[redacted]

アロー, フルビッツ, ウザワ

『線型および非線型計画に関する諸研究』

K. J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa, *Studies in Linear and Non-linear Programming.* Stanford, Stanford University Press, 1958, pp. 229.〔Stanford Mathematical Studies in Social Sciences II〕[1]

〔I〕 本書は表題に示された3者の研究を中心に，Chenery外4名の業績をも加えた論文集である。さて，線型計画(L, P.)が今や経済学にとって不可欠な道具となっていることは説明を要しないが，これに加えて近年発達しつつある非線型計画(Non-L. P.)が利用し得るようになれば経済学の発展のためによろこばしいことといわなければならない。本書がその中心課題としてNon-L. P.を正面よりとりあげた意図はこのような見地から高く評価さるべきであろう。

同著は，主部をなす3 partとそれを統括するCh. 1より構成されている。一般に，論文集共通の欠点として論文相互間の関係が不明確であることがあげられるが，Ch. 1はこれをカバーするために記されたものであり，この意図はある程度成功している。更に，同章では其後の章の理解に必要な若干の予備知識をも附しており，新研究者に便利な手引を提供している。

〔II〕 Part, II, Ch. 2—5, はL. P. およびNon-L. P. の数学的研究である。そのうち，Ch. 2を除けばすべての議論がKuhn-Tuckerの定理をめぐって展開されている。さて，$f(x)$, $g_i(x)$で，n次ベクトルxの汎函数を表わし，$g(x) \equiv [g_1(x) \cdots g_r(x)]$とすれば，Non-L. P. は問題

「$x \geqq 0$ $g(x) \geqq 0$ の条件の下で$f(x)$を最大にする」(1)

に帰着する。ここで，通常の条件最大問題にならって，

---

1) この書評は，2回にわたる戸島漲氏の私的コメントに多くを負っている。このうち，コメントによって特に本質的な修正又は追加がおこなわれた部分については＊印を附して，感謝の意を明らかにした。

ラグランジュ式を定義しよう。

$\varphi(x, y)=f(x)+yg(x) \quad y: r$ 次ベクトル　(2)

更に，ベクトル$(\bar{x}\ \bar{y})$が，「$x\geqq 0, y\geqq 0$ で φ の鞍点をなす」とは，このベクトルが

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y})=\min_{y\geqq 0}\max_{x\geqq 0}\varphi(xy)=\max_{x\geqq 0}\min_{y\geqq 0}\varphi(xy) \qquad (3)$$

を満すことである。この場合，$\bar{x}$ が命題(1)の最適解をなすことは容易に証明出来るから，もし逆の問題が証明出来れば，Non-L. P. にとって極めて有力な関係が得られるわけである。Kuhn-Tucker はこの定理を最初に証明し Slater が条件の一般化をおこなっている。すなわち，Slater によれば，(1)$f(x)$, $g(x)$ が $x\geqq 0$ で連続な凹函数，(2)$g(x^0)>0$ をみたす $x^0\geqq 0$ の存在を仮定して定理を証明している。Ch. 3 の Uzawa による論文では，(2)の条件を修正して，(2′)$g(x)$の一部に(a)$g_k(x)=0$ for all feasible x,(b)$g_k(x)$は x に関して線型，の条件をみたす $g_k(x)$ の存在を可能にしている。しかし，このためには(3′)feasible なベクトルの中に，$x_i>0$ を含むベクトル x^i が任意の i に対して存在する，という条件が追加されねばならず，実用面よりみて Slater の研究と併用さるべき性質のものといえよう。

Ch. 4 は，Hurwicz の「線型位相空間における計画」と題する長論文であり，Non-L. P. の位相的な研究として注目される。すなわち，同章の目的は，Non-L. P. の中心議題である Kuhn-Tucker の定理を，より一般的な線型位相空間において証明し，計画の論理構造を明らかにしようとすることにある。同章は，5 section よりなっている。I は問題提起と結果の要約，II は線型空間論に必要な数学的道具が整理されている。この準備の下で，III では Minkowski-Farkus の定理が線型位相空間に拡張され，IV では Locally Convex な線型位相空間における線型不等式の若干の問題がとりあげられている。V では，以上の基礎に立って Kuhn-Tucker の定理が，線型位相空間で微分可能性を仮定することなしに証明されている。Hurwicz-Uzawa の Ch. 5 は，Ch. 4 で仮定されている条件の一般に当てられている。

Ch. 4—5 の結果は，数学的に興味ある業績であるが，それが現段階では＊直ちに実用的計画と結びつかないところに問題がある。このことは，Part II で使用されている数字が初歩的解析学の範囲に止っているにもかかわらず，それが実用面と密着しているのと対称的であり，今後の研究に期待するところが大であるといえよう。

〔III〕 Part II の課題は，Part I 等で存在が証明された最適解を具体的に求める方法を研究することであり，Gradient Method がその中心をなす。さて$f(x)$, $g(x)$が特定の条件を満す場合，最適問題はラグランジュ式(2)の鞍点問題に帰着する。Gradient Method は，(x, y)空間において特定の点(x^0, y^0)より出発し，周囲の「地形」に着目しながら動点を移動させる操作によって鞍点を求めようとするものである。すなわち，t で時間を表わし，$x_i\ y_j$ で各々 $x\ y$ の $i\ j$ 要素を表わすことにすれば，Gradient Method は

$$dx_i/dt=\begin{cases}0 & \text{if } x_i=0\ \&\ \partial\varphi/\partial x_i<0\\ \partial\varphi/\partial x_i & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$dy_j/dt=\begin{cases}0 & \text{if } y_j=0\ \&\ \partial\varphi/\partial y_j<0\\ -\partial\varphi/\partial y_j & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (4)$$

で表現される。この場合，y_j を j 財の価格と考えれば，(4)式で表現される考え方は価格の動学的安定理論＊と密接な関係が見出される。

さて，Gradient Method を用いるに当って解決されなければならない問題は，(4)の解が鞍点に収斂することの証明である。Arrow-Hurwicz による Ch. 6 では，$x\geqq 0$ $y\geqq 0$ の制約下で鞍点の存在が仮定された場合，Gradient Method の出発点$(x^0\ y^0)$が鞍点 φ の充分小さな近傍にあり且 φ が若干の条件を満す時(4)が $x\ y$ の非負の条件の下で＊鞍点に収斂することが証明される。ここで，φ に課された仮定は，φ の解析性，2次微分行列式の負値性(より若干ゆるい)条件等であり，一応実用に耐えるものであるが，$(x^0\ y^0)$が鞍点の充分小さな近傍にあるという点はあまりに大きな制約である。Ch. 7 の Uzawa の論文は，この制約を除いて任意の$(x^0\ y^0)$より出発した場合における(4)の収斂性を検討している。この研究の要点は微分方程式(4)の右辺が連続であるような区間＊を連結することによって Ch. 6 の拡大を目ざしている。この連結法については，評者の理解し得ない要素を含んでいるので評価はさしひかえるが少なくとも Samuelson, Kose の先駆的研究よりは厳密な証明であると思われる＊。Arrow-Hurwicz による Ch. 8 は Ch. 7 の仮定に関する若干の一般化が中心である。すなわち，Ch. 7 では φ に「strict な凹性」が仮定されその応用範囲が限定されていた。Ch. 8 では，Ch. 7 の結果を利用し，"Limit-cycle" という概念を用いて Ch. 7 の仮定をゆるめ，新たに L. P. 等への応用を可能ならしめている。

Ch. 9 (Marschak), Ch. 10 (Uzawa) は上述の論文より更に実用的である。周知のごとく計数計算機によって微分方程式を解くことにはかなりの困難があり，Gradient Method の実測には大きな障害をなしている。この2章では，この難点を解決するために，Gradient Method を定差方程式化しようとする試みがなされている。しかし，この2論文は，定差方程式で微分方程式を近似させ

ようとすることを主眼としており，前者を用いて積極的な結果を求めようとするものではないので，理論面実用面とも多少の研究の余地を残しているように思われる。

Ch. 11 (Arrow-Solow) は，Ch. 6 の結果を制約条件面で一般化することをねらっている。すなわち，Ch. 11 では，$(x^0\ y^0)$ が鞍点の充分小さな近傍にあると仮定することは Ch. 6 と同様であるが，他の条件はかなりゆるめられている。特に，Section 4 では，$g(x)=0$ の条件下で $f(x)$ の最大値を与える x が Locally Unique である場合について，g の凹性を仮定なしで Unique Maximum を到達する "Modified Gradient Method" が工夫されており，更に Section 5 では，Section 1—4 で無視されていた x の非負性の条件が追加されている。

最後に，いま 1 つコメントが許されるならば，Part II の共通の特色として，$x \geqq 0\ y \geqq 0$ における鞍点の存在が先験的に仮定されていることは注意されなければならず*，この点が今後の Part I 的研究との 1 つの接合点であるといえよう。

〔IV〕 Part III は，L. P. および Non-L. P. の応用面に関する諸論文であり，かなり充実したものも見出せるが，本書の構成よりみてむしろ副次的な地位にあると考えられるので，簡単にサーベイするに止める。

Ch. 12 (Uzawa) は，Ch. 2 (Uzawa) の凸多面体に関する数学的研究を利用した L. P 解法の工夫，Ch. 13 (Arrow-Kuhlin) は Price Speculation への L. P. の応用，Ch. 14 (Arrow-Jhonson) は Process Analysis を Non-L. P. で解くことを試みている。最後の Ch. 15 (Chenery-Uzawa) は，経済発展分析への Non-L. P. の応用であり，前に Chenery 等によって解明された後進国問題に関する研究の系統をふむものである。この分析では，レオンティフーマトリックスに輸出，輸入の Activity を導入し，制約された労働，外国貿易の下で与えられた需要を満すに必要な資本量を最小にする問題が比較的容易な数学を用いて解かれている。

〔V〕 以上が，本論集の大要であるが，これを再展望する時，その軸はやはり Part II の Gradient Method であり，それを裏附けるものとして Part I を位置附けることが出来る。特に，Gradient Method が，価格の動学理論に有力な手掛りを与えている事実は注目される。勿論，本書には数多くの問題点を含んでおり，今後もその欠点は一層明らかにされていくであろう。しかし，Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation* が，L. P. 発展の重要な基礎となったと同様に，本著をめぐる論争が Non-L. P. 発展の飛躍台的役割をはたすことを期待したい。

〔溝口敏行〕

[redacted]