The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

日本応用数理学会論文誌
Vol. 16, No. 3, 2006, pp. 317～343

B/S を利用した回収率とそれに基づく貸出債権の適正プライシング・モデル[1]

金子 拓也 * 中川 秀敏 **
* 東京工業大学大学院（りそな銀行） ** 東京工業大学大学院

The Bank loan pricing model based on recovery rate distribution

Takuya KANEKO* Hidetoshi NAKAGAWA**
* Tokyo Institute of Technology (Resona Bank, Ltd)
** Tokyo Institute of Techonology

Abstract. In this paper, we propose a bank loan pricing model for non-listed companies. At first, we present a pricing formula for a principal-equal-repayment loan and obtain the corresponding formula of relevant loan interest rate, which is sufficiently tractable. Indeed, the pricing model is specified by the distribution of recovery rate estimated from Balance Sheet(B/S), the term structure of default probability and the default-risk-premium structure. Discussing how to compute the parameter called B/S-adjusted asset-debt coverage ratio that specifies the distribution of recovery rate, we give some numerical results based on real accounting data of non-listed companies.

1 はじめに

金融機関では, 不良債権問題や規制変更などの影響をうけて, より精密な信用リスクの評価方法について議論を重ねてきている[2]. 特に 2006 年から新しく施行される BIS[3] 自己資本規制案では, 金融機関独自のモデルに基づいて信用リスクの計量を行う際には, 貸出債権などの資産ごとに **PD**（Probability of Default, 企業がデフォルトする確率）, **LGD**（Loss Given Default, デフォルト時の損失率）, **EAD**（Exposure At Default, デフォルト時のエクスポージャ） などの指標を計算することが求められており, 特に **PD** の計算方法については様々なアプローチが試みられている.

本研究では, 上記の指標の中の **LGD** と表裏一体の関係にある「回収率」に焦点を当てる. 信用リスク評価における回収率の重要性は, 先行研究でも数多く指摘されており, 特に米国では, 担保の有無・優先劣後構造の違いによる回収率の統計分析結果なども公表されている（ [2] [3] [6] [7] [8] ）. 米国の研究でもなされているように, 融資条件のデータベースとデフォルトに関する回収実績のデータベースを用いて, 統計的に回収率とその要因を分析し予測に活用するというアプローチが, 回収率の定量的な分析としては実務的にも受け入れられやすいものであると考えられる.

[1]本研究は, 独立行政法人日本学術振興科学研究費補助金 (A) No.16201033 の助成を受けて行っている.
[2]関連する最近の話題としては, 信用保証協会は２２年ぶりに制度を見直し, 保証料率を現行の一律から企業格付別の料率へ移行することなどがある. (2006 年 2 月 19 日付日本経済新聞)
[3]http://www.bis.org/

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

しかしながら, 日本におけるデータベースの整備状況を考えると, 統計的アプローチは現状ではまだ難しいと考えられる[4]. また, データベースが量的に整備されたとしても, 回収額, 回収までに経過した時間, 個々の複雑な事情など様々な条件の違いを考慮して分析を行うのに十分な質の確保にはかなりの時間と試行錯誤を要すると思われる.

市場性のある社債やクレジット・デリバティブの評価においては, 数理ファイナンスのアプローチにより, リスク中立確率の下でデフォルトリスクのある金融商品の価値と回収率の関係を明示的に表すことが可能である. Duffie-Singleton([4]) のモデルにおけるハザード・レートと回収率の不可分性といった理論的課題もあるが, 社債の市場データ等の時系列データを利用して回収率の推定を行う研究（例えば [1]）も見られる. ただし, 非上場企業への貸出のような場合には流通市場が未整備のため, 貸出の価値を社債やクレジット・デリバティブと同様に市場データから回収率を推定するというアプローチは現実的ではない.

このような事情もあり, デフォルトした企業の直前の財務情報があれば分析が可能となるデフォルト判別やデフォルト確率算出のモデルは, 理論的にも比較的多数の研究がされてきたのに対して, 回収率のモデルやその先にある適正な貸出金利を与えるプライシングモデルについての理論的研究はあまり見られない.

本研究では, 主に中小企業に対する貸出を念頭におき, 貸出業務を行う金融機関の視点から, 貸出先の信用リスク (デフォルト可能性およびデフォルト時の損失の大きさ）を適正な貸出金利に結びつけるプライシング手法を検討する. 具体的には, リスク中立ではない実確率の下で, デフォルト時の損失率をリスク・プレミアムという形で評価する関数を金融機関が独自に導入する. そして, 元金均等返済型の固定金利貸出債権の現在価値とリスク・プレミアムの関係式を与え, その関係式を満たす金利を信用リスクに見合う適正な貸出金利とするプライシング・モデルを提案する.

要するに, 求められる適正貸出金利は各金融機関のデフォルトリスクの評価関数の形に依存することになる. 「どのような評価関数を与えるべきか」については本研究では回答を与えない. そもそも全ての金融機関に対して共通してベストな関数形というものも存在しないと考える. しかしながら, 貸出実績とモデルを比較することで, 自分たちがこれまでにどのようなリスク評価を行ってきたかを客観的に評価でき, 今後どのようにリスク評価の態度を変えていくべきかを検討する一つの材料にはなりうると考えている.

また, 本研究で提案するプライシング・モデルでは「回収率」を重要なリスク・ファクターと見なす. 「回収率」をどのように定義し, またその回収率の確率分布をどのように特徴づけるかが問題となるが, 上で述べたような理由で, 回収実績データベースや市場データを用いるアプローチは困難であるので, 本研究では貸出先の貸借対照表（B/S）の数値を利用する方法を提案する.

直観的には, 回収率とは負債に対するデフォルト時の資産の処分価格の割合と見なせるので, B/S をベースに回収率を考えることは不自然ではない. 問題は, B/S に表されている資産合計がデフォルトした場合に実際に回収可能な金額を表しているとは言えないと

[4] 日本でも, 回収率の共有データベースを作る試みが動き出した. (2006 年 2 月 2 日付日経金融新聞)

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

いうことである．資産項目一つ一つを精緻に評価していけば，本当の資産価値に近い評価をすることもできるかもしれないが，現実にはそれも困難である．そこで，我々は先行研究や経験に基づき，ある一定のルールに沿って資産の内容を調整することで，回収率の分布を特徴づけるファクターを求めることを考える．

具体的には，粉飾排除，有形固定資産の換金性予測，無価値資産排除の３点に注目して資産項目の調整を行って資産価値を再評価し，調整後資産の有利子負債に対する比（B/S 調整後資産・負債カバレッジ率と呼ぶ）を算出する．B/S 調整後資産・負債カバレッジ率は「回収率」の確率分布を特徴づけるパラメータとして特徴づける．

デフォルト確率は比例ハザード・モデルを用いることでデフォルト時刻の期間構造も考慮する．比例ハザード・モデルについては特に新しい工夫はしていないが，期間構造を規定するベースラインハザード関数は（例えば景気状態を表すと解釈できるような）パラメータを含むと仮定する．複数の貸出先を対象に考える場合は，デフォルトの依存構造が重要となるが，このベースラインハザード関数のパラメータを通じてデフォルトの依存関係が表現されるとも考えられる[5]．

本研究では，実際に多数の非上場企業の B/S を利用して回収率の特徴付けを行い，プライシング・モデルを通じて各企業の信用リスクに対応した適正貸出金利を数値計算で求める．また，２つのパラメータをもつリスク・プレミアム関数を例に，各パラメータの変化による適正金利水準への影響を分析する．

論文の構成は以下の通り．２節では，プライシングモデルの数理的なフレームワークを与え，適正貸出金利のプライシング式を示し，適正貸出金利の表現式を導出する．３節では，プライシングモデルの特徴付けに必要な回収率，デフォルト確率の期間構造およびリスク・プレミアム関数について具体的なモデルを提案する．４節では，B/S 調整後資産・負債カバレッジ率を計算するために必要となる B/S の資産項目の調整法について議論する．そして，５節で 実際の非上場企業の財務データを利用して B/S 調整後資産・負債カバレッジ率と金利水準の関係などを分析し，その数値計算の結果の紹介と考察を行う．

2 元金均等返済型の貸出債権価値

2.1 モデル

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間とする．また，$T \in (0, \infty)$ を連続時間における有限のタイム・ホライズンとする．

市場で観測可能なデフォルト・フリーの瞬間的短期金利モデルを，この確率空間上の確率過程 $\{r_t\}_{0 \le t \le T}$ で表し，期間 $[t, s]$ $(0 \le t \le s \le T)$ に対するデフォルト・フリーの割

[5]例えば，全与信先に共通のベースラインハザード関数が変化して，仮にある期間内の全体のデフォルト確率が高まるように変化したとする．このとき，その期間内のデフォルトも当然多くなると考えられ，個々のデフォルト発生要因は独立であっても観測する側からはデフォルト発生に高い相関性があるように見えるであろう．デフォルトの依存構造を通じて考えたいことは，ある期間内のポートフォリオ内のデフォルトが多いか少ないかということであるので，その現象をモデル化したいのであれば，本研究で提案する潜在変数を通じてベースラインハザード関数に影響を与えるモデルで十分だと考える．

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

引ファクター $\Lambda(t,s)$ を

$$\Lambda(t,s) := \exp\Big(-\int_t^s r_u du\Big)$$

で定義する.

時点 T を予定返済最終時点とし, 元金を F, 全期間固定金利を c とする元金均等返済型の貸出の時点 0 における価値を考える. ここで, 元金と利息を連続的に返済するものと仮定すると, 微小期間 $[t, t+dt]$ のおける返済分のうち元本分は $\dfrac{F}{T}dt$, 利息分は時点 t における残存元本に対して金利が適用されて $cF\Big(1-\dfrac{t}{T}\Big)dt$ となる. 返済のうち元本分は変化しないが, 利息分は時間の経過と共に減少していくので, 返済額も時間と共に減少していく.

この貸出債権にはデフォルトの可能性があり, 予定返済最終時点前にデフォルトが発生した場合には, それ以降の元利返済は行なわれず, その時点で資産を処分して残存元本に対する返済に充てるとする. ただし, 資産処分価値が負債額に満たない場合は, 残存元本が全額回収できるとは限らないため, デフォルトによる元本毀損の可能性があり, それがデフォルト・リスクを引き起こすと考えられる.

融資先のデフォルトを特徴づけるファクターとして, デフォルト時刻をランダム時刻 τ で表し, 時点 t においてデフォルトした場合の残存元本に対する回収率を確率過程 $\{\delta_t\}_{0\le t\le T}$ で表す[6]. ここで, $0 \le \delta_t \le 1$ と仮定する. また, $\{r_t\}_{0\le t\le T}$, τ および $\{\delta_t\}_{0\le t\le T}$ は全て独立と仮定する. すなわち, 金利とデフォルト時点と回収率は互いに依存関係はないと仮定する.

つまり, $\tau \le T$ のときには τ 時点において, その時点での残存元本に対する回収率 δ_τ をかけた分, すなわち $\delta_\tau F\Big(1-\dfrac{\tau}{T}\Big)$ が弁済され, その後の利払いや元本の追加的な返済はないものと仮定する. また, $N_t := 1_{\{\tau\le t\}}$ をデフォルトの計数過程とする.

以降の議論では, 元本を基準化して $F=1$ として一般性を失わないので, $F=1$ と仮定する.

上記の設定に対する, 元金均等返済型貸出の現在価値を表す確率変数を $X_0(T,c)$ と表すと,

$$\begin{aligned} X_0(T,c) &:= \int_0^{\tau\wedge T} \Lambda(0,s)\Big\{\frac{1}{T}+c\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\Big\}ds + \Lambda(0,\tau)\delta_\tau\Big(1-\frac{\tau}{T}\Big)1_{\{\tau\le T\}} \\ &= \int_0^T (1-N_s)\Lambda(0,s)\Big\{\frac{1}{T}+c\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\Big\}ds + \int_0^T \Lambda(0,s)\delta_s\Big(1-\frac{s}{T}\Big)dN_s \end{aligned} \tag{2.1}$$

と表現することができる[7].

注 2.1. (2.1) 式は次のように, 離散時点で元利返済をする現実的な元金均等返済型貸出の現在価値と対応させることができる.

[6]本論文では, 断らない限り「回収率」とは, デフォルト時の残存元本に対する回収率という意味で用いる.

[7]より一般の時点 t における債権価値評価もできるが, 通常は貸出を行ったら最終返済期日まで債権を保有し, 第三者に売却等行わないので, 今回は初期時点における価値だけを議論することにする.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

元本 1, 貸出期間 T 年, 元利払い回数 K 回（各期末払いとする）, $\frac{T}{K}$-期間に対する固定金利 c （年率表示）の貸出の現在価値を $X_0(T,K,c)$ とする. 元利払い時点を $t_k := \frac{kT}{K}$ $(k=0,1,\cdots,K)$ と表すと,

$$
\begin{aligned}
X_0(T,K,c) &= \sum_{k=1}^{K}(1-N_{t_k})\Lambda(0,t_k)\Big\{\frac{1}{K}+\frac{cT}{K}\Big(1-\frac{k-1}{K}\Big)\Big\} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{K}\Lambda(0,\tau)\delta_\tau\Big(1-\frac{k-1}{K}\Big)(N_{t_k}-N_{t_{k-1}}) \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

と表現できる.

実務への直接的な応用を考えた場合は (2.2) 式のような形の式で議論する方がわかりやすいと思うが, 一般論を展開するうえでは, 連続時間の設定の方が記号が煩雑にならないなどの都合がいいこともあるので, 以後の一般的な議論は連続時間の設定で考えていく.

2.2 適正貸出金利のプライシング式

このとき, T が与えられたとして, 固定金利 c をデフォルト・リスクに応じてどのように決めるが妥当であるか, という問題を考えたい.

社債や CDS（クレジット・デフォルト・スワップ）のように市場で取引されている商品であれば, リスク中立評価法を適用することが妥当であると考えられるが, 一般に単独の貸出債権の流通市場は整備されておらず, リスク中立評価法を適用することは困難である. もちろん似たような業態や格付の近い企業の社債や CDS の価格等を参考にでき, そうした市場性のあるデフォルト・リスク関連資産が何らかの意味で有効なヘッジの手段となり得れば, リスク中立評価法を用いるということも可能かもしれない. しかし, 中小企業を対象にした貸出債権であれば, そのような市場性商品からの類推やヘッジ手段の存在を仮定することは無理がある.

そこで, 我々はリスク中立評価法によらない, 実確率 $\mathbf{P}$ の下で債権価値を評価する適当な方法を議論したい. そのために, まず効用関数を用いた「確実性等価」の概念を応用して考えることにする.

連続で単調増加な凹関数 $U:\mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ を考える. これを貸出の現在価値に対する, 債権者となる金融機関の効用関数と見なす. いま, c^* を

$$
\mathbf{E}[U\big(X_0(T,c^*)\big)] = U(1) \qquad (2.3)
$$

を満たすものとする. 要するに, 元本 1 をデフォルト・リスクのある貸出に投資する場合に, どのくらい金利を高くすれば投資の現在価値の期待効用と元本に対する効用が等しくなるかという観点でプライシングしようという考え方である[8]. 効用関数 U が滑らかであ

[8]デフォルト・リスクがなければ, c^* はデフォルト・フリーの瞬間的短期金利から求められる連続複利の利回りに一致する. 付録 A 節を参照.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

るとすると, 単調増加で凹関数ということから, $U' > 0$, $U'' < 0$ が言えるので

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[U(X_0(T,c^*))] = U(1) \\
&\qquad \Longrightarrow \mathbf{E}\left[U(1) + U'(X_0(T,c^*)-1) + \frac{U''}{2}(X_0(T,c^*)-1)^2 + \cdots\right] = U(1) \\
&\qquad \Longrightarrow \mathbf{E}[X_0(T,c^*)] = 1 - \frac{U''}{2U'}\mathbf{E}\left[(X_0(T,c^*)-1)^2 + \cdots\right]
\end{aligned}$$

期待値の中の剰余項が無視できるとすると,

$$\mathbf{E}[X_0(T,c^*)] = 1 - \frac{U''}{2U'}\mathbf{E}\left[(X_0(T,c^*)-1)^2\right]$$

という関係式が得られる. ここで $\dfrac{U''}{2U'} < 0$ であり, $\mathbf{E}\left[(X_0(T,c^*)-1)^2\right]$ は収益のブレという点でリスクを表すものと見なせることに注意すると, 上の式は本質的に

$$\mathbf{E}[X_0(T,c^*)] = 1 + 「\,U \text{ のリスク回避度に応じた正のリスク・プレミアム}」$$

という関係を表していると解釈できる.

ここまで効用関数を用いて議論を展開してきたが, 現実的な債権価値評価を行う際に妥当な効用関数を考えるのは難しいことである. また, 貸出に対するリスクとして一般に認識されるのは, $\mathbf{E}[(X_0(T,c^*)-1)^2]$ のようなものではなく, どのくらい損失の可能性があるかという点である. そこで, 「U のリスク回避度に応じた正のリスク・プレミアム」を, これまでの議論の本質的な内容を残しつつ, 実務的にも扱いやすいような新しい形で与えることを提案する.

具体的には $\phi : [0,\infty) \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}_+$ となる適当な関数を考える. ただし, $\phi(t,\cdot) = 0$ $t \geq T$ かつ $\phi(\cdot,0) = 0$ であり, $\phi(\cdot,x)$ は x について単調増大で凸と仮定する. そして, この関数 ϕ とデフォルトを特徴づける τ と δ_t を用いて, リスク・プレミアムを $\mathbf{E}[\phi(\tau, 1-\delta_\tau)]$ で表すことにする. このようにリスク・プレミアムをとらえることで, ϕ に関する最初の仮定は, 確実にデフォルトが T 以前に起こらないか, デフォルトしても確実に元本を回収できる状況であれば, 信用リスクにプレミアムを 0 と見なすことを意味し, 後の仮定は損失率（$= 1-$ 回収率）が大きいほど, 信用リスクに対するプレミアムも大きくなり, そのプレミアムの上昇率も大きくなっていくことを表している.

このように非常に単純な形でリスク・プレミアムを定義することについてはいろいろな反論も予想されるが, $X_0(T,c^*)$ の不確実性はそもそもデフォルトの発生とその際の損失の大きさに起因することや, 関数 ϕ を用いてデフォルト時点と損失率（裏を返せば回収率）の評価を行うことは, BIS ルールの信用リスク管理における **PD**, **LGD** によるリスク評価を一般化したものととらえることができ, プライシングを行う上で必要最低限のことは考慮しているものと考える.

以上より, 本研究においては元金均等返済型の貸出債権の適切な貸出金利 c を以下のように定義する.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

定義 2.2. 以下の等式 (2.4) を適正貸出金利のプライシング式と呼び, これを満たす c を適正貸出金利と呼ぶ.

$$\mathbf{E}[X_0(T,c)] = 1 + \mathbf{E}[\phi(\tau, 1-\delta_\tau)]. \tag{2.4}$$

c は具体的に次のように表現することができる[9].

命題 2.3. 適正貸出金利 c は以下の式で与えられる.

$$c = c(T) = \frac{A_1(T)}{A_2(T)} \tag{2.5}$$

ただし, $Z(0,s) := \mathbf{E}[\Lambda(0,s)]$ として,

$$\begin{aligned}
&A_1(T)\\
&:= 1 + \int_0^T \mathbf{E}[\phi(s, 1-\delta_s)]\mathbf{P}(\tau \in ds)\\
&\quad - \int_0^T Z(0,s)\mathbf{E}[\delta_s]\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\mathbf{P}(\tau \in ds) - \frac{1}{T}\int_0^T Z(0,s)\mathbf{P}(\tau > s)ds\\
&= 1 + \int_0^T \Big\{\int_{\mathbf{R}} \phi(s, 1-z)\mathbf{P}(\delta_s \in dz)\Big\}\mathbf{P}(\tau \in ds)\\
&\quad - \int_0^T Z(0,s)\Big\{\int_{\mathbf{R}} z\mathbf{P}(\delta_s \in dz)\Big\}\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\mathbf{P}(\tau \in ds) - \frac{1}{T}\int_0^T Z(0,s)\mathbf{P}(\tau > s)ds,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$A_2(T) := \int_0^T Z(0,s)\mathbf{P}(\tau > s)\Big(1-\frac{s}{T}\Big)ds \tag{2.7}$$

とする.

Proof. $\{r_t\}_{0\le t\le T}$, τ および $\{\delta_t\}_{0\le t\le T}$ が全て独立と仮定されているので,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[X_0(T,c)]\\
&= \mathbf{E}\Big[\int_0^T (1-N_s)\Lambda(0,s)\Big\{\frac{1}{T} + c\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\Big\}ds + \int_0^T \Lambda(0,s)\delta_s\Big(1-\frac{s}{T}\Big)dN_s\Big]\\
&= \int_0^T \mathbf{E}\left[(1-N_s)\Lambda(0,s)\right]\Big\{\frac{1}{T} + c\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\Big\}ds + \mathbf{E}\Big[\int_0^T \Lambda(0,s)\delta_s\Big(1-\frac{s}{T}\Big)dN_s\Big]\\
&= \int_0^T \mathbf{E}[(1-N_s)]\mathbf{E}[\Lambda(0,s)]\Big\{\frac{1}{T} + c\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\Big\}ds\\
&\qquad\qquad + \int_0^T \mathbf{E}[\Lambda(0,s)]\mathbf{E}[\delta_s]\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\mathbf{P}(\tau \in ds)\\
&= \int_0^T \mathbf{P}(\tau > s)Z(0,s)\Big\{\frac{1}{T} + c\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\Big\}ds + \int_0^T Z(0,s)\mathbf{E}[\delta_s]\Big(1-\frac{s}{T}\Big)\mathbf{P}(\tau \in ds)
\end{aligned}$$

あとは, プライシング式 (2.4) を用いて, c について解けばよい. □

[9] ここでの適正貸出金利はあくまでもデフォルトによって元本が毀損するリスクだけを考慮して決めるものであり, 実際には債権に対する流動性プレミアムや事務コストなどを反映させることになる.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

3 回収率, デフォルト確率の期間構造およびリスク・プレミアムの特徴付け

前節の (2.5), (2.6), (2.7) 式から分かるように前節で導入したモデルを利用して実際の貸出債権を評価する際には, 以下の点について特徴付けを行う必要がある.

- 回収率 δ_t の分布
- デフォルト確率の期間構造, すなわちデフォルト時点 τ の分布
- リスク・プレミアムを与える関数 ϕ の形

これらが具体的に与えられれば, 残りの問題は (2.5), (2.6), (2.7) をどのように数値計算すればよいかということだけである.

以下では, それぞれの特徴付けの方法について議論する.

3.1 回収率の分布

まず（残存元本に対する）回収率 δ_t の特徴付けを行う. デフォルト時の債権回収事例のデータが豊富にあり, なおかつそれらと債務者の属性などとの関連性を分析できれば統計モデルを構築することも可能であるが, 現状ではそのような分析を行うことはデータの質・量の点から諦めざるをえない.

一方で, 理論的には資産が負債を上回っている限りは資産を処分して負債を弁済することで債権回収が可能であるから, 資産と負債の大小関係, より正確には資産が負債の何倍あるかに注目すれば, 回収率に目処をつけることも可能と考えられる. そこで, 貸出先の貸借対照表（B/S）が利用可能という前提で, B/S 情報だけから回収率を特徴付ける方法を考える. ただし, B/S で表される会計上の資産価値と実際に処分したときの資産価値とは一致しないと思われるので, 適当な方法で B/S 上の資産価値を調整する必要がある. 負債についても「有利子負債」だけを考えるなどの調整を行う必要がある.

具体的な調整法については次節で議論することとして, この小節では以後, 貸出契約時点の直近の調整後資産, 調整後負債が得られたとして話を進めていく. 時点 0 において B/S から得られる「調整後資産÷有利子負債」を μ_δ と表し, **B/S 調整後資産・負債カバレッジ率** と呼ぶことにする. （詳しくは (4.1) を参照）

$$\tilde{\delta}_\tau = \frac{\text{デフォルト時の資産処分価値}}{\text{デフォルト時の有利子負債}} \tag{3.1}$$

と表すと, デフォルト時回収率 δ_τ は次のようにとらえることができる.

$$\delta_\tau = \max\{\min\{\tilde{\delta}_\tau, 1\}, 0\} \tag{3.2}$$

したがって, $\tilde{\delta}_\tau$ の確率分布を与えることが δ_τ の特徴付けの最重要ポイントなる.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

これ以降は $\tilde{\delta}_\tau$ の分布は時間によらず一定で, $\tilde{\delta}$ と表されると仮定する. したがって, 回収率自体の分布も時間によらず一定で, $\delta = \max\{\min\{\tilde{\delta}, 1\}, 0\}$ で与えられると仮定する. 実際には, 時間の経過とともに元本は均等返済されていくし, 事業の進展によって資産内容も変化していくので, 回収率も変化すると考えるのが望ましいだろう. しかし, 限られたデータで考えなければならない現状では, モデルをいたずらに複雑にしても有用ではないので, ここでは回収率が時間によらず一定という強い仮定の下で話を進める. この点については, 付録 B 節でもう少し議論する.

ここで, $\tilde{\delta}$ が μ_δ をパラメータとする分布関数 $F(z;\mu_\delta)$ をもつと仮定する. また $G(z) := \max\{\min\{z, 1\}, 0\}$ とおく.

以上の準備の下で

$$\mathbf{E}[\delta_s] = \mathbf{E}[\delta] = \mathbf{E}[G(\tilde{\delta})] = \int_{\mathbf{R}} G(z)F(dz;\mu_\delta) \tag{3.3}$$

となる.

B/S の資産と負債の調整法, すなわち μ_δ の定義については, 次の節で論じる. また, $\tilde{\delta}$ の分布関数 $F(z;\mu_\delta)$ については 5 節の数値計算の設定のところで具体的に提案する.

3.2 デフォルト確率の期間構造

(2.5), (2.6), (2.7) 式より, デフォルト時点 τ に関しては, 生存確率 $\mathbf{P}(\tau > t)$ を与えることが最も重要であることがわかる. ここで, $\mathbf{P}(\tau \in dt)$ は, 生存確率に微分可能性を仮定すれば

$$\mathbf{P}(\tau \in dt) = -\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau > t)dt \tag{3.4}$$

という関係から得られることに注意.

本研究では, デフォルト確率モデルとして, 比例ハザード・モデルを用いることにする.

$\boldsymbol{x}$ をデフォルト発生に影響を与えると考えられる財務指標の数値や属性等の変量を成分とするベクトルとする[10]. また, θ を景気のような経済状態を決めるパラメータとする. 共変量 $\boldsymbol{x}$ およびパラメータ θ が与えられているときの対象企業のハザードレート $h(t;\boldsymbol{x},\theta)$ を

$$h(t;\boldsymbol{x},\theta) := h_0(t;\theta)\exp(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \tag{3.5}$$

とおく. ここで, $h_0(t;\theta)$ はパラメータ θ を含む正値の関数であり, ベースライン・ハザード関数と呼ばれる. また $\boldsymbol{\beta}$ は $\boldsymbol{x}$ に対する係数ベクトルとする.

このとき, 企業の生存確率は

$$\mathbf{P}(\tau > t|\boldsymbol{x},\theta) = \exp\left(-\int_0^t h(s;\boldsymbol{x},\theta)ds\right) = \exp\bigl(-\exp(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})H_0(t;\theta)\bigr) \tag{3.6}$$

[10] B/S 調整後資産・負債カバレッジ率 μ_δ はその定義から大きいほど安全性が高いと考えられ, デフォルトの発生自体を説明する変量としても有用であると考えられるので, $\boldsymbol{x}$ の一成分として μ_δ を採用することを検討することは興味深い. その場合には, μ_δ は分布を通じてデフォルト確率の期間構造と回収率分布とを結んでいるとも見なすことができる.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

と表される. ここで,

$$H_0(t;\theta) = \int_0^t h_0(s;\theta)ds$$

とおいた.

また,

$$\mathbf{P}(\tau \in dt|\boldsymbol{x},\theta) =: h(t;\boldsymbol{x},\theta)\exp\bigl(-\exp(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})H_0(t;\theta)\bigr)dt \tag{3.7}$$

と表される.

ベースライン・ハザード関数 $H_0(t;\theta)$ および $\boldsymbol{x}$ を特定していないが, それは後で見る数値計算例を通じて具体的に提案することにする.

3.3 リスク・プレミアム

リスク・プレミアムを与える関数 $\phi(t,x)$ の形もいろんな表現が考えられるが, ここでは

$$\phi(t,x) = 1_{\{t\le T\}}\lambda x^{\alpha} \tag{3.8}$$

という形を考える. ただし, α,λ は $\alpha \ge 1, \lambda > 0$ を満たす定数とする.

回収率が時間によらず一定で δ と表され, $\delta = G(\tilde{\delta})$, $\tilde{\delta} \sim F(\cdot;\mu_\delta)$ であることに注意すると, リスク・プレミアムは

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\phi(\tau,1-\delta)] &= \lambda\mathbf{E}[1_{\{\tau\le T\}}(1-\delta)^{\alpha}] \\ &= \lambda\mathbf{P}(\tau\le T)\int_{\mathbf{R}}(1-G(z))^{\alpha}F(dz;\mu_\delta)\end{aligned} \tag{3.9}$$

と表現される.

注 3.1. λ,α は金融機関が独自に設定することになるが, 直感的にはそれぞれのパラメータは以下のような意味合いをもつので, その点を参考にしながら, 実際には様々なパラメータの組合せによる結果の比較をしながら, 各金融機関が妥当なパラメータの組合せを探っていくことになるだろう.

λ はリスク・プレミアムの水準を決めるパラメータであり, α はデフォルト・リスクへの感応度を定めるパラメータを見なすことができる.

4 B/S 調整後資産・負債カバレッジ率

本節では, 3.1 節で導入した B/S 調整後資産・負債カバレッジ率 μ_δ を具体的に決算データから算出する方法を議論する. 3.1 節でも述べたように μ_δ は (3.1) 式の $\tilde{\delta}$ の分布 $F(\cdot;\mu_\delta)$ を決める重要なパラメータと位置づけられる.

我々はまず B/S の資産合計と負債の大小関係に着目するが, B/S に現れている資産額と, デフォルト時に現金化して債権者への弁済に当てることが可能な金額との間には, 大

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

きな乖離があるのと考えるのが普通であるので, デフォルト時に債務者の資産を処分してどの程度回収できるかを考えるためには, B/S 上の資産項目に対して何らかの調整を施すことが必要となる.

具体的には, 粉飾の影響や固定資産の換金性, 実務上優先して支払われる負債項目等を考慮して調整し, 調整後の資産額が有利子負債（短期・長期の借入金および社債）をカバーできるかという観点から, μ_δ を次のように定義する.

$$\mu_\delta = \frac{\text{調整後資産}}{\text{有利子負債}} \tag{4.1}$$

ただし[11],

$$\begin{aligned}\text{調整後資産} = \text{直近 B/S の総資産額} &- \text{更正債権以外の負債}\\ &-\text{粉飾懸念に相当する額} \quad (\cdots \textbf{Step 1})\\ &-\text{有形固定資産の減価相当額} \quad (\cdots \textbf{Step 2})\\ &-\text{無価値資産} \quad (\cdots \textbf{Step 3})\end{aligned}$$

以下, 「粉飾懸念に相当する額」「有形固定資産の減価相当額」「無価値資産」について具体的な調整方法について述べる. 調整方法には会計的な見地から議論の余地はあると思われるが, 我々の主張のポイントは資産価値の再評価が不可欠であるという認識であり, その具体的な方法としては自然なものを取り上げていると考えている.

Step 1：粉飾懸念に相当する額の算出

粉飾パターンとして, 売上高の嵩上げ, 利益操作が良く指摘されており, 前者の場合には売上債権が, 後者の場合には棚卸資産の金額が影響を受けることが多い. これらの金額が膨らむと回転期間が長期化することから, この値に注目し一般的な数値との乖離幅および, 一般的な数値内であっても過去の回転期間から算出される回転期間の平均値と標準偏差の和よりも大きい部分を粉飾懸念のある部分として, 粉飾懸念に相当する額を以下の式で与える.

$$S_{\text{month}}\left\{\max(Y_t-\alpha,0)+\mathbf{1}_{\{Y_{t-1}+\beta\sigma^Y<Y_t\le\alpha\}}(Y_t-Y_{t-1})\right\} \tag{4.2}$$

ただし, Y_t を時刻 t における売掛債権回転期間（または棚卸資産回転期間）, α を各回転期間の正常な水準, β を回転期間変動幅の水準, σ^Y を時系列財務データから得られる各回転期間の標準偏差, S_{month} を平均月商（＝年間売上高÷１２）とする.

[11] 調整後資産の計算式について, 更正債権（すなわち一般的に言えば金融機関からの借入）以外の負債とは, 支払手形, 買掛金を指す. これらを差し引くことはフリーライダーの存在を認めることとなるが, 債権者の数が多いと回収に際し利害関係の調整に時間がかかり手続き上煩雑になるという実務面上の問題があること, また一般に回収率は保守的に見積もることが望ましいことを勘案し敢えてこの定義を採用することとした.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

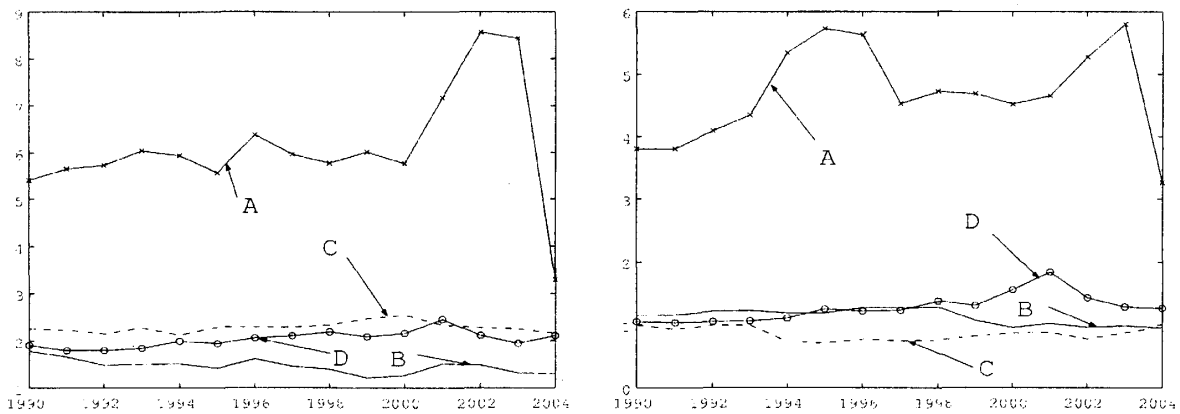

Fig. 1: Transition of financial ratios of four Japanese companies in some industry. (1990-2004) The left figure shows transition of RMSR. While the right figure shows transition of IMSR.

Fig. 1 左[12]および Fig. 1 右[13]は, 粉飾していた疑いが濃厚な上場企業 A 社と, 同業界にある 3 社の過去 1 5 年分の売掛債権回転期間および 棚卸資産回転期間の推移をそれぞれにまとめたものである. これらの図からは, A 社の両回転期間が業界水準より飛びぬけて高く推移していることが分かる. 2003 年から 2004 年にかけて回転期間が大幅に縮小されている理由は, A 社が 2004 年に産業再生機構による支援が決定し, 資産査定が厳格に行われたためと考えられる.

Step 2 : 有形固定資産の減価相当額

有形固定資産の換金率は, 実際にある資産を売却して得られた代金をもって測ることが一般であるが, ここでは, 売却していない資産の換金率, すなわち売却価格を推定することが必要となる. 換金率の推定手段としては, 時価会計導入前後で, 同じ資産について計上金額を変更している事例をあつめ, それらの平均を換金率とするなどの方法も考えられる. 後の数値実験では, 米国における先行研究 [9] による資産掛け目（消滅率）を参考に換金率を定め, 機械器具 $= 0.369$, 建物 $= 0.312$, 土地 $= 0.8$ と設定している[14]. それぞれの換金率を貸借対照表の対応する固定資産項目の金額に掛けて, 合算したものと B/S 上の額との差を固定資産の換金価値とし, B/S 上にある帳簿価値金額と換金価値の差を減価相当額とした.

Step 3 : 無価値資産の算出

「創立費」をはじめとする繰延資産, 短期貸付金, 長期貸付金, その他流動資産, その他固定資産 などの資産項目は, 資産性が乏しいかあるいは無いものと判断し, これらを無価値

[12]売掛債権回転期間に相当する英文表記がない. そこで, 売掛債権を月商で割った値という意味で, Receivables Monthly Sales Ratio (=RMSR) と表記する.

[13]売掛債権回転期間と同様の理由で, 棚卸資産回転期間は, Inventory Monthly Sales Ratio (=IMSR) と表記する.

[14]今回提案した数値は米国の事例を参考に試験的においたものである. 今後, 日本における有形固定資産の換金率に関する調査・研究も行っていく必要があることは論を待たない.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

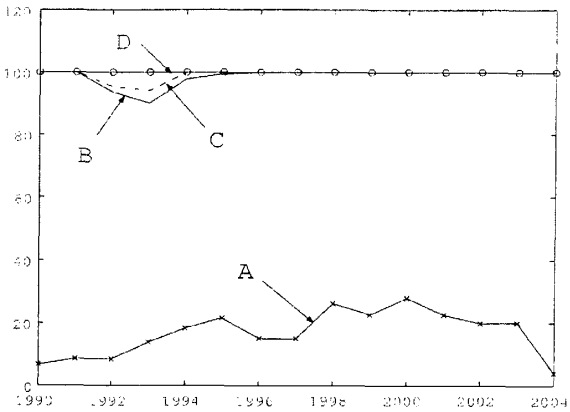

Fig. 2: Transition of $G(\mu_\delta)$ computed from B/S. (1990-2004) (Vertical axis stands for percentage)

資産とした.

以上の調整を行い, 先ほどの4社について (4.1) で与えた B/S 調整後資産・負債カバレッジ率 μ_δ を計算して, $G(\mu_\delta)$ で0から1の間の数値に丸めたものの年次推移の状態を Fig. 2 に表す.

A 社は (4.2) 式に基づいて粉飾懸念分を差し引くと, かなり以前から実質的にはかなりの債務超過状態が続いていたと言える. 一方, 1990 年代前半の数年を除いて, A 社以外は資産を調整した後も十分に有利子負債をカバーできるだけの財務力があることが見て取れる.

5 適正貸出金利の数値計算

本節では, これまでに提案してきたプライシング・モデルに基づいて, 実際の非上場企業の財務データを利用して (2.5) 式の意味での適正貸出金利を数値計算で求めた結果を紹介する. また, (3.8) で与えたリスク・プレミアム関数 $\phi(t,x) = 1_{\{t\leq T\}}\lambda x^\alpha$ の各パラメータが適正貸出金利の水準に及ぼす影響なども分析する.

5.1 非上場企業データの概要

今回の分析には, 東京商工リサーチ社から購入した非上場企業の財務データを使用した. 1998 年〜2004 年の期間で3期連続（デフォルト企業はデフォルト直前期から遡って3期連続）で財務データがあり, 資本金が1千万から5千万円, 従業員 21〜50 名の全国の建設・製造・卸小売の企業から任意に選択された 非デフォルト 2,375 社, デフォルト 871 社を対象とした.

つぎの Table 1 は, データ全体およびデフォルト・非デフォルト各群の μ_δ で階級を分けたときの度数分布表（と相対度数）である. μ_δ はそもそも定義から安全性を測る指標

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

の一つと考えられるが, およそ 40% 以上であれば非デフォルト, 40% 未満であればデフォルトと判別すると, 誤判別率がともに 30%〜40% になり, 単独指標としてはまずまずの判別精度と思われる.

Table 1: B/S-adjusted asset-debt coverage ratio(= μ_δ) of non-listed companies. Total(3,246 companies), Non-defaulted(2,375 companies), Defaulted(871 companies)

μ_δ	~100%	~90%	~80%	~70%	~60%	~50%	~40%	~30%	~20%	~10%	~0%	0%~
Total	741	123	156	178	235	223	241	236	196	177	119	621
Percentage	22.8%	3.8%	4.8%	5.5%	7.2%	6.9%	7.4%	7.3%	6.0%	5.5%	3.7%	19.1%
Non-defaulted	709	111	130	140	176	141	163	148	113	108	49	387
Percentage	29.9%	4.7%	5.5%	5.9%	7.4%	5.9%	6.9%	6.2%	4.8%	4.5%	2.1%	16.3%
Defaulted	32	12	26	38	59	82	78	88	83	69	70	234
Percentage	3.7%	1.4%	3.0%	4.4%	6.8%	9.4%	9.0%	10.1%	9.5%	7.9%	8.0%	26.9%

5.2 数値計算における設定

ここでは, 貸出期間 T 年, 元金均等毎月後払いという貸出に対して, 前小節で触れた非上場企業に対する (2.5) 式の意味での適正金利を算出する[15].

デフォルト・フリーの瞬間的短期金利は 1% 固定とする. すなわち $r_t \equiv 0.01$, $Z(0,t) = e^{-0.01\times t}$ とすることを意味する.

また, リスク・プレミアム関数は $\phi(t,x) = 1_{\{t\le T\}}\lambda x^\alpha$, $\alpha \ge 1, \lambda > 0$ とする.

$\tilde{\delta}$ の分布および比例ハザード・モデルの具体的な設定についてはそれぞれ以下で詳しく説明する.

$\tilde{\delta}$ の分布

(3.1) で与えられるように, デフォルト時の有利子負債に対するデフォルト時の資産処分価値の倍率を表す確率変数 $\tilde{\delta}$ は正規分布 $N(\mu_\delta, \sigma_\delta^2)$ に従うとする[16]
$\tilde{\delta}$ の平均は, 各企業の最も新しい期の (4.1) で計算した μ_δ とする. この仮定は適当であると考える.

一方, 標準偏差 σ_δ は合理的に与えることは困難である. デフォルト時の回収額やその時点における有利子負債額のデータ等が利用できれば, 統計的に $\tilde{\delta}$ の標準偏差を求めることも可能であるが, 本研究ではそのようなデータの存在を仮定しないので統計的アプローチはそもそも使うことができない.

今回の数値計算においては次の二つの方法で標準偏差を与える方法を試した[17].

- (TYPE 1) : μ_δ によらず σ_δ を一定におく. 例えば, $\sigma_\delta \equiv 0.5$ とおくと, $\mu_\delta = 1$ のときに, $\mathbf{P}(\tilde{\delta} \le 0) = 0.023$ となることを意味する. この場合は, $\sigma_\delta = \bar{\sigma}$ と表すことにする.

[15] 数値計算は MATLAB で行った.
[16] $\tilde{\delta}$ が正規分布に従う根拠はなく, あくまでも数値実験のための仮定にすぎない.
[17] いずれにしても, このような標準偏差の与え方はあくまでも数値実験のための暫定的なものであることを断っておく.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

・(TYPE 2)：平均 $\mu_\delta(>0)$ の正規分布の仮定のもとで, $\mathbf{P}(\tilde{\delta} \leq 0) = 0.01$ となる標準偏差を逆算して与える. すなわち

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-\mu_\delta)^2}{2\sigma^2}\right) dz = 0.01$$

を満たす σ を σ_δ とおく. また, $\mu_\delta \leq 0$ の場合は, $\mathbf{P}(\tilde{\delta} = 0) = 1$ とする. この場合は, σ_δ は μ_δ に依存するので, $\sigma_\delta = \sigma(\mu_\delta)$ と表すことにする.

前者は何も手がかりのない状況では自然な与え方であろう. 後者は非常に人工的な方法であるが,

- μ_δ が小さいときは, デフォルトしても実際に $\tilde{\delta}$ が負になる可能性は少ないが回収も期待できないことから, σ_δ は小さいと考えられること
- μ_δ が大きいときは, デフォルトの可能性は低いが, いざデフォルトした場合にはそのような企業の資産内容については不確実性が高かったとも考えられることから, σ_δ は大きいと考えられること

を反映した与え方になっている.

Fig. 3 はそれぞれの σ_δ の与え方に対して, いくつかの平均 μ_δ についての $\tilde{\delta}$ の密度関数の形状を表したのものである.

比例ハザード・モデルについて

(3.5) で与えたデフォルト確率の期間構造を与える比例ハザード・モデルを具体的に与える.

まず共変量の線形結合部分 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ は, SAF(Simple Analysis of Failure)2002 モデル（白田 [10] の第 4 章を参照）を一部利用する. SAF2002 モデルは, 決定木モデルを利用してモデルを構築するための財務指標を選択した後, 最終的に安全性指標となる SAF 値と呼ばれるスコアを多変量判別関数の形で計算するモデルであり, 具体的に以下のように与えている.

$$\text{SAF 値}\ (\boldsymbol{X}) = 0.01036X_1 + 0.02682X_2 - 0.06610X_3 - 0.02368X_4 + 0.70773.$$

ただし, X_1：総資本留保利益率[18], X_2：総資本税引前当期利益率[19], X_3：棚卸資産回転期間[20], X_4：売上高金利負担率[21] とする.

比例ハザード・モデルの共変量部分と SAF モデルは財務指標の線形結合で企業の信用力を表現しようという共通点はあるものの, 本来は異なる目的で作られているので, 比

[18] 総資本留保利益率 $= \dfrac{\text{期首・期末平均（資本の部-（資本金＋資本準備金））}}{\text{期首・期末平均負債・資本合計}} \times 100$

[19] 総資本税引前当期利益率 $= \dfrac{\text{税引前当期利益率}}{\text{期首・期末平均負債・資本合計}} \times 100$

[20] 棚卸資産回転期間 $= \dfrac{\text{期首・期末平均棚卸資産}\times 12}{\text{売上高+営業収入}}$

[21] 売上高金利負担率 $= \dfrac{\text{支払利息+社債利息+手形売却損}}{\text{売上高}} \times 100$

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

例ハザード・モデルの指標選択および係数の推定は独自に行うべきである．ただし，一般的に SAF 値が大きいほど信用力が高く，したがってハザード・レートは小さくなるはずであり，その逆も成り立つと考えられるので，比較的強い逆相関の関係があると考えられる．また，比例ハザード・モデルの推定には社債のスプレッドのデータを用いることが一般的であり，その意味では今回用意されるデータで比例ハザード・モデルの推定を一般的な方法で行うことはできないので，別のアプローチを考える必要がある．

これらのことから，少なくとも今回のような実験的な数値計算のためには，SAF モデルを援用することで十分目的を達成できると判断し，SAF モデルをそのまま共変量部分のベースに用いることにする．

ただし，本研究における比例ハザード・モデルの共変量としては，SAF2002 モデルの 4 指標に加え，B/S 調整後資産・負債カバレッジ率 μ_δ を加えた 5 指標を採用することにする．3.2 節でも少し触れたが，μ_δ は単独でもデフォルト判別力が高く，SAF2002 モデルの 4 指標との相関も高くない指標である[22]．また，SAF2002 モデルは 4 指標のうち 3 つが効率性，あるいは収益性をみる指標であり，μ_δ を追加することで，指標カテゴリーのバランスが高まること，さらに，総資本留保利益率は安全性を示す指標であるが，粉飾などに対しては指標の信頼性は担保されないという意味においても，スコアの信頼性は高められるものと考えた．実際，μ_δ を追加したことで，AUC 値，デフォルト・非デフォルトの判別精度向上が認められた[23]．

以上から，比例ハザード・モデルの共変量部分を $(\mu_\delta, \boldsymbol{X})$ の関数として $\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{X})$ と表し，

$$\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{X}) := -1 \times \{\text{SAF 値} + 0.1(\mu_\delta - 0.5) - 0.7504\} \tag{5.1}$$

と仮定する[24]．

また，ベースラインハザード関数は，正の定数 $\tilde{h}_0$ を用いて $h_0(t;\theta) = \theta\tilde{h}_0$ という定数であると仮定する．このとき，ベースラインハザード関数を時間について積分した $H_0(t;\theta)$ は

$$H_0(t;\theta) = \theta\tilde{h}_0 t$$

となる．

ここで，$\tilde{h}_0$ は十分小さいときに $\tilde{h}_0 \approx 1 - e^{-\tilde{h}_0}$ が成り立つが，この右辺は $\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{X}) = 0, \theta = 1$ としたときの $\mathbf{P}(\tau \leq 1)$ に等しい．そこで，景気状態が「中立」のときを $\theta = 1$ とし，景気状態が「中立」のときの $\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{X}) = 0$ である企業の 1 年間のデフォルト確率を 0.5% とすると，$\tilde{h}_0 = 0.005$ と見なすことができる．

[22] 前述の非上場企業の財務データを使用した SAF 値と，B/S 調整後資産・負債カバレッジ率の相関係数は 0.2488 であった．

[23] AUC 値：(SAF2002 & μ_δ, SAF2002)=(0.7823, 0.7820)，最良誤判定率：(SAF2002 & μ_δ, SAF2002)=(52.09%, 54.32%) 最良誤判定率 := 非デフォルトデータの誤判別率 + デフォルトデータの誤判別率

[24] SAF 値 $+ 0.1(\mu_\delta - 0.5)$ の部分は大きいほど安全性が高いことを意味するが，安全性が高いとハザード・レートの値は小さくなるので符号を反転させている．-0.7504 はスコア分布を適当に平行移動させるための定数である．

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

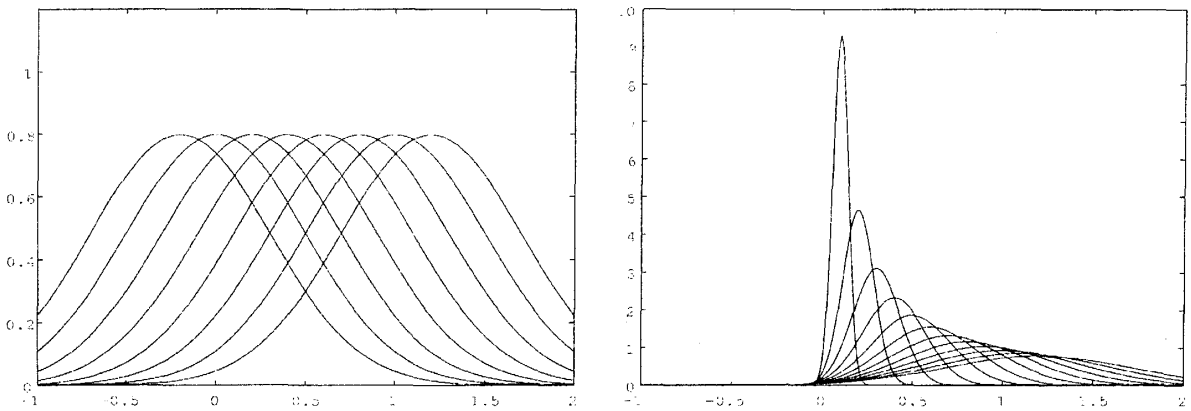

Fig. 3: Normal density functions of $\tilde{\delta}$. The left figure is based on $\sigma_\delta = 0.5$. The right figure is based on σ_δ such that $\int_{-\infty}^{0} 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu_\delta)^2}{2\sigma^2}}\,dz = 0.01$.

そこで, $\tilde{h}_0 = 0.005$ と仮定し, 景気状態が「好況」「不況」それぞれの場合に, $\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{X}) = 0$ である企業の 1 年間のデフォルト確率をそれぞれ 0.25% と 1% とすると, 「好況」の場合は $\theta = 0.5$, 「不況」の場合は $\theta = 2$ と表すことができる. 後の数値計算においては, $\tilde{h}_0 = 0.005$ と仮定する. θ の値も上述した景気状態に応じて, $0.5, 1, 2$ とする.

実際に非上場企業の財務データを用いて (5.1) 式で与えられる共変量の線形結合スコアを計算して, 非デフォルト群とデフォルト群それぞれのスコアの相対度数のヒストグラムを表したものが Fig. 4 である. 本来であれば, デフォルト確率モデルの性能向上を考える必要があるが, 特に μ_δ と適正貸出金利のプライシング式から得られる適正な貸出金利水準の大まかな関係を確認することが主目的であったので, 既存のモデルを簡単に改良したものを利用した. ヒストグラムを見る限りでは (5.1) 式のモデルで比較的良い判別ができていることが確認される. また, デフォルト確率モデルの予測力を評価するためにしばしば用いられる ROC(Receiver Operating Characteristic) 曲線 (Fig. 5) を xy 平面に描いたときに直線 $y = 0$ と $x = 1$ で囲まれる面積である AUC(Area Under the Curve) は 0.7823 であった[25]. AUC は 1 に近いほどモデルの予測力が高かったことを示すが, 0.7823 は悪くない数字であると考えた.

5.3 適正貸出金利の数値計算結果

上記の設定と注 2.1 および (2.5), (2.6), (2.7) から, パラメータ θ が所与の下で, B/S 調整後資産・負債カバレッジ率が μ_δ, SAF モデルの 4 指標ベクトルが $\boldsymbol{x}$ である企業に対する期間 T 年の元金均等毎月後払い貸出の適正貸出金利は次の式で計算される.

[25]ROC 曲線:デフォルト, 非デフォルトのフラグを持ついくつかの企業データに対し, 例えば情報 $\boldsymbol{X}$ を持つ企業の信用力は $S(\boldsymbol{X})$ によって計算することができるとする. この $S(\cdot)$ が, 信用力の高い企業に対しては, 高い値を, 一方信用力の低い企業に対しては, 低い値を返す関数であるとき, s をいろいろと動かし, $(x(s), y(s)) =$ (s よりも $S(\boldsymbol{X})$ が小さい非デフォルト企業割合, s よりも $S(\boldsymbol{X})$ が大きいデフォルト企業の割合) をプロットした曲線が, ROC 曲線である. もしも, $S(\cdot)$ に全く判別力が無い場合は, ROC 曲線は, $y = x$ の直線, あるいは, この直線を下回る曲線を描く. ROC 曲線や AUC に関するより詳しい説明は [11] を参照のこと.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

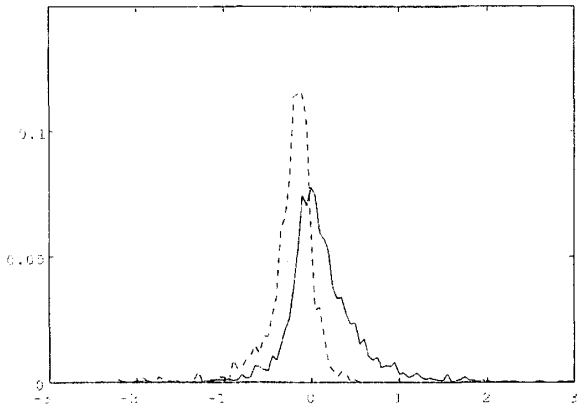

Fig. 4: The relative frequency distribution of $-\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{x})$ for defaulted group (broken line) and non-defaulted group (solid line).

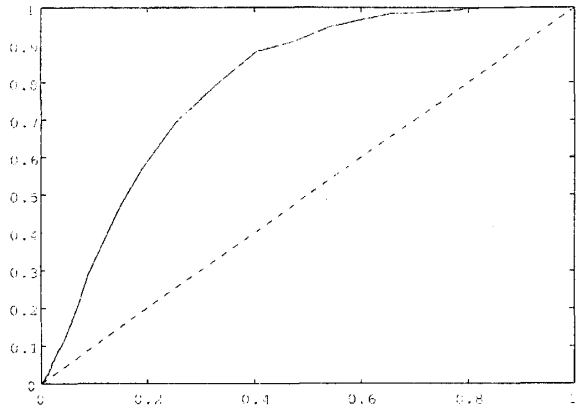

Fig. 5: ROC curve. AUC value is 0.7823.

$$c = c(T, \mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta) = \frac{A_1(T, \mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta)}{A_2(T, \mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta)}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
A_1(T, \mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta) &:= 1 + \lambda\big(1 - \mathbf{P}_{12T}(\mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta)\big) D_1(\mu_\delta) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{12T} e^{-0.01k/12} D_2(\mu_\delta)\Big(1 - \frac{k-1}{12T}\Big)\{\mathbf{P}_{k-1}(\mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta) - \mathbf{P}_k(\mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta)\} \\
&\quad - \frac{1}{12T} \sum_{k=1}^{12T} e^{-0.01k/12} \mathbf{P}_k(\mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta), \\
A_2(T, \mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta) &:= \sum_{k=1}^{12T} \mathbf{P}_k(\mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta) e^{-0.01k/12}\Big(1 - \frac{k-1}{12T}\Big) \\
\mathbf{P}_k(\mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta) &:= \mathbf{P}\left(\tau > \frac{k}{12} \middle| \mu_\delta, \boldsymbol{x}, \theta\right) = \exp\left(-\left(\frac{\theta \tilde{h}_0 k}{12}\right) \exp\big(\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{x})\big)\right)
\end{aligned}$$

(5.2)

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

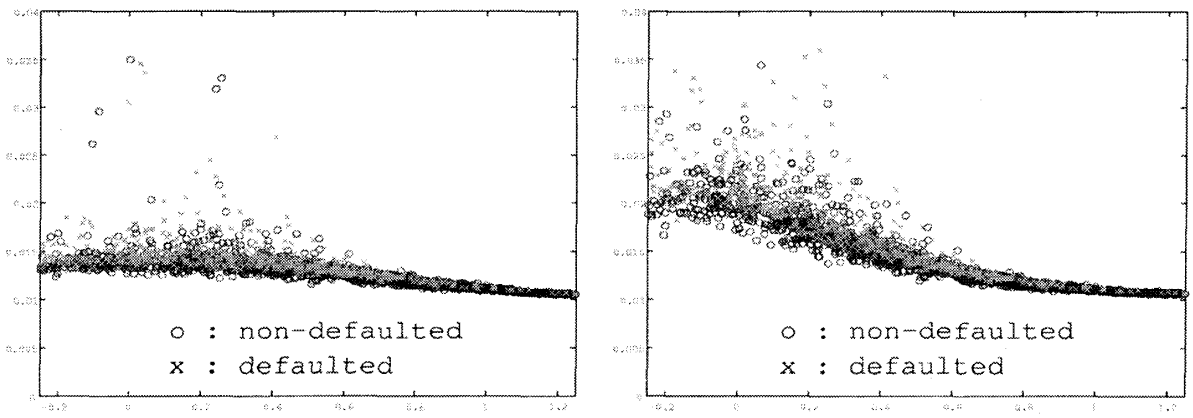

Fig. 6: Scatter plots of relevant loan interest rate for $(\alpha = 3, \lambda = \frac{1}{3})$. The left figure shows the result for $\sigma_\delta = 0.5$ (TYPE 1) of standard densities. While the right figure shows the result for TYPE 2. The horizontal axis shows the value of μ_δ and the vertical axis shows the relevant loan interest rate.

$$
\begin{aligned}
D_1(\mu_\delta) \;&:=\; \int_{\mathbf{R}} (1-G(z))^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta^2}} \exp\Big(-\frac{(z-\mu_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}\Big) dz \qquad (G(z) = \max\{\min\{z,1\},0\}) \\
&\begin{cases} \approx 1 \qquad (\sigma_\delta = \sigma(\mu_\delta), \mu_\delta \le 0 \text{ のとき}) \\ = \displaystyle\int_0^1 (1-z)^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta^2}} \exp\Big(-\frac{(z-\mu_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}\Big) dz + \mathbf{N}\left(-\frac{\mu_\delta}{\sigma_\delta}\right) \qquad \text{(otherwise)} \\ \quad (\text{ただし}, \sigma_\delta = \sigma(\mu_\delta), \mu_\delta > 0 \text{ のときは } \mathbf{N}\left(-\frac{\mu_\delta}{\sigma_\delta}\right) = 0.01) \end{cases} \\
D_2(\mu_\delta) \;&:=\; \int_{\mathbf{R}} \frac{G(z)}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta^2}} \exp\Big(-\frac{(z-\mu_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}\Big) dz \\
&\begin{cases} \approx 0 \qquad (\sigma_\delta = \sigma(\mu_\delta), \mu_\delta \le 0 \text{ のとき}) \\ = \displaystyle\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta^2}} \exp\Big(-\frac{(z-\mu_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}\Big) dz + \mathbf{N}\left(-\frac{1-\mu_\delta}{\sigma_\delta}\right) \qquad \text{(otherwise)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

ただし, $\mathbf{N}(x)$ は標準正規分布関数 とする

$$
\mathbf{N}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz.
$$

また $D_1(\mu_\delta)$ と $D_2(\mu_\delta)$ の $[0,1]$ 区間の積分は数値積分によって計算する.

この式を用いて, 非上場企業 3,246 社に対して個別の適正な貸出金利を算出した. $(\alpha, \lambda) = (3, 1/3)$ のときの適正金利の散布図を Fig. 6 に表している. ここで, 横軸は μ_δ の値 ($-0.25 \le \mu_\delta \le 1.25$ の範囲のみ), 縦軸は金利水準を表す. また, ○は非デフォルト企業, ×はデフォルト企業を表す.

B/S 調整後資産負債カバレッジ率 μ_δ の値が同じであっても, 適正金利にばらつきがあるのは, デフォルト確率を算出する際に使用している他の 4 指標の影響があるためである. μ_δ の値が大きいところでは全体的にデフォルト可能性が低いために, 金利のばらつきが小さくなっていると考えられる. また, μ_δ の小さいところで, 実際のデフォルト企業（×印）の適正金利が相対的に高く算出されていることが確認できる.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

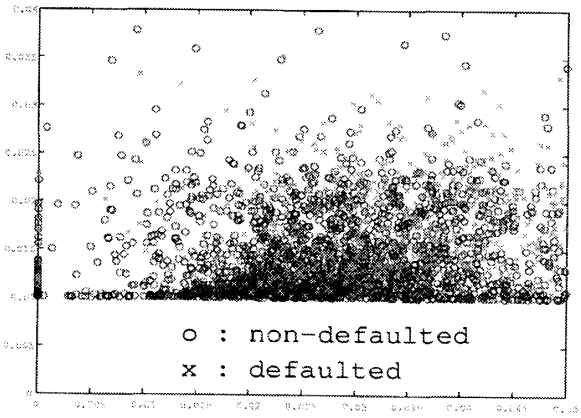

Fig. 7: Scatter plot of loan interest rate. The horizontal axis shows effective loan interest rate. This value is calulated as Interest expense (P/L) ÷ Average of financial obligations (B/S). The vertical axis shows relevant loan interest rate(=calculated from this model).

Fig. 7 は, 前述の中小企業データから算出される各企業の実質負担利子率と, 本モデルによる適正金利の散布図を描いたものである. この実質負担利子率は, 次の数式 (5.3) に基づき計算している[26].

$$\text{実質負担利子率} = \frac{\text{当年度支払利息}}{(\text{前年度有利子負債残高} + \text{当年度有利子負債残高})/2} \tag{5.3}$$

この図を見たところでは, これら 2 種類の金利の間には, 相関は見られない[27]. そこで, 実質負担利子率と財務状態との関係を見てみることにする. 財務状態は, μ_δ および SCORE$(\mu_\delta, \boldsymbol{x})$ を代理変数として用いた[28]. これらの間には何らかの関連性が予想され, 散布図を描けば, 財務状態が良くなる程, 実質負担利子率は下がるはずであるが, Fig. 8 左, および Fig. 8 右からは, これらの間に予想された相関性は見られない. もちろん, 実際の融資においては, 個別に担保などを取り保全を強化することもあるため, 必ずしも対角線上に点が散布されるとは限らないが, その場合は, 担保措置によるデフォルトリスクの低減を反映した散布が見られるはずである. しかしながら, 図からはこういった形状も確認されず, 現状の融資の金利設定においては, 財務状態あるいは回収率などを十分考慮しているとは言い難い結果を得た[29].

[26] この計算式から算出された利子率が, 必ずしも実際の金利であるとは言えないが, 支払った金融費用を負債の平均値で割った値であり, 実際の融資金利とは強い相関関係があるものと考えた.

[27] 何らかの関連性があれば, 右上がりの対角線上に点が散布されることが予想された.

[28] μ_δ は, Table 1 で, SCORE$(\mu_\delta, \boldsymbol{x})$ については, Fig. 4 で, デフォルトとの関係性が高いことが確認されている.

[29] 多くの金融機関には, 理論的な計算結果ではないもののおおよその倒産確率や担保状況などを考慮した貸出金利のガイドラインがあって, 制度としてこれに基づいて金利設定するよう定められている. しかしながら実際は, ガイドラインの多くが, 金融機関の信用リスクに対する態度 (貸出姿勢) を反映させたものではないため, ガイドラインよりも寧ろ, 個別の事情 (貸出先に競合する他社が設定している金利など) を重視して金利設定されることが多い.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

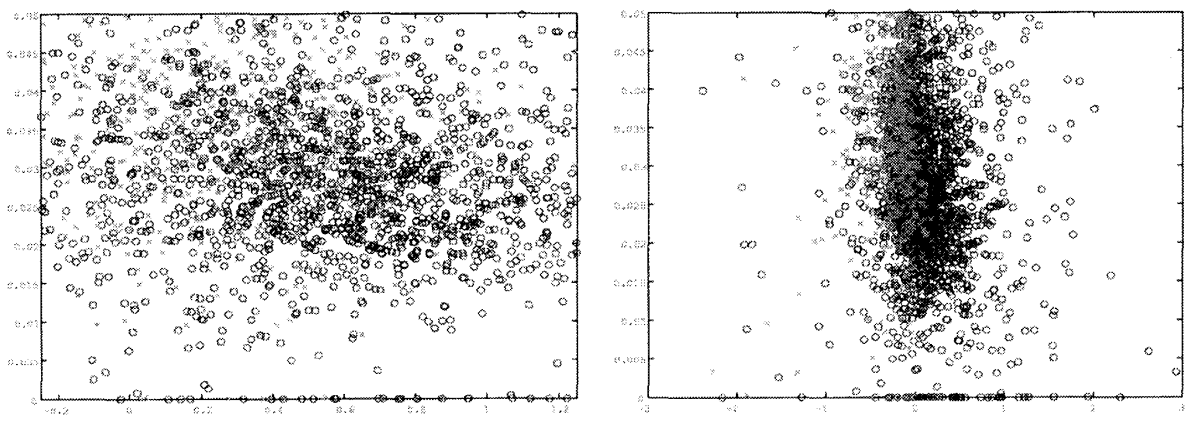

Fig. 8: Scatter plots of effective loan interest rate and financial state values. The left figure shows effective loan interest rate and μ_δ. The right figure shows effective loan interest rate and $-\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{x})$. The horizontal axis shows financial state values and the vertical axis shows interest rate. "o" stands for a non-defaulted company. "x" stands for a defaulted company.

5.4 プライシングに対するパラメータの影響について

ここでは, モデルに含まれる各種パラメータをいくつかの値に置き換えることで, 金利水準が受ける影響を見る. 変動させるパラメータは, α, λ, θ, σ の4種で, 共変量項は, μ_δ の値のみに連動するものとした. 具体的には, 本来, 数式 (5.1) によって計算される共変量項は簡略化し $\mathrm{SCORE}(\mu_\delta) = (-1) \times \{0.1(\mu_\delta - 0.5)\}$ という数式によって得られた値を利用している. 基本的なパラメータはつぎの通り設定した.

$$\text{Basic setting} := (\alpha, \lambda, \theta, \sigma_\delta, r, \tilde{h}_0, K, T) = (3, 1/3, \star 1, \mathrm{TYPE1}, 1\%, 0.002177, 12, 1\mathrm{year})$$

ただし, $\star$ 1 : θ は, (0.5, 1, 2) をそれぞれ等しい確率で取るものとして計算する. また, $\tilde{h}_0$ の値は, 99.5%の生存確率を意味する. このうち注目しているパラメータのみを変動させ, それが金利水準に与える影響について考察する.

α および λ の比較

リスクプレミアム関数のパラメータ (α,λ) のうち, Fig. 9 左は, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ と変えた場合および, 右は $\lambda = 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ と変えた場合をそれぞれ表している.

Fig. 9 左からは, $\alpha = 1$ を基準として見ると, $\mu_\delta = 0$ あるいは, $\mu_\delta = 1$ の近辺で, 相対的にカーブが密になっており, 一方で $\mu_\delta = 0.5$ 近辺では金利水準の差が開きカーブが疎になっていることが確認できる. さらに, $\alpha = 1$ との差が最も広がる μ_δ について見ると, $\alpha = (2, 3, 4, 5)$ の順に, $\mu_\delta = (0.47, 0.43, 0.41, 0.39)$ となっており, α の値を大きくすると, 差が最も広がる μ_δ の値が小さくなるという関係がある. これは, $y = (1-x) - (1-x)^\alpha, x \in [0, 1]$ という式について考えれば当然の結果とも言えるが, α は, ある基準値よりも μ_δ が小さくなるときは極端に厳しく見る（金利設定をする）などといった設定にも対応できる感応度パラメータであると言える.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

Fig. 9 右からは, λ の値の設定により, 全体的な金利を上下させることが確認できる. さらに, $\lambda = 1/1$ のときと, $\lambda = 1/2$ とを比較すると, $\mu_\delta = (0, 0.5, 1)$ のときの金利差は, $(0.37\%, 0.17\%, 0.04\%)$ であり, μ_δ の値が小さくなると差が急激に広がっている事が分かる. このことから, λ が全体的な金利水準を調整することに加え, α によってつけられた感応度の強弱を調整する効果を持つパラメータであると言える.

θ の比較

Fig. 10 左からは, 好不況に応じ金利水準が上下することが見て取れる. さらに, 共変量の値に応じて金利が受ける影響が異なることが確認できる. 具体的に $\mu_\delta = 1$ のときの金利は, 景気が（好況, 中立, 不況）の順に, （1.06%, 1.11%, 1.23%) であり, 好況と中立時の金利差：0.05%, 中立と不況時の金利差：0.12% (2.4 倍) となった. 一方, $\mu_\delta = 0$ のときは, (1.31%, 1.62%, 2.23%) であり, 好況と中立時の金利差：0.31%, 中立と不況時の金利差：0.61%(1.97 倍) となった. これは, 財務内容の良い企業が受ける不況の影響は, 財務内容の悪い企業が受ける影響よりも大きいことを意味しており, 新 BIS 規制における景気影響の図式[30]との整合も取れているモデルであると言える.

σ の比較

Fig. 10 右は, $\tilde{\delta}$ の密度関数の標準偏差 (σ_δ) を, 固定値に設定した場合 (TYPE 1) と, μ_δ の水準に合わせて変化させた場合 (TYPE 2) の, 金利水準を表している. 金利水準は, TYPE 2 を利用すると, TYPE 1 を利用する場合よりも, 財務内容の良い企業の金利は低めに設定し, 財務の内容の脆弱な企業の金利は高く算出することが分かる. しかしながら, μ_δ の値が 1 を大きく超える場合については, 同時に標準偏差の値も大きくなるため, 損失発生ゾーン (μ_δ が 1 を下回る領域) に分布が掛り, 金利水準が下げられる限界も高くなる. また, TYPE 2 において μ_δ の値が 0 を下回る場合は, $\mathbf{P}(\tilde{\delta} = 0) = 1$ としているため, 適正金利のカーブが滑らかでなくなっていることが図から確認されるが, 前後との整合は保たれており, 大きな問題は無いものと考える. どちらの標準偏差計算方法を選択するかについては, 実際の回収データが倒産直前の B/S 調整後資産負債カバレッジ率と比べ, 大きく乖離する場合もあることが確認されれば TYPE 2 を, 一方で乖離することが無いものと確認された場合は TYPE 1 を利用することになろう. いずれにしても, 標準偏差計算手法の選択は実データを用いた検証が急がれる.

[30]内部格付手法における中小事業法人向け PD を計算する場合, まず関係係数 (R) を $R = 0.12 \times \frac{1-e^{-50\times PD}}{1-e^{-50}} + 0.24 \times \left\{1 - \frac{1-e^{-50\times PD}}{1-e^{-50}}\right\} - 0.04 \times \left\{1 - \frac{\text{売上}-5}{45}\right\}$ と計算し, つぎの式に代入してストレス後の PD を計算する. $PD^{Conditional} = \mathbf{N}\left\{(1-R)^{-\frac{1}{2}} \times G(PD) + \left(\frac{R}{1-R}\right)^{\frac{1}{2}} \times G(0.999)\right\}$. ただし, $G(\cdot)$ は, 標準正規分布関数においてパーセンタイル点を返す関数.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

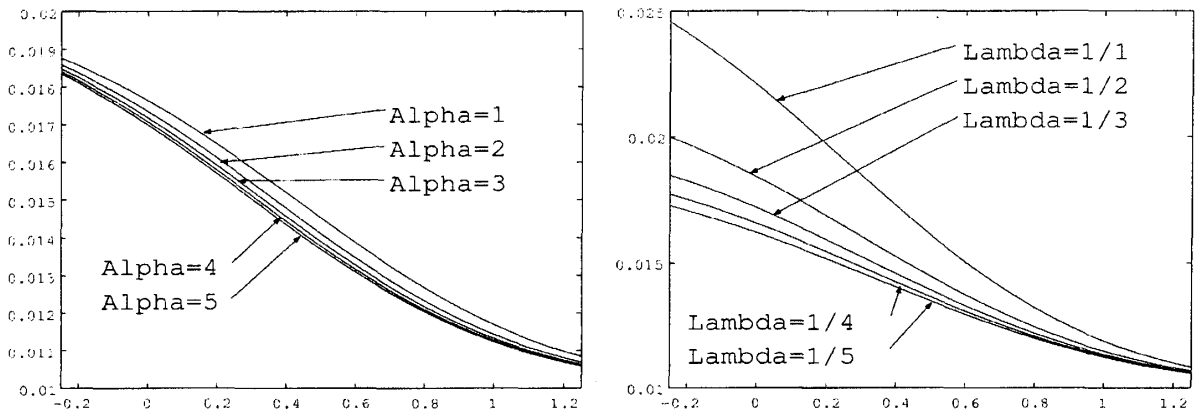

Fig. 9: Relevant loan interest rate curves. The left figure is under the basic setting for $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$. The right figure is under the basic setting for $\lambda = 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$.

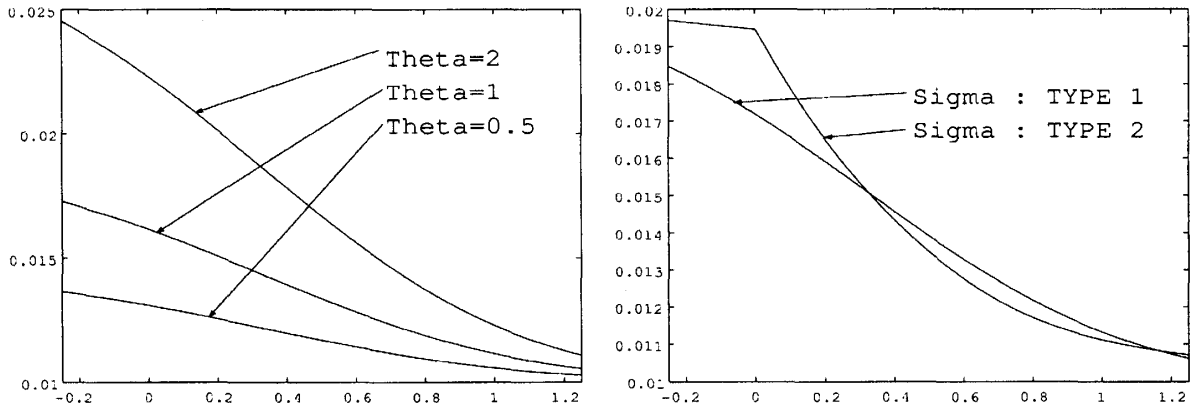

Fig. 10: Relevant loan interest rate curves. The left figure is under the basic setting for $\theta = 0.5, 1, 2$. The right figure shows the difference between TYPEs of σ_δ.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

Table 2 は, 個社のプライシングにおけるパラメータの影響についてまとめたものである. サンプルとして抽出した企業は, 建設業に属する同程度の総資産額および売上高を持つ $A \sim E$ の 5 社で, $A \sim D$ は非倒産企業であり, E は倒産企業である. 企業 D と E の間で, 標準偏差の計算方法により適正金利の大小関係が変わっているが, これは, μ_δ の値により $\tilde{\delta}$ の分布の影響を受けたためである[31].

Table 2: Relevant loan interest rate of five non-listed companies. These companies belong to same type of business. The sizes of sales and assets of these companies are at same level. Company A~ D are non-defaulted. Company E is defaulted.

Company	Basic setting	$\alpha = 1$	$\alpha = 5$	$\lambda = 1$	$\lambda = \frac{1}{5}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = 2$	σ_δ : TYPE 2
A (μ_δ=115.95%, SAF=0.936)	1.07%	1.09%	1.06%	1.08%	1.06%	1.03%	1.11%	1.07%
B (μ_δ=80.74%, SAF=0.854)	1.17%	1.22%	1.16%	1.20%	1.16%	1.07%	1.29%	1.16%
C (μ_δ=27.39%, SAF=0.975)	1.28%	1.33%	1.26%	1.22%	1.29%	1.12%	1.48%	1.47%
D (μ_δ=26.39%, SAF=0.659)	1.39%	1.46%	1.36%	1.30%	1.41%	1.17%	1.67%	1.66%
E (μ_δ=47.40%, SAF=0.438)	1.41%	1.50%	1.39%	1.41%	1.42%	1.18%	1.71%	1.53%

6 まとめ

本研究では, 単に個別の融資案件に対する可否を出力するものではなく, リスク・プレミアムという形で表現される金融機関の信用リスクに対する態度に整合的となる貸出債権のプライシングの枠組みを提案し, 元金均等返済型の適正貸出金利の算出式を導出した.

実際にプライシング・モデルを適用させるためには, 回収率分布, デフォルト確率の期間構造およびリスク・プレミアム関数を特徴づけることが必要である. 基本的にその特徴付けのために外部から入手しなければならない情報は, 市場の無リスクな金利の期間構造と貸出対象企業の直近の財務データだけであるので, 実務でも適用しやすくなっている. もっともモデルを利用する際には, リスク・プレミアム関数の形状や各種パラメータなど主観的に決めなければならない項目もいくつもあるので実際には試行錯誤を重ねながら, それらを決定していくことになると思われる. それでも, 関数形やパラメータの決定を通じて信用リスクに対する態度を決めれば, 大多数の中小企業に対して首尾一貫したプライシングが可能となるこのモデルは, 金融機関にとって非常に有用であると考える.

また, 特に回収率分布は, B/S 調整後資産・負債カバレッジ率と呼ぶ財務指標で特徴づけられるものとし, 具体的に B/S から B/S 調整後資産・負債カバレッジ率を計算するための資産の調整法について言及した.

モデルの応用例として, 3,000 社近い非上場企業の財務データを用いて提案したプライシングモデルにしたがって適正貸出金利の数値計算を行った. さらに, リスク・プレミアム関数のパラメータや企業を取り巻く景気環境の状態変数の値を変化させ, プライシングへの影響を見るための数値実験を行った. 数値分析の結果を見る限り, パラメータ等をうまく設定する必要はあるが, プライシング・モデルとして十分に有望であると考えられる.

日本でも最近ようやく回収率に関するデータベースを整備する動きが出始めており, 回収率も考慮した融資金利の設定という考えが今まで以上に定着するものと予想される.

[31] 比例ハザードモデルの共変量部分は, 企業 D, E の順に $-\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{x}_D) = 0.6354 > -\mathrm{SCORE}(\mu_\delta, \boldsymbol{x}_E) = 0.4354$ となっている.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

データベースができれば, デフォルト直前, 直後のB/Sも含めた企業状態を浮き彫りにすることができる可能性も高く, 回収率分布のファインチューニングなどが進み, 本モデルの有効性はますます高まるものと確信している.

今後は, 本提案モデルを貸出ポートフォリオに応用して, ポートフォリオとしての最適プライシング法を研究したい. そのためには, 信用リスクの依存性や分散効果を注意深く考察していく必要があろう. さらに市場が整備されてきているローン担保証券（CLO）のプライシングなどへの応用を考えていきたい.

References

[1] 安道 知寛, 山下 智志, 格付け・財務データを用いた誘導型モデルによるデフォルト確率期間構造・回収率の同時推定., 金融庁金融研究研修センター FTRC discussion paper, **18**(2005).

[2] Carty, L. V., Lieberman, D., Defaulted Bank Loan Recoveries., *A Moody's Special Report*, 1996 (http://defaultrisk.com/pp_recov_34.htm).

[3] Carty, L. V., Bankrupt Bank Loan Recoveries", *Moody's Special Comment*, 1998 (http://www.http://defaultrisk.com/pp_recov_33.htm).

[4] Duffie, D., Singleton, K., Modeling Term Structures of Defaultable Bonds., *Review of Financial Studies*, **12**(1999), 687-720.

[5] Duffie, D., Singleton, K., Credit Risk., Princeton University Press, U.S.A, 2003.

[6] Gupton, G. M., Gates, D., Carty, L. V., Bank Loan Loss Given Default., *Moody's Special Comment*, 2000 (http://www.defaultrisk.com/pp_recov_16.htm).

[7] Gupton, G. M., Stein, R. M., LOSSCALC: MODEL FOR PREDICTING LOSS GIVEN DEFAULT(LGD), *Moody's—KMV Special Comment*, 2002 (http://www.moodyskmv.com/research/whitepaper/losscalc_methodology.pdf).

[8] Hamilton, D. T., Carty, L. V., Debt Recoveries for Corporate Bankruptcies., *Moody's Special Comment*, 1999 (http://www.moodyskmv.com/research/whitepaper/46119.pdf).

[9] Ramey, V. A., Shapiro, M. D., Displaced Capital: A Study of Aerospace Plant Closing., *Jourmal of Political Economy*, 2001, 958-992.

[10] 白田 佳子, 倒産予知の実務, 日本経済新聞社, 東京都, 2003.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

[11] 山下 智志, 川口 昇, 敦賀 智裕, 信用リスクモデルの評価方法に関する考察と比較., 金融庁金融研究研修センターディスカッションペーパー, 2003.

A デフォルトリスクが無い場合の適正金利 c について

デフォルトリスクが無い場合は, 数式 (2.1) の右辺第二項は無視することができるので, $\Lambda(0,s)=e^{-rs}$ とすると, つぎの式を満たす c がどのようになるかを見ればよい.

$$1=\int_0^T\left\{\frac{1}{T}+\left(1-\frac{s}{T}\right)c\right\}e^{-rs}ds$$

ここで

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{1}{rT}(1-e^{-rT})+\frac{c}{r}(1-e^{-rT})+\frac{c}{r^2T}\left\{rTe^{-rT}+e^{-rT}-1\right\}\\ &= \frac{1}{r^2T}\{(r-c)(1-e^{-rT})+crT\} \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

であるので,

$$1=\frac{1}{r^2T}\{(r-c)(1-e^{-rT})+crT\} \iff c=r$$

B 回収率分布の時間による推移について

元金均等返済方式の企業向け貸出を考えるとき, 返済の進捗と共に資産と負債のバランスも変化するため, 残存元本に対する回収率分布の形状も変化していくと考えるのが自然である.

このことを簡単なモデルで確認する. 対象となる新規の貸出の返済が終了するまで, それ以外の B/S 各項目は一定と仮定し, 当初資産額は A, 負債 D, 新たな借入 d, 新たな借入に対応する売上全体を S とし, 各期ごとの売上は一定（すなわち, 各期の売上は $\frac{S}{n}$）とする. また, 返済期日ごとに売上に α を掛けた分が余剰として資本に加えられるとする.

Table 3 は, n 回分割返済の新たな貸出をして返済完了するまでの負債額, 資産額, および B/S 調整後資産・負債カバレッジ率 μ_δ の推移をまとめたものである.

Table 3 からわかるように, 返済期日ごとに μ_δ は一般的に変化していくので, 時間の経過とともに回収率の分布も変化すると言える. しかし, ある程度の大きさの企業であれば, 一般的に新規の借入金額は総資産額や総負債額に比して少額である（$d \ll A, D$）ことや, プロジェクトから得られる純利益率は 一般的に総資産額に大きな影響を与える割合ではない（$\alpha \ll 1$）ことをふまえて, 回収率の分布形が時間に依らないものとしても影響は少ないと考える.

数値計算の対象とした資本金 1 千万から 5 千万円程度の企業に対して, 上のような状況が一般的に成り立つかどうかは細かい分析を要するが, 精緻な財務データ（返済期間ごとの B/S および損益計算書 (P/L)）が入手できるのであれば, Table 3 のようなモデルに従って, 時間に依存する回収率分布のモデルを導入することも可能である.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

Table 3: Transitions of Debt, Assets and μ_δ.

Time	0	1	2	$\cdots$	i	$\cdots$	n
Debt	$D+d$	$D+\frac{n-1}{n}d$	$D+\frac{n-2}{n}d$		$D+\frac{n-i}{n}d$		D
Assets	$A+d$	$A+\frac{n-1}{n}d+\frac{S\alpha}{n}$	$A+\frac{n-2}{n}d+\frac{2S\alpha}{n}$		$A+\frac{n-i}{n}d+\frac{iS\alpha}{n}$		$A+S\alpha$
μ_δ	$\frac{A+d}{D+d}$	$\frac{nA+(n-1)d+S\alpha}{nD+(n-1)d}$	$\frac{nA+(n-2)d+2S\alpha}{nD+(n-1)d}$		$\frac{nA+(n-i)d+iS\alpha}{nD+(n-i)d}$		$\frac{A+S\alpha}{D}$

著者紹介

金子 拓也 （正会員）〒100-8106 東京都 千代田区 大手町 1-1-2. 東京工業大学 大学院 社会理工学研究科 博士課程在籍（りそな銀行 リスク統括部 金融テクノロジーグループ在籍）. IEICE などの会員.

中川 秀敏 （非会員）〒152-8550 東京都 目黒区 大岡山 2-12-1. 2000 年 東京大学大学院 数理科学研究科博士課程修了, 博士（数理科学）. MTEC(現：三菱 UFJ トラスト投資工学研究所) を経て, 東京工業大学 大学院 イノベーションマネジメント研究科 助教授. 数理経済学研究センター, JAFEE, JARIP, 日本 OR 学会などの会員.

（2006年 2 月27日受付）
（2006年 4 月18日最終稿受付）

NII-Electronic Library Service