[redacted]

K. Ecker：Regularity Theory for Mean Curvature Flow,

Progr. Nonlinear Differential Equation Appl., 57, Birkhäuser, 2004 年，xiv＋165 ページ.

石　村　直　之

1　はじめに

著者 Klaus Ecker 教授は，ハイデルベルク大学の Claus Gerhardt 教授の下で学位を取得した後の 1980 年代中頃に，南半球のオーストラリアに渡ったようである．この著書に関わる研究は，そのオーストラリアのいくつかの大学に所属している間に始められた，ないしは成されたものが中心であろう．そのうちの重要な内容に，Gerhard Huisken 教授との共同研究 ([3]–[5]) の成果がある．Huisken 教授は，論文 [6] において平均曲率流 (Mean Curvature Flow) の数学理論を再創始したことで名高いが，ドイツで学位を取得した後に，Ecker 教授より早くやはりオーストラリアに来ていた．平均曲率流

に関する上記論文 [6] も南半球での成果である．オーストラリアでは，研究教育職の総数も少ないために任期のない，いわゆる tenure position の取得は通常難しいが，任期の設定された職は各大学で提供されているようである．当時既に研究職獲得に困難があった欧州諸国から，この任期付きの職のために大陸を渡って何人かオーストラリアに来た．Huisken 教授，Ecker 教授ともに，おそらく最初はこの任期付きの職だったのだろうが，そこで画期的な良い仕事をして現在は母国の教授となっているわけである．Ecker 教授の現在の所属はベルリン自由大学であり，Huisken 教授はテュービンゲン大学である．日本でも最近は各種の任期付きの職が用意されているが，外国の新進研究者が日本で良い仕事をしたという例がさらに増えて欲しいものである．そのためには，滞在を少なくとも 5 年程度は許すような制度であれば良いのだろうが，なかなか難しい面もあるようだ．さらなる改善を期待したい．

さて本書の主要な目標は，Brakke の regularity theory (本文 Theorem 5.3) を，現在の手法でほぼ自己完結的，self-contained に示すことである．$\boldsymbol{R}^n$ に滑らかに埋め込まれた曲面が平均曲率流によって動くとき，有限時間で特異点が必ず発生する．Brakke の regularity theory は，大雑把に述べれば，その特異点の Hausdorff 次元は n より小さいことを主張する．K. A. Brakke は，その書 [1] において平均曲率流の数学理論を創始したことで，現在ではよく知られている．ただ残念なことに Brakke の業績は，その当初は学界ではしばらく注目されずに忘れられたようである．先に Huisken 教授の論文 [6] に言及した際に，平均曲率流の数学理論を '再' 創始した，と書いたのはこのためである．重要な仕事をすれば，たとえ最初は注目されなくとも，時がその評価を修正する，という事実は大切な真実であろう．

本書における道具は，標準的な非線形偏微分方程式の手法である．すなわち，最大値原理および比較原理を用いての種々の gradient 評価，積分評価と monotonicity formula，また rescaling argument による解析等である．平均曲率流の研究では，visicosity solution の理論を用いる，いわゆる弱い解の理論が大きな成果を収めている．しかし，この弱い解の理論に関しては本書では扱われていない．弱い解の理論を用いれば，特異点の発生をまたいでの解析が可能となる場合がある．これらの方向に関しては，この分野の理論構成の中心の一人であった儀我美一教授による力作 [7] を参照されたい．

平均曲率流は，ある種の反応拡散系における界面の運動を記述する方程式としても導かれる．現在では，この立場の研究も大変に盛んである．そのためか平均曲率流では，純粋な幾何学の研究対象としてよりも，むしろ応用領域での解析学の対象として，多くの研究成果が達成されてきた，と述べても大きな誤りではないだろう．本書の内容は，このような平均曲率流理論の進化において，いわば教科書的な解析学の本流の立場である．記述も極めて丁寧で，一つ一つの計算も追い易い．よってこの著書には，非線形偏微分方程式の基礎理論を学んだ後で，主要実例研究の視点からも取り組むことができるだろう．

2 各章の梗概と特徴など

本書の目標や各章の内容を，主に言葉によって簡潔に述べた第一節 Introduction に続いて，第二節 Special Solutions and Global Behaviour から実質的に数学の内容が始まる．まず平均曲率流の定義が確定される．すなわち，'滑らかに埋め込まれた超平面の族 $(M_t)_{t\in I} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ ($I \subset \boldsymbol{R}$ は開区間) が平均曲率によって動くとは，$\partial x/\partial t = \vec{H}(x)$ をみたすときにいう．ただし，$\vec{H}(x)$ は $x \in M_t$ における平均曲率ベクトルを表す．' 続いて，平均曲率流の実例としていくつかの厳密解が挙げられる．まず

は収縮する球面と呼ばれる $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の n 同心次元球面の族である．これは

$$M_t = \partial B^{n+1}_{r(t)}, \qquad r(t) = \sqrt{r(0)^2 - 2nt}$$

と表される．解は $t \in (-\infty, r(0)^2/2n)$ に対して存在し，$t_0 = r(0)^2/2n$ において一点に収縮する，すなわち特異点が発生する．比較原理を用いれば，任意の閉曲面の平均曲率流では，有限時間で必ず特異点の発生することが特に従う．次に収縮する円筒が挙げられ，また homothetic solution あるいは自己相似解 (self-similar solution) が考察される．Homothetic solution とは，ある関数 $\lambda(t)$ に対して $M_t = \lambda(t) M_{t_1}$，ただし t_1 は固定，と与えられる解である．収縮する球面はもちろん一つの homothetic solution であるが，他にも興味深い解がある．最後の例として $M_t = \operatorname{graph} u(\cdot, t)$，と関数 $u(\cdot, t) : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ のグラフで与えられる解が取り扱われる．これらの平均曲率流の実例は，専門家にはよく知られているが，ここでは簡潔に手際よく述べられている．著者の研究に関わる関数のグラフで与えられる解の記述が特に詳しい．第二節の最後では，比較原理や，凸閉曲面は平均曲率流により球面に近付きながら有限時間で一点に収縮するという Huisken の定理 [6] に触れられている．

第三節 Locl Estimates via the Maximum Principle では，最大値原理を用いた各種の評価が述べられる．平均曲率流は，偏微分方程式として表せば放物型の方程式となる．たとえば，関数 $u(\cdot, t) : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ のグラフが平均曲率流に従うとき，その方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + |Du|^2} \operatorname{div}\Big(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\Big) \Big(= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2}\Big) D_{ij} u \Big)$$

となる．よってある程度滑らかな解については，放物型方程式に対する最大値原理また比較原理が成り立つ．第三節では，この最大値原理あるいは比較原理から導かれる評価，さらには高階の場合を含む曲率の評価を考察する．その手法は，たとえば偏導関数がみたすべき放物型方程式を導出し，それに最大値原理を適用するものである．この意味で，非線形偏微分方程式の優れて標準的な手法といえる．特徴を少し述べるならば，評価の局所化，localization を巧く行っている点であろう．これは Huisken 教授との共同研究に基づいている．

第四節 Integral Estimates and Monotonicity Formulas では，重み関数を曲面上で積分した量の評価に関わる話題である．重み関数を巧く選ぶと，具体的には後ろ向き (backward) 熱核とすると，積分の値は時間の単調減少となることが示される．これを monotonicity formula と呼ぶ．ここでの特徴は，切断関数 (cut-off function) を上手に選んで monotonicity formula の局所化を行うことで得られる local monotonicity formula を強調している点である．これは Ecker 教授のよく知られた業績 [2] である．

Monotonicity formula が有用な点の一つは，積分値の単調性から時間極限を考えたときの収束が保障されることである．この極限を密度 ((Gaussian) density) と呼び，この著書の以降で重要な役を果たす．この密度を上手に利用することで，議論や証明の見通しがよくなっているようである．有用性の次に挙げられる点は，rescaling と相性の良いことである．Rescaling を，特異点とその発生時刻を中心に行うと，すなわちいわゆる放物型爆発 (parabolic blow-up) を行うと，type-I 条件と呼ばれる仮定の下では，rescaling 後の曲面の極限は homothetic solution となることが示される．第二節で homothetic solution について詳しく述べたことが活きている．Monotonicity formula の応用の最後

に，球面内の曲面の面積比の評価が述べられている．その評価から Brakke のいわゆる clearing out lemma が従い，次の第五節での応用に供される．

最終節である第五節 Regularity Theory at the First Singular Time において，本書の目的であった Brakke の regularity theorem が証明される．正確な記述のために，幾何学的測度論 (geometric measure theory) からの用語が少し導入される．しかし，この幾何学的測度論分野の初心者であっても理解可能なように配慮されている．Appendix の C にも，幾何学的測度論に関する基本事項のまとめがある．さて，Brakke の regularity theory そのものは，道具が前節までで既に用意されているので，あとはそれらを総動員して証明を実行するのみである．実際の計算はやや長く煩雑であるとはいうものの，非常に見通しよく書かれている．

Appendix は, 超曲面の微分幾何学を手際よくまとめた Appendix A の Geometry of Hypersurfaces から，本文を補う内容に関してまで，合計六つの題材を扱っている．結果のみまとめられている話題もあるので，もしセミナー等でこの本を用いるときには，準備に便利であり，また発表者を問い質す材料も豊富であるという意味で重宝するかもしれない．

3 おしまいに

以上，手短に本書の内容を概観した．平均曲率流の研究対象は，現在では広く多岐にわたっている．純粋な幾何学の問題意識からの研究はもちろんのこと，最初にも述べたように，実際の自然現象の数理モデルが内包する界面運動の解析という視点からの研究も大変に盛んである．このような状況において，むしろ古典的な話題ともいえる題材を主目的にした本書執筆の動機を忖度してみると，次のようなものであろうか．それは，Brakke の regularity theorem を，Ecker 教授自身の言葉で解釈してみたいという強い欲求であった，というのは断定しすぎであろうか．もちろん，講義のためのノートを作成する必要があった，などという実用上の理由もあろう．しかし，そのような表面的な言い訳の裏には，確かに証明されているとはいうものの，それを自分の武器でぜひとも攻略してみたい，という優れた研究者の本能も否定できないと思う．その結果として，偏微分方程式論の極めて標準的な手法に則した証明が提示されることとなったのだろう．著者のそのような熱い想いを感じることのできる著作である．

謝辞．査読者には原稿を丁寧に読んでいただき，さまざまな貴重な意見や指摘をいただいた．特に読み易さを改善する点で有益であった．ここに感謝の意を表する．

文 献

[1] K. A. Brakke, The motion of a surface by its mean curvature, Math. Notes, **20**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1978.
[2] K. Ecker, A local monotonicity formula for mean curvature flow, Ann. of Math. (2), **154** (2001), 503–525.
[3] K. Ecker and G. Huisken, Mean curvature evolution of entire graphs, Ann. of Math. (2), **130** (1989), 453–471.
[4] K. Ecker and G. Huisken, A Bernstein result for minimal graphs of controlled growth, J. Differential Geom., **31** (1990), 397–400.
[5] K. Ecker and G. Huisken, Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature, Invent. Math., **105** (1991), 547–569.
[6] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Differential Geom., **20** (1984), 237–266.
[7] Y. Giga, Surface evolution equations, Monogr. Math., **99**, Birkhäuser, Basel, 2006.

(2009 年 11 月 2 日提出)
(いしむら なおゆき・一橋大学大学院経済学研究科)