品について算出している。商品によっては取引本証拠金基準額が価格変動をよく追従し、追証の発生確率をよく制御できているものもあったが、アルミニウムでは価格変動の大きさに比して取引本証拠金基準額の変更が適正に行なわれていたとは言いがたい結果が得られている。一方で、商品取引員は以下のことを考慮しなければならない。追証の発生時に取引参加者が追証を預託しない場合の建玉の清算処理についてである。商品取引員は、取引参加者からの追証が預託されない場合には翌日の場中に取引参加者の建玉を清算しなければならない。このとき、価格の変動状況によっては、元々積み立てられていた取引本証拠金を上回る損失が起こる場合がある。本稿では、この損失が起こるリスクをデフォルトリスクと定義し、取引参加者が追証を預託する／しないに確率モデルを導入し、商品取引員が想定すべきデフォルトリスクを損失金額として算出する手法を提案している。なお、商品取引員が考慮すべき損失を研究した先行研究例は見当たらない。

我々は、価格変動のモデル化と価格変動リスクの算出、レバレッジを考慮した追証の発生確率の算出、商品取引員と取引参加者間における追証の発生と預託される確率を考慮したデフォルトリスクの算出を通じて、商品先物取引市場全体のモデル化を行なっている。それとともに、それぞれのリスク算出を実現するシミュレーションプログラムを構築し、構造を明らかにすることで、商品先物市場に対する理解を広めることを目的としている。

本稿の構成は以下のとおりである。節 2 では、東京工業品取引所にて公開されている商品先物の日次価格ヒストリカルデータの分析を通じ、価格変動のモデル化を行なっている。節 3 では、商品先物価格の特徴である高いレバレッジを考慮した証拠金取引の定式化を通じ、追証が発生するリスクの計測法、取引本証拠金基準額の定量的な算出法を提案している。さらに、取引参加者のデフォルトリスクを考慮した、商品取引員が考慮すべき期待損失額の計測法を提案している。節 4 では、実際の商品価格データを用いて、我々が提案するアルゴリズムに基づく商品取引市場のシミュレーションを行なっている。価格変動のシミュレーションに加え、追証が発生する確率、取引参加者がデフォルトを起こす確率も合わせて算出し、商品取引員が抱えるデフォルトリスクの算出を行なっている。

2 価格変動のモデル化と市場リスク

2.1 価格ヒストリカルデータの分析

東京工業品取引所が扱う以下の先物商品を対象とする：金，銀，白金，パラジウム，アルミニウム，ガソリン，灯油，原油，ゴムの9種類。このうち，2008年中に限月を迎える先物商品の日次価格のヒストリカルデータの分析をもとに価格のモデル化を行なう。具体的には，金，銀，白金，パラジウム，アルミニウムでは2008年2月限限，2008年4月限限，2008年6月限，2008年8月限，2008年10月限，2008年12月限，以上6種類。一方，ガソリン，灯油，原油，ゴムでは，2008年1月限，2008年2月限，2008年3月限，2008年4月限，2008年5月限，2008年6月限，2008年7月限，2008年8月限，2008年9月限，2008年10月限，2008年11月限，2008年12月限，以上12種類の系列を分析対象とする。なお，我々は日次の価格として日々の終値ではなく，帳入値段を採用している。終値を採用した場合，全く約定されない（出来がない）日にデータが欠落する可能性があるが，帳入値段は当日の最終約定値段である終値または約定されない場合には取引所が提示した最終基準値段が記入されるために，データの欠落がなく継続的に日次の価格を示したものと判断している。また，帳入値段は値洗いの基準としても用いられているデータである。

先行研究では収益率をベースとしているが，我々はその前提を置かない。そのため，我々は価格のデータを皮切りに探索的なデータ分析を行なう。はじめに，それぞれの商品の帳入値段データに対して単位根検定を行なう。単位根の存在が認められる場合には，対象系列が非定常であることが認められ，モデル化の議論を展開し難い。単位根検定については，Philips-Perron 検定を用いた。用いる仮説は以下の通りである。

- 帰無仮説： 対象系列が単位根を持つ
- 対立仮説： 対象系列は単位根を持たない

検定結果は以下の2つの表にまとめた。表1では，各々の限月の取引期間が同一である商品をまとめ，表2ではその他の商品をまとめている。

表 1: 先物商品 (貴金属・アルミニウム) 日次の単位根検定における P 値

限月	金		銀		白金		パラジウム		アルミニウム	
	価格	前日差	価格	前日差	価格	前日差	価格	前日差	価格	前日差
2008/02	0.275	0.01	0.534	0.01	0.99	0.01	0.99	0.01	0.837	0.01
2008/04	0.401	0.01	0.380	0.01	0.621	0.01	0.529	0.01	0.883	0.01
2008/06	0.502	0.01	0.403	0.01	0.412	0.01	0.431	0.01	0.736	0.01
2008/08	0.406	0.01	0.876	0.01	0.989	0.01	0.960	0.01	0.523	0.01
2008/10	0.936	0.01	0.99	0.01	0.99	0.01	0.981	0.01	0.99	0.01
2008/12	0.304	0.01	0.468	0.01	0.682	0.01	0.5954	0.01	0.99	0.01

各限月の取引期間以下の通り限月 2008/02 は 2007/02/26 から 2008/02/26 まで，限月 2008/04 は 2007/04/25 から 2008/04/24 まで，限月 2008/06 は 2007/06/27 から 2008/06/25 まで，限月 2008/08 は 2007/08/29 から 2008/08/26 まで，限月 2008/10 は 2007/10/29 から 2008/10/28 まで，限月 2008/12 は 2007/12/19 から 2008/12/18 まで。

表 2: 先物商品 (その他) 日次価格の単位根検定における P 値

限月	ガソリン		灯油		原油		ゴム	
	価格	前日差	価格	前日差	価格	前日差	価格	前日差
2008/01	0.729	0.01	0.764	0.01	0.569	0.01	0.543	0.01
2008/02	0.524	0.01	0.731	0.01	0.436	0.01	0.467	0.01
2008/03	0.481	0.01	0.649	0.01	0.201	0.01	0.633	0.01
2008/04	0.317	0.01	0.352	0.01	0.359	0.01	0.400	0.01
2008/05	0.446	0.01	0.848	0.01	0.758	0.01	0.796	0.01
2008/06	0.650	0.01	0.99	0.01	0.206	0.01	0.722	0.01
2008/07	0.228	0.01	0.423	0.01	0.628	0.01	0.641	0.01
2008/08	0.606	0.01	0.830	0.01	0.979	0.01	0.385	0.01
2008/09	0.879	0.01	0.970	0.01	0.889	0.01	0.583	0.01
2008/10	0.857	0.01	0.887	0.01	0.351	0.01	0.99	0.01
2008/11	0.947	0.01	0.781	0.01	0.150	0.01	0.960	0.01
2008/12	0.563	0.01	0.503	0.01	0.563	0.01	0.619	0.01

各商品におけるそれぞれの限月の取引期間は異なる

単位根検定の結果から、商品先物の日次の価格では、全ての商品、全ての限月において、帰無仮説を棄却できず、単位根の存在を否定できない。先行研究においても、商品先物の価格そのものを分析に採用しているものは皆無であった。引き続き、価格の前日差（前営業日との差）についても単位根検定を行なった。こちらは全ての商品、全ての限月において、帰無仮説が棄却された。すなわち、価格の前日差のデータには単位根がないとみなせる。先行研究では、商品先物価格の収益率をもとに分析が行なわれているが、我々はデータの性質に沿った定量的、かつ簡素なモデル化を目指しているため、価格の前日差についての分析をすすめる。

我々は、それぞれの価格の前日差に対して、自己回帰モデルのあてはめを行なった。なお、自己回帰モデルの次数は、AIC（赤池情報量基準）をもとに選択した。結果は、表3にまとめている。

表 3: 商品先物の価格前日差の自己回帰性

限月	金	銀	白金	パラジウム	アルミニウム	ガソリン	灯油	原油	ゴム
2008/01	-	-	-	-	-	3	0	2	3
2008/02	2	2	5	3	0	0	0	2	0
2008/03	-	-	-	-	-	5	2	2	0
2008/04	1	5	3	2	1	3	2	2	0
2008/05	-	-	-	-	-	2	2	1	0
2008/06	1	2	2	2	1	1	0	0	0
2008/07	-	-	-	-	-	0	0	0	0
2008/08	1	1	3	4	1	0	0	0	0
2008/09	-	-	-	-	-	0	2	2	0
2008/10	2	2	2	2	5	0	2	2	2
2008/11	-	-	-	-	-	0	2	0	2
2008/12	0	0	3	2	0	0	0	3	0

AIC 基準にて AR 次数を選択

貴金属商品、アルミニウムではほとんどの限月において自己回帰性が存在している。一方、ゴムではほとんど自己回帰性が見られない。価格前日差が自己回帰性を持つという性質が、商品先物価格の特徴と言及できるかどうかを検証するために、我々は株式市場についても同様の分析を行なった。貴金属商品、アルミニウムの限月の取引期間に対応する、株式市場の TOPIX 指数値、日経平均株価の日次終値を対象に、価格水準の単位根検定、価格前日差の単位根検定、価格前日差に対する自己回帰モデルのあてはめをそれぞれ行なった。

表 4: 日次株価指数の単位根検定の P 値と前日差の自己相関構造

対応限月			TOPIX			日経平均株価		
	自	至	指数値	前日差	次数	終値	前日差	次数
2008/02	2007/02/26	2008/02/26	0.368	0.01	0	0.511	0.01	0
2008/04	2007/04/25	2008/04/24	0.083	0.01	0	0.198	0.01	0
2008/06	2007/06/27	2008/06/25	0.558	0.01	0	0.610	0.01	0
2008/08	2007/08/29	2008/08/26	0.478	0.01	0	0.558	0.01	0
2008/10	2007/12/19	2008/10/28	0.952	0.01	0	0.979	0.01	0
2008/12	2007/12/19	2008/12/18	0.741	0.01	0	0.738	0.01	0

対応限月は貴金属・アルミニウムの限月に対応しており、それぞれの取引開始/終了日を自/至に記している

表4にある通り、限月 2008/02 に対応する期間（2007 年 4 月 25 日から 2008 年 4 月 24 日）にお

いて、帰無仮説の棄却に判断が必要であるものの、おおむね価格水準は単位根を有しており、商品先物価格と同様の性質を示している。前日差については、全ての期間において帰無仮説が棄却され、単位根の存在が否定された。同様に、各々の前日差に単位根が存在しないことが確認された。しかしながら、価格の前日差には自己回帰構造が存在しないことが確認された。以上より、我々は価格の前日差が自己回帰構造を有することは商品先物価格の特徴であると考える。

2.2 制限値段幅の導入と価格変動のモデル化

先物商品においては、対象商品の受給事情の変化や急激な先行き見通しの修正などの不確定的な事象により、相場が急激に変動することを防ぐため、1日における値動きについて、前日価格に対し一定金額を加減した制限値段が定められている。このため、対象商品の価値が高騰しているとしても、同日の帳入値段の記録には、制限値段を越えた部分の価値が反映されない。すなわち、帳入値段には対象商品の価値の情報が損失されていることが想定され、対象商品の価値は観測できない場合が存在する。我々は、この制限値段幅が与える影響を重視し、価格の変動モデルに導入をする。我々は、観測可能である帳入値段とは別に、対象商品の潜在的な価値を「真の価値」として定義する。

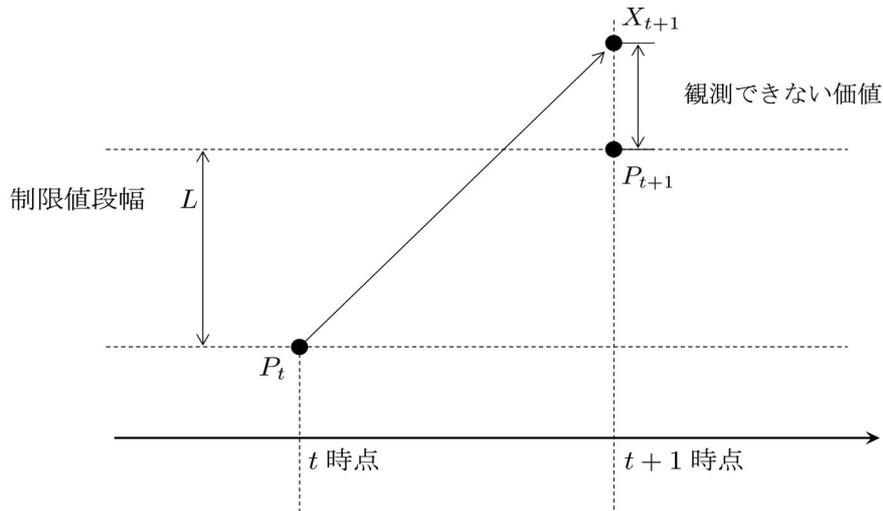


図 1: 真の価値 X_t と帳入値段 P_t の差

時点 t における「真の価値」を確率変数を X_t ，帳入値段を P_t ，制限値段幅を L とする。このとき t と $t+1$ の 2 時点間におけるそれぞれの関係は以下の通り表現できる。

$$P_{t+1} = \begin{cases} P_t + L & : X_{t+1} \geq P_t + L \\ X_{t+1} & : P_t - L < X_{t+1} < P_t + L \\ P_t - L & : X_{t+1} \leq P_t - L \end{cases} \quad (3)$$

値幅制限の存在のために、帳入値段 P_t そのものを確率変数で直接モデル化することは困難を伴う。すなわち、 t 時点における真の価値 X_t が $t-1$ 時点の帳入値段 P_{t-1} から値幅制限値 L を超えて変動した場合、 t 時点の帳入値段 P_t は P_{t-1} を基準とした値幅制限上下限の $P_{t-1} \pm L$ として定まり、 X_t の変動が値幅制限内に収まっている場合は、 P_t と X_t の値は一致するということである。現実観測データとして与えられるのは帳入値段 P_t であって、 X_t ではない。 P_t の前日差である 1 階差分

をとると, (3) から

$$P_t - P_{t-1} = \begin{cases} L & : X_t - P_{t-1} \geq L \\ X_t - P_{t-1} & : |X_t - P_{t-1}| < L \\ -L & : X_t - P_{t-1} \leq -L \end{cases}$$

が成り立つので,

$$|P_t - P_{t-1}| < L \Rightarrow P_t - P_{t-1} = X_t - P_{t-1} \Rightarrow X_t = P_t \quad (4)$$

$$|P_t - P_{t-1}| = L \Rightarrow |X_t - P_{t-1}| > L \Rightarrow X_t \neq P_t \quad (5)$$

となる. したがって, $|P_t - P_{t-1}|$ が L と等しいか小さいかの違いで, X_t が観測可能であったか否かが判断できる. $|P_t - P_{t-1}| < L$ ならば X_t は観測可能で, その値は P_t に等しい. $|P_t - P_{t-1}| = L$ ならば, X_t は観測不可能である (帳入値段 P_t から特定できない). 一方で X_t は一部観測不可能という負の側面を持つが, その変動に値幅制限という制約がないので, P_t よりも自由にモデルを設定できるという利点をもつ. 我々は ΔX_t に対して最も簡潔な時系列モデルである 1 次の自己回帰モデル AR(1) を仮定する. 系列によっては, より高い次数の自己回帰モデルも選択されていたが (表 3 を参照), AIC 基準からでは AR(1) モデルでもあてはまりが良いことが分かっている. 真の値の 1 階差分 ΔX_t を以下のようにモデル化する.

$$\Delta X_t = \phi \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

ここで, $\sigma > 0$, $|\phi| < 1$ は未知パラメータである. なお, $\phi = 0$ の場合にはランダムウォークモデルに帰着する.

2.3 価格変動の予測

真の値の 1 階差分 ΔX_t のモデル化をもとに, P_t の n 個の観測データ $\mathcal{P}_n := \{P_t\}_{t=1}^n$ が与えられたときの ΔX_t の条件付き分布関数

$$F_{t,n}(x) := P\{\Delta X_t \leq x | \mathcal{P}_n\}, \quad t > n,$$

を求めることができれば, 将来の価格変動は $F_{t,n}$ で推定できる.

式 (6) における未知パラメータ σ^2 と ϕ の推定量をそれぞれ $\widehat{\sigma}^2, \widehat{\phi}$ とし, さらに

$$\begin{aligned} t_0 &= \arg \max\{|P_t - P_{t-1}| < L, |P_{t-1} - P_{t-2}| < L : t = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \arg \max\{\Delta X_t = \Delta P_t : t = 1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (7)$$

とおく. このとき, t_0 より $\Delta T (\geq 1)$ 期先の予測 $\Delta X_{t_0+\Delta T}$ は, (6) より

$$\Delta X_{t_0+\Delta T} = \phi^{\Delta T} \Delta X_{t_0} + \sum_{j=1}^{\Delta T} \phi^{j-1} \varepsilon_{t_0+\Delta T-j+1}$$

なので, 約定値の観測データ $\mathcal{P}_n = \{P_t\}_{t=1}^n$ が与えられたときの将来の時刻 $t_0 + \Delta T$ における $\Delta X_{t_0+\Delta T}$ の条件付き確率分布 $F_{t_0+\Delta T, n}$ は, 近似的に正規分布

$$\Delta X_{t_0+\Delta T} | \mathcal{P}_n \sim N \left(\widehat{\phi}^{\Delta T} \Delta P_{t_0}, \widehat{\sigma}^2 \sum_{j=1}^{\Delta T} \widehat{\phi}^{2(j-1)} \right) \quad (8)$$

になる．したがって， t_0 時点から ΔT 期間の価格変動の確率分布は，

$$\begin{aligned} X_{t_0+\Delta T} - X_{t_0} &= \sum_{\tau=1}^{\Delta T} \Delta X_{t_0+\tau} \\ &= \sum_{\tau=1}^{\Delta T} \phi^\tau \Delta X_{t_0} + \sum_{\tau=1}^{\Delta T} \sum_{j=1}^{\tau} \phi^{j-1} \varepsilon_{t_0+\Delta T-j+1}, \end{aligned}$$

より，

$$X_{t_0+\Delta T} - X_{t_0} | \mathcal{P}_n \sim N \left(\Delta P_{t_0} \sum_{j=1}^{\Delta T} \hat{\phi}^j, \hat{\sigma}^2 \sum_{j=1}^{\Delta T} j \hat{\phi}^{2(j-1)} \right)$$

と求めることができる．また， $t_0 + \Delta T$ 期先における VaR $100 \times \alpha\%$ 点は， Φ^{-1} を標準正規分布関数の逆関数とすると，

$$\text{VaR}_{\alpha \times 100\%} = \Delta P_{t_0} \sum_{j=1}^{\Delta T} \hat{\phi}^j + \left(\hat{\sigma}^2 \sum_{j=1}^{\Delta T} j \hat{\phi}^{2(j-1)} \right)^{1/2} \Phi^{-1}(\alpha) \quad (9)$$

で与えられる．式 (9) の第 1 項より，損益分布は 0 を中心とした対称なものではなく，過去の情報によって中心がずれることが示唆され，価格の下落局面，上昇局面などの情報を記憶しているといえる．換言すれば，アノマリとして知られているモメンタム性，リバーサル性は第 1 項にて表現されていると言える．

なお，未知パラメータ σ^2 と ϕ の推定は，理論的には X_t の値によって行われる．しかし，すでに述べたように X_t は一部観測不可能なので，未知パラメータの推定に際しては観測不可能であった X_t の補間も同時に必要となる．(4) と (5) で示したように， X_t は $|P_t - P_{t-1}| < L$ のときに限って観測可能な回帰モデルであるので，トービットモデル（打ち切りのある回帰モデル）の一種である（Amemiya[1984] 参照）．トービットモデルのパラメータ推定問題は，マルコフ連鎖モンテカルロ法（略して MCMC）を利用するとうまく解決することができる（和合 [2005] 参照）．その詳細は，付録 1 にて説明を行う．

3 証拠金取引のモデル化と信用リスク

3.1 証拠金取引の仕組み

本節では証拠金取引のモデル化について議論を行なう．前節にて商品の価格変動をモデル化していたが，商品の価格 P_t は商品取引所の立会いで用いられている単位「呼値」での価格であり，実際の取引参加者が用いる取引単位「枚」での価格とは異なる．商品それぞれの取引単位と呼値の対応関係を表 5 にまとめている．

実際の取引参加者が資産の変動として考慮すべき対象は，価格変動 ΔP_t に倍率 η を乗じたものである．金の価格が 1 円変動した場合には，資産としては 1000 円の変動，白金の場合には 500 円の変動となる．

商品先物取引は，非常にレバレッジの高い金融商品であるがゆえに，証拠金取引が採用されている．商品先物取引を始める際に，取引参加者は商品取引員が定める取引本証拠金を納める必要がある．取引本証拠金は，商品取引所があらかじめ定めている取引本証拠金基準額をもとに，それぞれの商品取引員が定めている．商品取引員 i の定める取引本証拠金 K_i を，取引本証拠金基準額を K とした場合に，その差分である α_i :

$$\alpha_i := K_i - K \quad (10)$$

表 5: 商品ごとの取引単位

商品名	呼値	呼値単位 [円]	取引単位	倍率 η [倍]
金	1 g	1	1 kg	1000
銀	10 g	0.1	30 kg	3000
白金	1 g	1	500 g	500
パラジウム	1 g	1	500 g	500
アルミニウム	1 kg	0.1	5 t	5000
ガソリン	1 kl	10	50 kl	50
灯油	1 kl	10	50 kl	50
原油	1 kl	10	50 kl	50
ゴム	1 kg	0.1	5 t	5000

は，商品取引員が抱えるリスクを金額に換算した値と考えられる．

時点 t における帳入値段を P_t ，倍率を η とする．下記条件が満たされた場合に，追証が発生する．

$$\Delta P_t \leq -K / (2\eta)$$

表 6: 2008 年 12 月における取引本証拠金基準額と制限値段幅

商品名	取引本証拠金基準額 (K)[円]	制限値段幅 (L)[円]	最大変動幅 (ηL)[円]
金	135,000	150	150,000
銀	108,000	40	120,000
白金	150,000	300	150,000
パラジウム	60,000	80	40,000
アルミニウム	75,000	16	80,000
ガソリン	210,000	3,600	180,000
灯油	210,000	3,600	180,000
原油	210,000	3,600	180,000
ゴム	75,000	16	80,000

東京工業品取引所による発表資料から抜粋

金，銀，アルミニウム，ゴムでは値幅制限があるにもかかわらず，制度上では取引本証拠金基準額を上回る損失が起こる可能性があることが分かる． α_i は，商品取引員が取引本証拠金基準額では不足している分を算定した額と捉えることもできる．

いま， P_t の n 個の観測データ $\mathcal{P}_n := \{P_t\}_{t=1}^n$ が与えられたときの ΔP_t の条件付き分布関数

$$G_{t,n}(x) := P\{\Delta P_t \leq x | \mathcal{P}_n\}, \quad t > n,$$

が得られる．したがって，時点 t において追証が発生する確率は

$$G_{t,n}(-K / (2\eta)) = P\{\Delta P_t \leq -K / (2\eta) | \mathcal{P}_n\}$$

にて計測が可能である．

また，追証の発生を $a \times 100\%$ に抑えるために必要な取引本証拠準備金 $K_{a \times 100\%}$ は

$$K_{a \times 100\%} = -2\eta G_{t,n}^{-1}(a)$$

にて求めることができる。

価格前日差の条件付分布である $G_{t,n}$ は厳密には切断正規分布にて定式化される。しかし、前節の議論によって真の価値の前日差 ΔX_t の条件付分布関数 $F_{t,n}$ が正規分布として与えられている。そのため、我々の提案する方法は $G_{t,n}(x)$ を直接推定せずに、シミュレーションにて発生させた ΔX_t を元に (3) を通じて $F_{t,n}$ を推定する。

具体的な推定方法は以下の通り。(7) より、次の関係式を得る。

$$\Delta P_{t_0+1} = \begin{cases} -L & : \Delta X_{t_0+1} < -L \\ \Delta X_{t_0+1} & : |\Delta X_{t_0+1}| \leq L \\ L & : \Delta X_{t_0+1} > L \end{cases}$$

(8) を考慮すると、 $|\Delta X_{t_0+1}| < L$ である場合、

$$\Delta P_{t_0+1} | \mathcal{P}_n \sim N(\hat{\phi} \Delta P_{t_0}, \hat{\sigma}^2)$$

と記述できる。いま、表 6 より、追証が発生する条件である「各々の商品の制限値段幅と倍率の積 ηL が取引本証拠金基準額の半額 $K/2$ より大きい場合」は、 $|\Delta X_{t_0+1}| < L$ の下でも成立する。この事実から、追証が発生する確率は以下の式で推定することができる。

$$\Phi\left(\frac{-K/(2\eta) - \hat{\phi} \Delta P_{t_0}}{\hat{\sigma}}\right) \quad (11)$$

3.2 商品取引員のデフォルトリスク

追証が発生した場合、取引参加者は取引の継続を望む場合には追証を預託する。しかし、取引の継続を望まない場合には追証を入金せずに建玉の清算を行なう。委託先である商品取引員は翌日に当該取引者の建玉を清算する。このとき、清算時の損失額がそれまでに積み立てている取引本証拠金を超過した場合、商品取引員はその超過分を補填する責務を負う。商品取引員は、このデフォルトによるリスクを考慮せねばならない。我々は、図 2 に従ってデフォルトリスクをモデル化する。

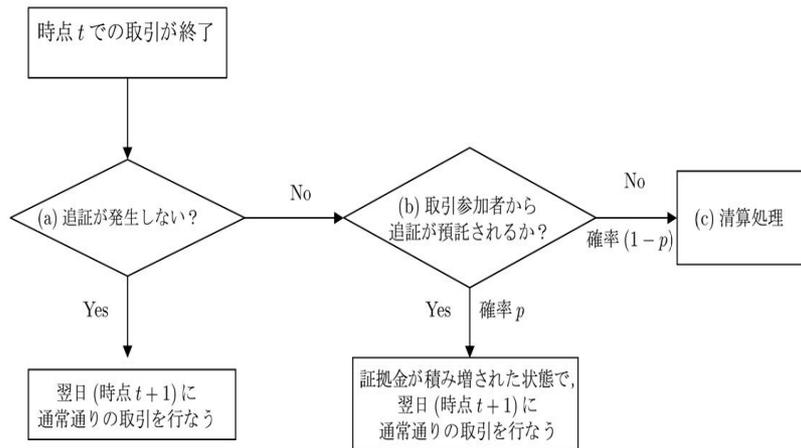


図 2: 値洗いにおけるフロー

時点 t において追証が発生する条件は、価格変動による損失 $\eta \Delta P_t$ が取引本証拠金 K の半額を上回った場合である。このとき、取引参加者は追証を預託するか否かの選択が迫られる。我々は、取引参加者が追証を預託する確率を p と置く。

追証が預託された場合には、取引本証拠金が積み増された状態で次の時点 $t+1$ での取引を考える。一方、追証が預託されなかった場合には、建玉の清算に入る。商品取引員は、時点 $t+1$ での価格で清算を行なう。このとき、累積損失額 $\eta(\Delta P_{t+1} + \Delta P_t)$ が取引本証拠金を上回った場合には商品取引員はその差額

$$K + \eta(\Delta P_{t+1} + \Delta P_t)$$

の分、補填せねばならない。この金額をデフォルト金額と呼ぶ。ただし、取引所では必ずしも取引ができるとは限らない。特に、更に価格が大きく変動した場合に注目する。時点 $t+1$ において、取引不可能な状態を $|\Delta P_{t+1}| = L$ のときを取引不可能とし、その場合には次の時点 $t+2$ での価格で建玉を清算させる。時点 $t+2$ の場合に取引不可能であればその次の時点 $t+3, \dots$, のように、取引可能となる時点での価格にて建玉を清算させる。

4 シミュレーション

4.1 価格変動の推定

マルコフ連鎖モンテカルロ法を実際プログラムとして実行するときは、反復計算の回数が多いので、効率的で速い乱数生成を行うことが重要になる。そこで、例えば切断正規分布にしたがう乱数生成では、Devroye[1986] や Geweke[1991] にもとづいて、一様乱数と正規分布関数の逆関数を利用した方法を使うことによって計算の効率化を図っている。

σ^2 の事前分布である逆ガンマ分布のパラメータ α_0, β_0 は、無情報の状況を考慮に入れて、事前分布の平均が存在しないパラメータの範囲にとり、 $\alpha_0 = 0.5, \beta_0 = 0.5$ とする。

なお、反復計算は 10 万回行ない、そのうち始めの 1 万回を捨て、残りの 9 万回を元に推定している。シミュレーションにて推定したパラメタの結果を表 7 にまとめた。

表 7: シミュレーション結果

商品名	パラメタ	対応限月における推定値					
		200802	200804	200806	200808	200810	200812
金	$\hat{\phi}$	-0.081	-0.122	-0.116	-0.160	-0.091	-0.061
	$\hat{\sigma}$	36.134	38.981	40.406	43.397	56.901	60.530
銀	$\hat{\phi}$	-0.080	-0.153	-0.167	-0.122	-0.067	-0.104
	$\hat{\sigma}$	8.949	11.918	11.538	13.427	14.222	15.044
白金	$\hat{\phi}$	-0.083	0.063	0.086	0.023	0.103	-0.018
	$\hat{\sigma}$	74.745	96.448	107.261	127.872	139.970	145.383
パラジウム	$\hat{\phi}$	-0.019	-0.113	0.057	0.087	0.072	0.071
	$\hat{\sigma}$	24.158	32.735	31.818	32.563	35.786	38.037
アルミニウム	$\hat{\phi}$	-0.080	-0.087	-0.168	-0.141	-0.080	0.024
	$\hat{\sigma}$	3.800	4.383	4.663	5.099	5.572	25.573

対象となる系列が収益率ではなく価格差であるために、商品ごとにその水準が異なっている。そのため、推定値を商品間にて単純に比較することは意味をなさない。全体的な傾向としては、 $\hat{\sigma}$ の推移

から 2008 年後半の金融危機を受けて商品先物市場でも値動きが激しくなっていたことが分かる。金，銀，白金で 2 倍近く，アルミニウムでは 7 倍近くの増加が分かる。一方，自己回帰係数の推定値に着目する。アルミニウムでは対象となる殆どどの期間で，金，銀では全ての期間で自己回帰係数 ϕ が全て負である。このことから，当該期間では前日の値動きに反発して値が動いたと推測され，いわゆる逆張り投資戦略の傾向が表れていたことが示唆される。

4.2 追証発生確率の推定

前節で推定されたパラメタと (11) の関係式を用いて，各々の商品における追証が発生する確率を推定する。ここで，取引本証拠金基準額については，2007 年 2 月から 2008 年 10 月までの間に採用された基準額を列挙している（詳細は表 9 を参照）。2008 年 10 月までの取引本証拠金基準額を採用した経緯は，2008 年 11 月，2008 年 12 月の間は，2008 年 12 月限の商品は期近扱いとなり，取引提示増証拠金に加算されることに加え制限値段幅が撤廃され，通常の扱いと異なるためである。

各々の商品，限月から推定したパラメタをもとに，追証が発生する確率を表 8 に示した。

表 8: シミュレーション結果

商品名	取引本証拠金基準額	対応限月における追証発生確率 (%)					
		200802	200804	200806	200808	200810	200812
金	135000	3.12	4.21	4.80	6.07	11.68	13.19
	120000	4.89	6.24	6.96	8.44	14.48	16.02
	105000	7.38	8.98	9.80	11.44	17.69	19.23
	90000	10.74	12.51	13.40	15.14	21.31	22.79
銀	108000	2.23	6.58	6.00	9.02	10.19	11.46
	99000	3.28	8.35	7.71	10.98	12.20	13.51
	81000	6.60	12.92	12.20	15.76	17.00	18.32
白金	150000	2.30	5.94	8.00	12.03	14.39	15.08
	100000	9.25	14.88	17.39	21.70	24.02	24.53
	90000	11.67	17.42	19.89	24.07	26.30	26.75
	75000	16.08	21.70	24.01	27.87	29.91	30.25
パラジウム	60000	0.65	3.34	2.96	3.29	4.75	5.81
	45000	3.13	8.47	7.85	8.38	10.56	11.97
	30000	10.74	17.98	17.26	17.90	20.30	21.70
アルミニウム	75000	2.41	4.36	5.41	7.07	8.80	38.49
	60000	5.70	8.56	9.95	11.98	13.92	40.75

なお，(11) における価格の前日差については ΔP_t の平均値を採用して算出している。

結果より，金では対象期間において追証発生の確率を 7% から 13% 台にて推移するように取引本証拠金基準額を設定させていたことが分かる。同様に，銀は 9% を中心に 3% 程度，白金は 15% を中心に 3% 程度の幅に収まるぐらいに安定した設定がなされていたことが分かる。パラジウムでは 3% から 6% 程度と非常に低い水準で抑えられているが，アルミニウムでは，5% 台から 38% を超える範囲で推移しており，基準額設定が市場での価格変動を捉えていたのにかに疑問が残る。また，商品ごとに追証が発生する確率が非常にばらついていることが鮮明に示されている。

表 9: 取引証拠金基準額の推移

日付	金		銀		白金		パラジウム		アルミニウム	
	K	L	K	L	K	L	K	L	K	L
2007年2月	90000	60	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年3月	90000	60	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年4月	120000	80	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年5月	90000	60	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年6月	90000	60	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年7月	90000	120	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年8月	90000	120	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年9月	90000	120	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年10月	90000	120	81000	18.0	75000	100	45000	60	60000	8.0
2007年11月	90000	120	81000	18.0	90000	120	45000	60	60000	8.0
2007年12月	120000	120	108000	24.0	90000	120	45000	60	75000	10.0
2008年1月	105000	120	99000	22.0	90000	120	30000	40	60000	8.0
2008年2月	120000	150	108000	40.0	100000	300	30000	100	60000	16.0
2008年3月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	60000	16.0
2008年4月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	75000	16.0
2008年5月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	75000	16.0
2008年6月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	75000	16.0
2008年7月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	75000	16.0
2008年8月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	75000	16.0
2008年9月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	75000	16.0
2008年10月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	100	75000	16.0
2008年11月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	80	75000	16.0
2008年12月	135000	150	108000	40.0	150000	300	60000	80	75000	16.0

4.3 デフォルト発生確率と損失額の推定

前節までに推定されたパラメタを用いて、商品取引員が考慮すべきデフォルト発生確率と損失額を推定する。なお、使用したパラメタは、金、銀、白金、パラジウム、アルミニウムの5商品すべて、2008年12月限の系列を下に推定したパラメタを用い、取引参加者が追証を預託する確率ごとに算出した。結果は表10にまとめている。それぞれの系列について、取引期間を20日とし、10万回のシミュレーションを行なった。発生確率は、10万回のシミュレーション中にデフォルトが発生した回数割合を示し、平均損失額は個々のデフォルトにおける損失額の平均値である。どの商品についても、計上される損失額の平均は追証が預託される確率に関係はない。デフォルトが最も発生しやすい商品はアルミニウムであり、他の商品と比べて非常に発生しやすいことが分かった。特に損失額の平均が取引本証拠金基準額75,000円に相当する額に上っている。金、白金は発生確率としてはアルミニウムのおおよそ半分であり、平均損失額は双方ともに取引本証拠金基準額の3分の1程度である。ついで銀が発生確率が金に比べてやや低く、平均損失額は取引本証拠金の4分の1程度に抑えられている。今回、最もデフォルトが発生しにくい商品はパラジウムであり発生確率はアルミニウムの3分の1弱であり、平均損失額も取引本証拠金基準額の5分の1と低いものであった。追証が預託される確率によるデフォルトの発生確率の推移を図3に示している。いずれの商品についてもデフォルト

表 10: 追証が預託される確率ごとのデフォルト発生確率とデフォルト時の平均損失額

追証預託 確率	金		銀		白金	
	発生確率 [%]	平均損失額 [円]	発生確率 [%]	平均損失額 [円]	発生確率 [%]	平均損失額 [円]
0	19.34	41497.17	15.99	29775.31	22.40	50747.46
0.1	18.38	41353.92	15.16	29268.10	21.52	50666.18
0.2	17.48	41587.94	14.35	28799.84	20.37	50380.14
0.3	16.51	41688.75	13.46	29382.21	19.45	51138.54
0.4	15.09	41391.73	12.40	29517.70	17.86	50846.80
0.5	13.53	41705.65	10.93	29348.02	16.16	49794.45
0.6	11.70	40663.48	9.57	28859.86	13.92	50213.51
0.7	9.47	40744.53	7.51	29325.09	11.44	51140.02
0.8	6.86	41309.21	5.52	28662.66	8.51	50431.68
0.9	3.71	40730.24	3.04	29877.38	4.61	48676.98

追証預託確率	パラジウム		アルミニウム	
	発生確率 [%]	平均損失額 [円]	発生確率 [%]	平均損失額 [円]
0	13.09	12980.05	40.15	75108.33
0.1	12.49	12711.43	39.04	74410.70
0.2	11.76	12620.67	37.67	74169.89
0.3	10.90	12813.36	36.33	73452.57
0.4	9.98	12763.59	33.97	73167.59
0.5	8.81	12737.31	32.15	72585.03
0.6	7.63	12640.03	28.89	72712.83
0.7	6.12	12734.11	24.73	73122.12
0.8	4.31	12515.19	19.27	71854.64
0.9	2.37	12292.11	11.11	70761.72

の発生確率は追証が預託される確率に大きく依存している。

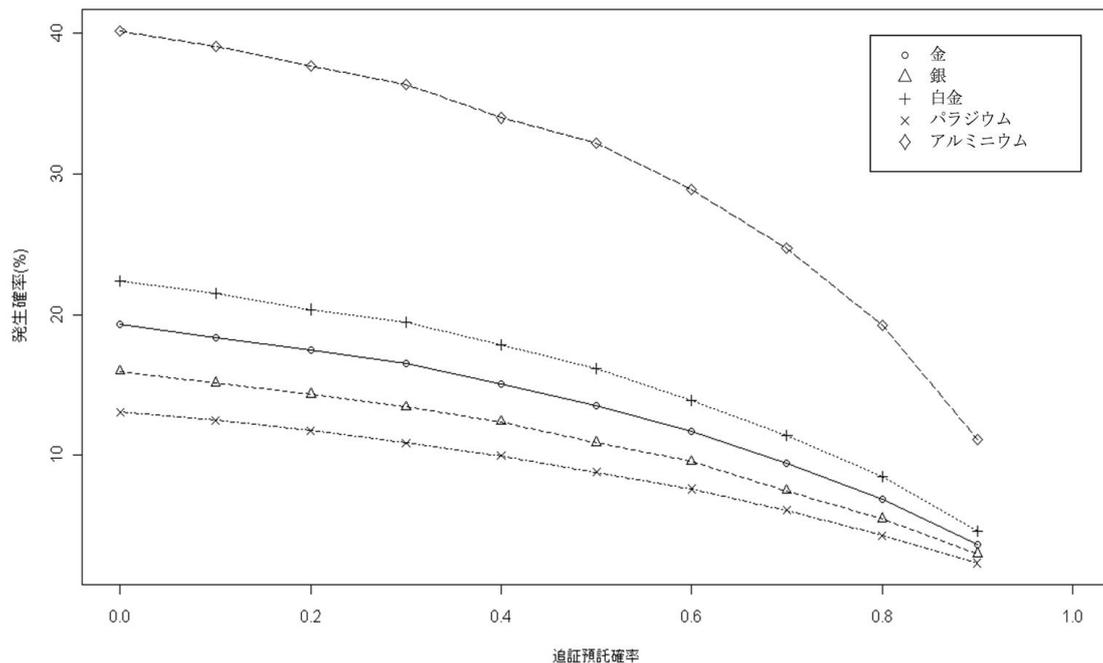


図 3: 追証が預託される確率とデフォルトの発生確率

図 3 から、アルミニウムにおけるデフォルトの発生確率が突出していることが読み取れる。追証が預託される確率が 0 から 0.5 まではなだらかな減少傾向を示しているが、0.5 以降では下落の勾配が急になっている。金、銀、白金、パラジウムはデフォルト発生確率は、その水準に差が見られるものの、追証が預託される確率が大きくなるにつれて同じような下落傾向を示している。

追証が預託される確率が大きくなると、デフォルトの発生する確率が下落する傾向が示されている一方で、デフォルト時の平均損失金額は追証が預託される確率に関係なく、ほぼ一定であることが示された。

5 結論

商品先物市場の価格変動、証拠金取引における追証発生モデル化を行なった。従来までの商品先物価格の議論では収益率をベースにしていたが、この場合には商品先物価格の特徴である値幅制限の仕組みを考慮することが困難となる。我々は、従来の議論とは異なり価格の前日差をベースに価格変動のモデル化を行った。また、値幅制限によって生じる帳入値段と商品の本質的な価値との差を重要視し、真の価値として定義し、帳入値段は真の価値の観測値として捉えた。ヒストリカルデータの分析により、商品先物のうち貴金属・アルミニウムでは、同時期の株式指数とは異なり、自己回帰性を有することが特徴であることが分かり、価格変動のモデル化に導入した。

商品先物取引の特徴として、高いレバレッジ性に着目し、各々の商品に定められている倍率と価格の変動を考慮した証拠金取引のモデルを構築した。価格変動モデルにおけるパラメタを通じて、追証の発生確率を定式化し、シミュレーションを行った。個々の商品では金・銀・白金・パラジウムでは対象期間を通じて追証が発生する確率を抑えるように取引本証拠金基準額が設定されていたが、ア

ルミニウムでは価格変動の変化に対応しきれていない点が明らかとなった。一方、各々の商品間では、追証が発生する確率が非常にばらついていることが示された。

他方、商品取引員が考慮すべきデフォルトリスクに関するモデルも提案した。取引参加者が追証を預託するか否かについて確率構造をあてはめ、デフォルトが発生する確率、発生時における平均損失金額をあわせて算出した。デフォルトが発生する確率は、商品ごとに水準が異なるものの、追証が預託される確率が大きくなるにつれて、総じて減少する傾向が示された。アルミニウムにおけるデフォルト発生確率は他の商品に比べ非常に高い。デフォルトの発生確率は、追証が預託される確率が0から0.5までではなだらかな減少を示しているが、0.5を超えてからは急激に減少していた。他方、金、銀、白金、パラジウムにおけるデフォルト発生確率はそれぞれに水準の差が見られるものの、追証が預託される確率の増加に伴って、4商品ともになだらかな減少を示していた。なお、デフォルトの発生確率は追証が預託される確率の増加に関係が深かったが、一方で、デフォルト時における平均損失金額は追証が預託される確率との間に顕著な関係は観測できなかった。損失の金額としては、アルミニウムがもっとも高く、取引本証拠金基準額を上回っていた。金、白金は取引本証拠金基準額のおおよそ3分の1程度であり、銀は4分の1、パラジウムは5分の1程度に抑えられていた。

本稿では、帳入値段に変わり観測不可能である商品の真の価値を定義することにより、その価格変動に対してAR(1)というモデルを当てはめた。一方でその残差に関しては非常に単純なモデルを当てはめた。今後は残差の傾向についても調査を行い、さらに適切なモデル化を進めたい。また、各々の商品における取引本証拠金基準額は取引所が適切な基準額を設定しているものの、その設定方法は明示的な形での公開がなされていない。価格変動の更なるモデル化とともに、取引本証拠金基準額の定量的で透明性の高い設定手法に関しても今後の研究課題としたい。

付録

1. マルコフ連鎖モンテカルロ法のアルゴリズム

マルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)はベイズ推定にもとづくアルゴリズムなので、AR(1)モデル(6)における σ^2 と ϕ のベイズ推定について述べておく。(6)を仮定するとき、 $\sigma^2, \phi, \Delta X_1$ が与えられたときの $\Delta X = (\Delta X_2, \Delta X_3, \dots, \Delta X_n)$ の同時確率密度関数は、

$$\begin{aligned} f(\Delta x | \Delta x_1, \sigma^2, \phi) &= \prod_{t=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\Delta x_t - \phi\Delta x_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (\Delta x_t - \phi\Delta x_{t-1})^2\right\} \end{aligned}$$

となる。いま、 σ^2 の事前分布として、 $\alpha_0 > 0$ を形の母数、 $\beta_0 > 0$ を尺度母数とする逆ガンマ分布 $\sigma^2 \sim \text{IG}(\alpha_0, \beta_0)$ を選ぶ。その確率密度関数は、

$$\xi(\sigma^2) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} (\sigma^2)^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sigma^2}\right)$$

である。このとき、 $\Delta X = \Delta x$ と Δx_1 、 ϕ が与えられたときの σ^2 の事後分布は、

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2 | \Delta x, \Delta x_1, \phi) &\propto (\sigma^2)^{-(\alpha_0+n/2+1)} \exp\left[-\left\{\beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n (\Delta x_t - \phi\Delta x_{t-1})^2\right\} \frac{1}{\sigma^2}\right] \\ &=: (\sigma^2)^{-(\alpha_1+1)} \exp\left(-\frac{\beta_1}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

となる。つまり,

$$\sigma^2 | (\Delta x, \Delta x_1, \phi) \sim \text{IG}(\alpha_1, \beta_1), \quad \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{n}{2}, \quad \beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n (\Delta x_t - \phi \Delta x_{t-1})^2$$

である。

一方, ϕ の事前分布として $(-1, 1)$ 上の一様分布 $U(-1, 1)$ を仮定すると, $\Delta X = \Delta x$ と $\Delta x_1, \sigma^2$ が与えられたときの ϕ の事後分布は,

$$\begin{aligned} \pi(\phi | \Delta x, \Delta x_1, \sigma^2) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (\Delta x_t - \phi \Delta x_{t-1})^2 \right\} I_{(-1,1)}(\phi) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{(\phi - \mu_\phi)^2}{2\sigma_\phi^2} \right\} I_{(-1,1)}(\phi), \\ \mu_\phi &= \frac{\sum_{t=2}^n \Delta x_t \Delta x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \Delta x_{t-1}^2}, \quad \sigma_\phi^2 = \sigma^2 \left/ \sum_{t=2}^n \Delta x_{t-1}^2 \right., \end{aligned}$$

となる。すなわち, 条件付き事後分布 $\phi | (\Delta x, \Delta x_1, \sigma^2)$ は, $(-1, 1)$ 上の切断正規分布

$$\phi | (x, x_0, \sigma^2) \sim \text{TN}_{(-1,1)}(\mu_\phi, \sigma_\phi^2)$$

である。

以上のパラメータ推定に関する条件付き事後分布と, すでに述べた事実

- $|P_t - P_{t-1}| < L$, かつ, $|P_{t-1} - P_{t-2}| < L \Rightarrow \Delta X_t = \Delta P_t \Rightarrow \Delta X_t$ は観測可能
- $|P_t - P_{t-1}| = L$, または, $|P_{t-1} - P_{t-2}| = L \Rightarrow \Delta X_t \neq \Delta P_t \Rightarrow \Delta X_t$ は観測不可能

を組み合わせると, 次の MCMC アルゴリズムを得る。

アルゴリズム

1. 次のものは, あらかじめ与えられているとする。

- 約定値の観測値 P_0, P_1, \dots, P_n
- σ^2 の事前分布 $\text{IG}(\alpha_0, \beta_0)$ のパラメータ $\alpha_0, \beta_0 > 0$

2. $\phi(0), \sigma^2(0)$ を決める。

3. $i = 1, 2, \dots$ に対して, 次を繰り返す。

(a) 次の要領で, データ拡大 (補間) を行う。

$$|P_t - P_{t-1}| = |P_{t-1} - P_{t-2}| = \dots = |P_{t-m+1} - P_{t-m}| = L, \quad |P_{t-m} - P_{t-m-1}| < L, \quad \exists m \in \{1, 2, \dots, t-1\}$$

または

$$|P_t - P_{t-1}| = \dots = |P_1 - P_0| = L$$

であるような

$$k = t, t-1, \dots, t-m+1, \quad \exists m \in \{1, 2, \dots, t\},$$

について,

- $P_k - P_{k-1} = L$ ならば ,

$$\begin{cases} \Delta X_{t-m+1}(i) \sim TN_{(L,\infty)}(\phi(i-1)\Delta P_{t-m}, \sigma^2(i-1)) \\ \Delta X_k(i) \sim TN_{(L,\infty)}(\phi(i-1)\Delta X_{k-1}(i), \sigma^2(i-1)) \quad (k = t-m+2, \dots, t-1, t) \end{cases}$$

として $\{\Delta X_k(i)\}_{k=t-m+1}^t$ を発生させる .

- $P_k - P_{k-1} = -L$ ならば ,

$$\begin{cases} \Delta X_{t-m+1}(i) \sim TN_{(-\infty,-L)}(\phi(i-1)\Delta P_{t-m}, \sigma^2(i-1)) \\ \Delta X_k(i) \sim TN_{(-\infty,-L)}(\phi(i-1)\Delta X_{k-1}(i), \sigma^2(i-1)) \quad (k = t-m+2, \dots, t-1, t) \end{cases}$$

として $\{\Delta X_k(i)\}_{k=t-m+1}^t$ を発生させる .

そして , $\Delta Y_1(i) \equiv \Delta P_1$,

$$\Delta Y_t(i) = \begin{cases} \Delta P_t & : |P_t - P_{t-1}| < L \\ \Delta X_t(i) & : |P_t - P_{t-1}| = L \end{cases}, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

$\Delta Y(i) = (\Delta Y_1(i), Y_2(i), \dots, \Delta Y_n(i))$ とおく .

- (b) $\Delta Y(i) = \Delta y(i)$ のとき , 次の要領で $\sigma^2(i)$ を発生させる .

$$\sigma^2(i) | (\Delta y(i), \phi(i-1)) \sim \text{IG}(\alpha_1, \beta_1),$$

ただし ,

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{n}{2}, \quad \beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \{\Delta y_t(i) - \phi(i-1)\Delta y_{t-1}(i)\}^2$$

- (c) $Y(i) = y(i)$ のとき , 次の要領で $\phi(i)$ を発生させる .

$$\phi(i) | (\Delta y(i), \sigma^2(i)) \sim TN_{(-1,1)}(\mu_\phi, \sigma_\phi^2),$$

ただし ,

$$\mu_\phi = \frac{\sum_{t=2}^n \Delta y_t(i)\Delta y_{t-1}(i)}{\sum_{t=2}^n y_{t-1}(i)^2}, \quad \sigma_\phi^2 = \sigma^2(i) \left/ \sum_{t=2}^{n-1} \Delta y_{t-1}(i)^2 \right.$$

4. 十分大きな N に対して , $(\sigma^2(i), \phi(i))$, $i = N, N+1, \dots$ を保存する .

以上のアルゴリズムによって $\{\sigma^2(i)\}_{i=N}^{N+M-1}$ と $\{\phi(i)\}_{i=N}^{N+M-1}$ が得られたら ,

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=N}^{N+M-1} \sigma^2(i), \quad \widehat{\phi} = \frac{1}{M} \sum_{i=N}^{N+M-1} \phi(i)$$

として σ^2 と ϕ を推定する . こうして得られた $\widehat{\sigma}^2$ と $\widehat{\phi}$ を (9) , (11) に代入すればよい .

2. 分布の変更

パラメータ ϕ の事前分布として , 平均 μ_0 , 分散 σ_0^2 の $(-1, 1)$ 上の切断正規分布

$$\phi \sim TN_{(-1,1)}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

を仮定すると， ϕ の条件付き事後分布は次のようになる．

$$\begin{aligned}\pi(\phi|x, x_0, \sigma^2) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\phi - \mu_0)^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\phi^2}(\phi - \mu_\phi)^2\right\} I_{(-1,1)}(\phi) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2 \sigma_\phi^2}{\sigma_0^2 + \sigma_\phi^2} \left(\phi - \frac{\sigma_0^2 \mu_\phi + \sigma_\phi^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma_\phi^2}\right)^2\right\} I_{(-1,1)}(\phi). \\ &=: \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\phi - \mu_1)^2\right\} I_{(-1,1)}(\phi).\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{\sigma_0^2 \mu_\phi + \sigma_\phi^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma_\phi^2}, \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma_0^2 + \sigma_\phi^2}{\sigma_0^2 \sigma_\phi^2}, \\ \mu_\phi &= \sum_{t=1}^n x_t x_{t-1} / \sum_{t=0}^{n-1} x_t^2, \quad \sigma_\phi^2 = \sigma^2 / \sum_{t=0}^{n-1} x_t^2.\end{aligned}$$

すなわち，条件付き事後分布 $\phi|(x, x_0, \sigma^2)$ は， $(-1, 1)$ 上の切断正規分布

$$\phi|(x, x_0, \sigma^2) \sim TN_{(-1,1)}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

である．

このとき，MCMC アルゴリズムの (3c) は，次の形に変更になる．

- $Y(i) = y(i)$ のとき，次の要領で $\phi(i)$ を発生させる．

$$\phi(i)|(y(i), \sigma^2(i)) \sim TN_{(-1,1)}(\mu_1, \sigma_1^2),$$

参考文献

- [1] Gray, G., 林文夫, K. Geert, R. [2006], 「商品先物：日本の投資家にとっての効用」『現代ファイナンス』19, 3-19.b
- [2] 羽森茂之, 羽森直子 [2000], 「商品先物市場における収益率の時系列特性：ボラティリティの日米比較」『先物取引研究』4(2), 38.
- [3] 高見茂雄 [2007], 「商品先物価格変動へのニューラルネットモデルの適用」『先物取引研究』10(1), 89.
- [4] 和合肇編著 [2005] 『ベイズ計量経済分析』東洋経済新報社．
- [5] 渡部敏明, 大鋸崇 [1996], 「日本の商品先物市場における価格のボラティリティと出来高および取引組高との関係」『先物取引研究』2(3), 41.
- [6] 渡部敏明, 大森裕浩 [2000], 「日本の商品先物市場における価格と出来高の変動：動学的 2 変量分布混合モデルによる分析」『先物取引研究』5(1), 52.
- [7] 日本商品先物取引協会 [2007], 「商品先物取引委託のガイド (第 15 版)」
- [8] 日本商品先物取引協会 [2007], 「商品先物取引委託のガイド別冊 (第 27 版)」

- [9] Amemiya, T.[1984], "Tobit models: a survey," *J. Econometrics* 24(1,2), 3-61.
- [10] Devroye, L. [1986], Non-uniform random variable generation, Springer-Verlag.
- [11] Geweke, J. [1991] "Efficient simulation from the multivariate normal and student-t distributions subject to linear constraints," in E.M. Keramidas (ed.), *Computing Science and Statistics: Proceedings of the 23rd Symposium on the Interface*, 571-578. Fairfax: Interface Foundation of North America, Inc.
- [12] Grundnitski, G. and Osburn, L. [1993], "Forecasting S&P and gold futures prices: Application of neural nwtworks," *J. Futures Markets* 13(6), 631-643.
- [13] Pierre, G. and Sébastien, L. [2003], "Market risk in commodity markets: a VaR approach," *Energy Economics* 25(5), 435-457.