

## 4 $t$ 分布 2 ファクターモデルを用いた中小企業 CLO のデフォルト依存関係の分析\*

吉規寿郎・中川秀敏

**概要** 本研究では、中小企業 CLO の組成ポートフォリオのデフォルトリスクを、北野 (2007) で導入されている正規分布 2 ファクターモデルおよび新たに提案する  $t$  分布 2 ファクターモデルに基づいて分析する。2 ファクターモデルを採用することにより、景気変動のような全債務者共通の変動要因 (グローバルファクター) に加えて、業種や地域など特定のカテゴリ内のみ共通する変動要因 (カテゴリ内共通ファクター) を考慮することが可能になる。また、各ファクターが  $t$  分布に従うと仮定することで、複数の潜在変数の分布について裾部分での強い依存関係が表現可能になることが期待される。具体的には、実際の CLO の組成時点の個社データおよび期中のデフォルトデータに基づいて、両モデルでのパラメータの最尤推定を行う。また、推定されたパラメータ値を用いたモンテカルロ・シミュレーションによって裏付け資産プールの損失分布を求めて、モデル間のリスク評価の差異を考察する。分析結果として、カテゴリとファクターの分布に関する他の組み合わせパターンと比べて、「企業規模」カテゴリ区分に基づく  $t$  分布 2 ファクターモデルを適用した場合に、デフォルトリスクの高まりが懸念されている案件に対して適度に保守的なリスク評価が与えられたことが確認された。

**Keywords** : 潜在変数法, 正規分布 2 ファクターモデル,  $t$  分布 2 ファクターモデル, 中小企業 CLO.

---

\* 本稿は、吉規 (2009) の内容の一部を抜粋し加筆・修正を行ったものであるが、使用したデータおよび分析結果は全般的に更新されている。本研究に関する責任はあくまでも著者個人にあり、本研究の内容は著者の所属する機関とは関係ないことをお断りしておく。また本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (A)21243019 の補助を一部受けて実施されている。さらに、本研究の改善につながる多数の有益なご指摘をいただいた匿名のレフェリーに謝意を表したい。

## 1 はじめに

### 1.1 本研究の背景と目的

いわゆるサブプライム問題を契機に、世界中で証券化商品の評価やその格付け手法に対する懐疑的な見方が広がったが、2009年秋の時点では依然として証券化市場は回復に至っておらず、格付け会社に対する規制も引き続き検討されている。日本においても、CDO (collateralized debt obligation: 債務担保証券) や CMBS (commercial mortgage backed securities: 商業用不動産ローン担保証券), REIT (real estate investment trust: 不動産投資信託) などの代表的な証券化商品に格下げやデフォルトが集中して発生し、2009年秋の時点でも、一部の RMBS (residential mortgage-backed securities: 住宅ローン担保証券) を除いて、状況は好転していない。

また、中小企業向けローンの証券化商品である CLO (collateralized loan obligation: ローン担保証券) や CBO (collateralized bond obligation: 社債担保証券) (以下では両者をまとめ、一般に幅広く普及している名称を用いて「中小企業 CLO」と言う) についても、スプレッドの拡大や継続案件の組成見送りの動きがおき、2009年秋の時点でも市場は再開の動きがほとんどみられない。その背景には、投資家が中小企業に対する信用リスクを過大に見積もる傾向にあることが挙げられる。中小企業 CLO を評価するためには、個別企業の推定デフォルト確率 (以下では「PD」(probability of default) と言う) や CLO 自体の格付けの情報が非常に重要である。しかしながら証券化商品への懸念の広がりに伴って、それまで PD 算出に使われてきたスコアリングモデルや格付け会社の格付け手法に対して懐疑的な見方が広がっており、それが投資家の厳しい見方につながっていると考えられる。

中小企業 CLO に関連したスコアリングモデルや格付け手法に対して懐疑的な見方が広まった直接的要因の1つとして、組成時点では最上位格付けのトリプル A を取得していた『東京都 CBO オールジャパン』B 号特定社債がデフォルトしたことが挙げられる<sup>1)</sup>。また別の理由として、2008年以降中小企業の倒産件数の大幅な増加が観測されていること (直近の増加については図 4-1 を、

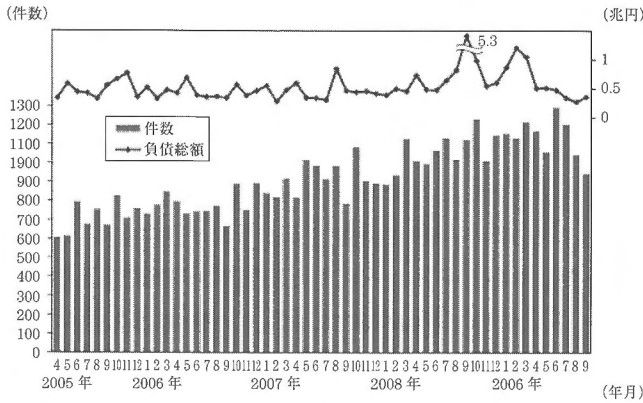


図 4-1 月次の企業倒産件数および負債総額の推移  
 足元は落ちつつあるものの、2008年3月以降で増加傾向がみられる。(出所：帝国データバンク全国企業倒産集計 2009年10月報)

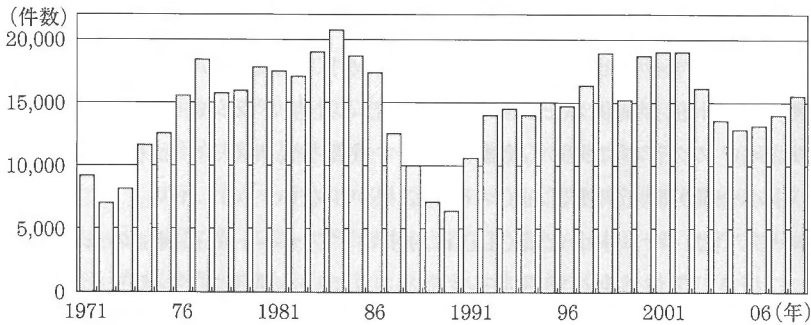


図 4-2 長期的な企業倒産の年度推移  
 中長期的にはバブル崩壊後の倒産件数に近づきつつある。(出所：東京商工リサーチ全国企業倒産状況)

- 1) 中小企業 1,200 社以上の社債 914 億円を束ねた証券化商品で、東京都債券市場構想の一環として 2006 年 3 月に組成され、A 号特定社債：40 億円（当初格付け AAA）、同 B 号：831 億円（AAA）、同 C 号：7 億円（AA）、同 D 号：3 億円（A）が発行された（格付け会社はスタンダード&プアーズ）。発行額の最も多い B 号特定社債は、2007 年 4 月に格下げ方向でクレジット・ウォッチに指定されて以降大幅な格下げを繰り返し（同 7 月に AA、同 9 月に BB+、2008 年 4 月に CCC-）、予定償還日での償還率は 83.95%にとどまった。

長期的な水準については図 4-2 を参照されたい) や、メガバンクが中心となって積極的に推進してきたビジネスローンや新銀行東京のスコアリング融資で大きな損失が発生したことが考えられる。

そもそも CLO は、原債権である中小企業向けローンが生み出すキャッシュフローを優先、メザニンなどトランシェごとに再分配した商品である。優先・劣後構造を用いて再分配の方法を設計することによって、CLO ごとの信用力は裏付け資産である債権ポートフォリオの信用力とは異なる形に柔軟に加工される。ポートフォリオ中の債務者のデフォルト発生状況によって各 CLO のペイオフが変化するため、CLO のリスク評価にあたっては個々の債務者の信用力の把握だけでなく、原債権ポートフォリオのデフォルトに関する依存関係の把握が重要になる。

要するに、中小企業 CLO のようなポートフォリオのクレジットリスクを正しく評価するためには、PD やデフォルト発生時の期待損失率 (loss given default, 以下では「LGD」と言う) といった個社別の信用リスクをどう計測するかという問題だけでなく、債務者間のデフォルト依存関係をいかにモデル化して計量化するかという問題も併せて考えていく必要がある<sup>2)</sup>。特に、後者のデフォルト依存関係のモデル化は、CLO の上位トランシェの評価や金融機関の信用リスク管理に大きく影響を及ぼす重要な要素の 1 つと考えられているが、中小企業分野での実証面での研究成果が少ない。

本研究では、特に中小企業 CLO に対するデフォルト依存関係のモデルとして、これまで格付け会社で用いてきたとされている正規コピュラモデルに替えて、 $t$  分布 2 ファクターモデルと名付けられるモデルを導入して、実際に日本政策金融公庫<sup>3)</sup> (以下では、「日本公庫」と言う) が組成した CLO の組成時点の個社データおよび期中のデフォルトデータを分析することを通じて、実務で

2) ただし、中小企業 CLO は一般的に無担保融資を原債権とするため、回収率は 0% とされて評価されることが多い。このため、本研究でも LGD の推定は扱わない。

3) 一般の金融機関が行う金融を補完することを旨としつつ、国民一般、中小企業者および農林水産業者の資金調達を支援するための金融の機能を担うこと等を目的とする政府系金融機関。2008 年 9 月まで中小企業金融公庫として中小企業 CLO の組成支援を手掛けていたが、中小企業金融公庫、国民生活金融公庫など政府系金融機関との統合により組織変更。日本政策金融公庫の中小企業事業部門が証券化支援業務を承継している。

も適用可能な新しい中小企業ポートフォリオのリスク評価方法および格付け手法を検討することを目的とする。

本研究を契機に、CLO に関する様々なデータの実証研究が進み、ひいては金融機関の信用リスク管理や流動化資産の評価の高度化を通して、信用リスク市場の効率化に資することが期待できる。

## 1.2 研究方法および結果の概要

本研究の分析対象は、2004 年以降に日本公庫のコーディネートによって組成された日本の中小企業 CLO である。2008 年 3 月までに組成された 13 件の日本公庫 CLO は、累計 6,000 社強が対象となっている。CLO 融資を利用した中小企業の実績デフォルト率は、平均的にはスコアリングモデルにより算出された PD (以下「モデル PD」と言う) の 3 倍前後で推移しており、格付け会社がモデル PD を保守的に数倍して格付けしていることを勘案すると、全体としては格付け会社が当初に設定していた状況に整合的であると判断できる。その一方で、個々の日本公庫 CLO の実績をみると、デフォルトがほとんど発生していない案件と、当初に想定されていた PD を大きく上回るデフォルトが集中して発生し信用補完率が非常に低下している案件に分かれる。後者に該当する 2 案件の優先受益権およびメザニン受益権が、2009 年に入り、ムーディーズジャパン (以下、「ムーディーズ」と言う) および格付投資情報センター (以下、「R&I」と言う) によって相次いで格下げされており、当初トリプル A を取得していた優先受益権がシングル A クラスまで格下げされている<sup>4)</sup>。

中小企業 CLO は、以下の点から実証研究の対象として適していると考えられる。まず、通常 CLO 融資はデフォルト時の回収を見込まない (つまり、LGD=100%) 無担保融資として実行されるため、物的担保からの回収も見込んで与信される有担保融資と比べて債務者自身の信用力と純粋に対応している

4) R&I は 2009 年 5 月 29 日に『レーティング・モニター解除/格付け変更/維持』の NEWS RELEASE を公表している (詳細は脚注 19) 参照。また、ムーディーズも 2009 年 1 月 29 日に『地域金融機関 CLO の 2 案件を格下げ、更に格下げ方向で見直し』、2009 年 4 月 30 日に『ムーディーズ、地域金融機関 CLO の 5 案件を格下げあるいは格下げ方向で見直し』の NEWS RELEASE を公表している。その後の格付け変更については脚注 19) を参照のこと。

と考えられる。また、いずれも数百~千社強のポートフォリオであるため、小口分散ポートフォリオの本質的な部分が集約されていて研究対象としては適切なサイズである。加えて、投資家に円滑に販売するための全債務者共通の尺度としてスコアリング審査がベースとなっているため組成当初のモデルPDが明確であり、格付けレポートでも公表されている。さらに、満期までのパフォーマンスが格付け会社のモニタリングレポートなどにより開示されているためデータが比較的充実していて、他のリスク分析モデルや事後のパフォーマンスとの比較検証も可能である。

本研究では、中小企業CLOの裏付け資産プールに関する損失分布を、ファクターモデルによる潜在変数法を適用してモデル化する。具体的には、北野(2007)で導入されている正規分布2ファクターモデルに加えて、各ファクターが正規分布ではなく $t$ 分布に従うと仮定した $t$ 分布2ファクターモデルを新たに導入する。実際に、日本公庫CLOの組成時点の個社データおよび期中のデフォルトデータに基づいて、正規分布2ファクターモデルと $t$ 分布2ファクターモデルのパラメータの最尤推定を行う。そして、推定されたパラメータ値を用いてモンテカルロ・シミュレーションを行い、裏付け資産プールの損失分布を求めリスク評価に関する分析を行う。特に、シミュレーションによるリスク評価の結果を端的にみるためにモデルから推定される格付けに注目し考察を行う。

2ファクターモデルを採用することにより、景気変動のような全債務者共通の変動要因(グローバルファクター)に加えて、業種や地域など特定のカテゴリ内だけに共通する変動要因(カテゴリ内共通ファクター)を考慮することが可能になる。これによって、組成時に取得される債務者の属性データ(業種、地域、企業規模)に注目して、異なる属性によるカテゴリ区分を用いて分析し結果を比較することで、先行研究よりも適切なカテゴリ区分の選択が行えることが期待できる。また、いくつかの先行研究(北野(2006), Burtschell et al.(2009), Wanitjirattikal and Kiatsupaibul(2007))が示唆するように、潜在変数を特徴づける各ファクターが $t$ 分布に従うと仮定することで、複数の潜在変数の分布について裾部分での強い依存関係を表現できると考えられる。このことにより、世界的金融危機が叫ばれるような大きなストレスが生じた状況で、多くの企業の信用力が同一方向に変動しやすくなる場合の影響を検証する

といった応用が期待できる。

2 ファクターモデルを用いて日本公庫 CLO を分析した結果の概要は、以下のようにまとめられる。(1) パラメータ最尤推定の結果、ファクターの数および分布によらず、「地域」「業種」よりも「企業規模」によるカテゴリ区分を用いた場合に尤度が大きかった。(2) カテゴリ区分を「企業規模」とした  $t$  分布 2 ファクターモデルは統計的に最適であるとは言えないものの、有意にファットテール性があることを示唆する推定結果が得られた。(3) また、同モデルのシミュレーション分析においては、分析期間中に優先受益権がトリプル A からの大幅な格下げを余儀なくされている 2 案件に対して、他のカテゴリ区分とファクターの分布の組み合わせでは得られなかったほどの相当に低い格付けが推定された。

### 1.3 論文の構成

第 2 節では、ファクターモデルに関する先行研究の概要をまとめる。第 3 節では、本研究で用いたデータの説明、 $t$  分布 2 ファクターモデルの定式化と同モデルのパラメータ推定方法および裏付け資産プールに対する損失分布シミュレーション分析の手法を述べる。第 4 節では、正規分布 2 ファクターモデルおよび  $t$  分布 2 ファクターモデルのパラメータを実際の CLO データから推定した結果、モンテカルロ・シミュレーションによる実際に発行されている CLO に対する損失分布シミュレーション分析の結果ならびにその考察をまとめている。最後に、第 5 節でまとめと今後の課題を述べる。

## 2 先行研究

### 2.1 ファクターモデルを用いた先行研究

一般に、金融資産ポートフォリオの価格評価やリスク管理は、リスクファクターが多変量確率分布に従うものとして行われる。ここで重要なのは、各変量の分布（周辺分布）と周辺分布間の依存構造の与え方である。原資産である各企業向け債権の信用度は互いに依存していることから、マクロの経済・金融環境が急激に悪化している際にはポートフォリオ内の債権の多くが一斉に悪化す

るような状況も想定される。したがって、そのような原資産に関する価値分布の裾部分における強い依存関係（ファットテール性）を価格評価や信用リスク管理に織り込む必要がある。

デフォルトモデルとしての潜在変数法は、Merton (1974) のモデルに基礎づけられているが、応用上はファクターモデルの形で定式化されることが多い。以下では、3.2項で導入する  $t$  分布 2 ファクターモデルの特徴を明らかにするために、「正規分布 1 ファクターモデル」「正規分布 2 ファクターモデル」「 $t$  分布に基づくファクターモデル」という整理を行い、各モデルおよび先行研究の概要をまとめる。

### 2.1.1 正規分布 1 ファクターモデル

債務者数が  $I$  のクレジット・ポートフォリオを考える。  $V_i$  ( $i=1, \dots, I$ ) をある時点における  $i$  番目の債務者の資産価値の代理変数と解釈できる潜在変数とする。  $V_i$  は、標準正規分布  $N(0,1)$  に従うと仮定する。潜在変数  $V_i$  の値が事前に特定された閾値  $\theta_i$  以下の状態 ( $V_i \leq \theta_i$ ) であるとき、債務者  $i$  はデフォルト状態であると定義する。

また、異なる債務者の資産価値の間には相関があると仮定し、  $V_1, V_2, \dots, V_I$  の分散共分散行列を  $\Sigma$  で表すことにする。

このモデルにおいて、別途計測された個別デフォルト確率  $P_i$  を反映するためには、デフォルト閾値  $\theta_i$  の水準を調節すればよく、その水準は次の式を満たすように調整される。

$$\theta_i = \Phi^{-1}(P_i), \quad \text{ただし } \Phi \text{ は標準正規分布関数}$$

キャリブレーションが必要な他のパラメータは、分散共分散行列  $\Sigma$  の  $I(I-1)/2$  個の要素である。これらの要素は個別のデフォルト確率には影響を与えず、ポートフォリオの結合デフォルトの挙動だけに影響する。

資産相関の値は債務者ごとに定義することができるが、貸出債権の価値は一般には市場で観測されない。また、多数の債務者、例えば債務者数  $I=1,000$  のときには  $I$  次の相関行列の特定は膨大な作業となるため、債務者ごとの資産相関を推定することは現実的ではない。そこで、この高い次元数を減らすために企業価値の間の依存性を駆動する少数のファクターを導入する方法が用いられる。各債務者が  $M$  ( $M \ll I$ ) 個のリスクファクターで特徴づけられるとする



と、特定しなければならないパラメータは各ファクターにかかる加重和のパラメータとなり、その数は  $M \times I$  個へと減少する。このファクターにかかる加重和のパラメータは「ファクターウエイト」とも呼ばれる。最も単純な場合として 1 ファクターのみを設定し、全債務者のファクターウエイトは等しいと仮定すると、実質的にモデルの依存性はただ 1 つのパラメータで表される (1 ファクターモデル)。実務では、何らかの基準で債務者を区分しカテゴリごとの資産相関を推定して、当該カテゴリの債務者に一律に適用することが一般的である。

いまカテゴリの総数を  $G \in \mathbb{N}$  として、カテゴリごとに 1 ファクターモデルを定式化し直すことにする。すべてのカテゴリ  $g=1, \dots, G$  に対して、カテゴリ  $g$  内の債務者は一律のファクターウエイト  $\rho_g$  および一律の閾値  $\theta_g$  をもつと仮定する。また、 $t=1, 2, \dots$ 、として、 $t$  期におけるカテゴリ  $g$  に属する債務者全体に影響する共通ファクター (債務者全体に影響する景気動向等のグローバルファクターもしくは同一の業種・地域等のみに影響するカテゴリ内共通ファクターのいずれかとみなせるもの)  $X_{g,t}$  および  $t$  期における債務者  $i$  に固有の変動を表す固有ファクター (経営の質や技術力を表すもの)  $\varepsilon_{i,t}$  を導入する。すべての  $g=1, \dots, G$  および  $i=1, \dots, I$  に対して  $X_{g,t}$  と  $\varepsilon_{i,t}$  は独立で、いずれも標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う確率変数とする。さらに、 $\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{I,t}$  も独立とする。

このとき、カテゴリ  $g$  に属する  $i$  番目の債務者の  $t$  期の潜在変数  $V_{g,i,t}$  が、共通ファクター  $X_{g,t} \sim N(0, 1)$  および個有ファクター  $\varepsilon_{i,t} \sim N(0, 1)$  を用いて

$$V_{g,i,t} = \rho_g X_{g,t} + \sqrt{1 - \rho_g^2} \varepsilon_{i,t} \quad (1)$$

で与えられるモデルを「正規分布 1 ファクターモデル」と呼ぶ。

正規分布の再生性によって、潜在変数  $V_{g,i,t}$  の分布も標準正規分布  $N(0, 1)$  となる。この潜在変数  $V_{g,i,t}$  がデフォルト閾値  $\theta_g$  以下となる場合、債務者  $i$  のデフォルト状態に対応すると考える。

このモデルでは、共通ファクター  $X_{g,t}$  およびファクターウエイト  $\rho_g$  を通じて、各債務者のデフォルト確率の間に依存関係が導入されることとなる<sup>5)</sup>。 $X_{g,t}$  と  $\varepsilon_{i,t}$  は独立で分散がそれぞれ 1 であるので、(1) 式から、異なるカテ

ゴリ  $g$  と  $h$  に属する債務者の潜在変数  $V_{g,i,t}$  と  $V_{h,j,t}$  の資産相関（カテゴリ間相関）は  $\rho_g \rho_h$  で与えられることが分かる。一方、同一カテゴリ  $g$  に属する債務者の潜在変数  $V_{g,i,t}$  と  $V_{g,j,t}$  の資産相関（カテゴリ内相関）は  $\rho_g^2$  となることが分かる。

北野（2006）でも触れられているが、正規分布1ファクターモデルは、各成分が対応するカテゴリに対するファクターウエイトの積  $\rho_g \rho_h$  で与えられる相関係数行列で特徴づけられる正規コピュラを用いて、複数債務者の潜在変数の依存関係をモデル化したものとみなすことができる。したがって、正規分布1ファクターモデルは、依存関係を正規コピュラで与えた潜在変数法によるモデルの1つとして位置づけられる。

また、共通ファクター  $X_{g,t}$  の実現値を所与とすると、債務者間のファクターは条件付き独立となり、ひいてはデフォルト発生も条件付き独立となることが分かる。これより、共通ファクター  $X_{g,t} = x_{g,t}$  の下でのカテゴリ  $g$  に属する債務者の  $t$  期における条件付きデフォルト確率を  $p_g(x_{g,t})$  と表記すると、(1) 式から次が得られる。

$$\begin{aligned} p_g(x_{g,t}) &= P[\rho_g X_{g,t} + \sqrt{1 - \rho_g^2} \varepsilon_{i,t} \leq \theta_g | X_{g,t} = x_{g,t}] \\ &= P\left[\varepsilon_{i,t} \leq \frac{\theta_g - \rho_g x_{g,t}}{\sqrt{1 - \rho_g^2}}\right] = \Phi\left(\frac{\theta_g - \rho_g x_{g,t}}{\sqrt{1 - \rho_g^2}}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$  は1次元標準正規分布関数である。

正規分布1ファクターモデルを用いた実証研究としては次のようなものが挙げられる。まず、Gordy（2000）は、CreditMetrics™ および CreditRisk+ のベースとなっている潜在変数の1ファクターモデルについて、その背景にあるデフォルト率のボラティリティと資産相関係数の関係を示した<sup>6)</sup>。そして、格付けクラス別デフォルト率の時系列推移データからデフォルト率のボラティリ

5)  $\rho_g = 0$  であれば景気循環もしくは当該カテゴリの状況は企業のデフォルトに何ら影響を与えず、 $\rho_g = 1$  であれば景気循環もしくは当該カテゴリの状況がデフォルトを決める唯一の要因となっていると解釈できる。

6) CreditMetrics™ は J. P. Morgan の開発した、格付け遷移行列を用いてクレジットポートフォリオの価値分布を推定する手法。一方の CreditRisk+ は Credit Suisse Financial Products が開発した、保険数理アプローチを用いたデフォルトモデルで、任意の期間におけるデフォルト件数の確率分布はポワソン分布に従うと仮定しており、信用格付け別のデフォルト実績データを用いてパラメータを推定する。

ティの推定値を得たうえでモーメント法によって資産相関係数を推定している。ただし、分析対象は公表格付けを有する比較的大規模な企業である。

また、Gordy and Heitfield (2002) は、各カテゴリ内共通ファクターの間に相関がある形式の 1 ファクターモデルを用いて最尤法による推定を行っており、少ないサンプルの場合にモーメント法に比べてどの程度頑強であるかを主張している。

中小企業を対象とした先行研究としては、Dietsch and Petey (2004) が、フランスおよびドイツの中小企業データを元に、モーメント法によって、信用クラス別、企業規模別のデフォルト率および資産相関係数の推定を行っている。その結果として、中小企業における資産相関関係は非常に弱く（平均で 0.0001~0.0009）、かつ企業規模に従って減少することなどが報告されている。さらにデフォルト率と資産相関係数との間には正の関係が存在している可能性があることも示唆されている。

また、橋本 (2008) は、日本の中小企業を業種、企業規模、信用度、地域によってカテゴリ分けし、実際のデフォルトの時系列データに基づいて資産相関を推定している。その結果については、4.1 項で詳細に述べる。

#### 2.1.2 正規分布 2 ファクターモデル

北野 (2007) は、正規分布 1 ファクターモデルを拡張して、潜在変数を 2 ファクターに増やしたモデルに基づいて、日本企業の資本金規模別のデフォルト実績データから資産相関に関するモデルのパラメータを最尤推定している。2 ファクターモデルへの拡張は次のように行われている。

カテゴリ  $g$  に属する債務者  $i$  の  $t$  期 ( $t=1, 2, \dots$ ) の潜在変数  $V_{g,i,t}$  を以下のファクターで表すことを考える：(1) 景気など全体の変動を表す全債務者共通のグローバルファクター  $Y_t \sim N(0, 1)$ 、(2) カテゴリ内のみで共通する変動を表すカテゴリ内共通ファクター  $Z_{g,t} \sim N(0, 1)$ 、(3) 債務者  $i$  独自の要因を表す固有ファクター  $\varepsilon_{i,t} \sim N(0, 1)$ 。ファクターはすべて独立であると仮定する。

さらに、グローバルファクターおよびカテゴリ内共通ファクターのファクターウエイトをカテゴリ  $g$  ごとに一定と仮定して、それぞれ  $\alpha_g$  および  $\beta_g$  (いずれも  $[0, 1]$  区間に値をとる) とする。

このとき、カテゴリ  $g$  に属する債務者  $i$  の潜在変数  $V_{g,i,t}$  を次のように表す。

$$V_{g,i,t} = \alpha_g Y_t + \beta_g Z_{g,t} + \sqrt{1 - \alpha_g^2 - \beta_g^2} \varepsilon_{i,t}. \quad (3)$$

ここで、 $\alpha_g$  および  $\beta_g$  を  $\rho_0, \rho_g \in [0, 1]$  を用いて、 $\alpha_g = \rho_g \rho_0$ 、 $\beta_g = \rho_g \sqrt{1 - \rho_0^2}$  とおくと (3) 式は

$$V_{g,i,t} = \rho_g (\rho_0 Y_t + \sqrt{1 - \rho_0^2} Z_{g,t}) + \sqrt{1 - \rho_g^2} \varepsilon_{i,t} \quad (4)$$

となる。潜在変数  $V_{g,i,t}$  の分布が  $N(0, 1)$  となることも容易に分かる。このモデルを「正規分布2ファクターモデル」と呼ぶ<sup>7)</sup>。

これは、1ファクターモデル (1) 式で、 $X_{g,t} = \rho_0 Y_t + \sqrt{1 - \rho_0^2} Z_{g,t}$  とおいたもので、カテゴリ内共通ファクター  $X_{g,t}$  に関する相関係数行列  $\Sigma$  について、

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_0^2 & \cdots & \rho_0^2 \\ \rho_0^2 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \rho_0^2 \\ \rho_0^2 & \cdots & \rho_0^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

と仮定したものとみなすことができる。換言すれば、異なるカテゴリ  $g$  と  $h$  の間のカテゴリ内共通ファクター  $X_{g,t}$  と  $X_{h,t}$  間の相関を一律に  $\rho_0^2$  と仮定するということである。

また、このモデルにおいては、カテゴリ内相関 (同一カテゴリ  $g$  に属する債務者の潜在変数  $V_{g,i,t}$  と  $V_{g,j,t}$  の相関) は  $\alpha_g^2 + \beta_g^2 = \rho_g^2$  であり、カテゴリ間相関 (異なるカテゴリ  $g$  と  $h$  に属する債務者間の潜在変数  $V_{g,i,t}$  と  $V_{h,j,t}$  の相関) は  $Z_{g,t}$  と  $Z_{h,t}$  が独立であることから  $\alpha_g \alpha_h = \rho_0^2 \rho_g \rho_h$  となる。

この2ファクター形式でのデフォルトに関する潜在変数法を用いると、例えば、「業種」というカテゴリで区分した場合は、建設業者どうしの相関 (カテゴリ内相関) や、建設業者と不動産業者の相関 (カテゴリ間相関) などを考慮することができる。

このモデルにおいて、 $Y_t = y_t$ 、 $Z_{g,t} = z_{g,t}$  の下でのカテゴリ  $g$  に属する債務者  $i$  の  $t$  期における条件付きデフォルト確率を  $p_i(y_t, z_{g,t})$  と表記すると、

7) 次項でも触れるが、Hull and White (2004) は共通ファクターを複数にもつモデルを導入し、特に「2ファクターモデル」に対して数値的な分析を行っている。しかし、北野 (2007) とは異なり、その2ファクターについて債務者のカテゴリを意図した意味づけを行っていない。本稿では、北野 (2007) のように、潜在変数を「グローバルファクター」「カテゴリ内共通ファクター」の2つのファクターを用いて (4) 式で定式化したモデルを「2ファクターモデル」と呼ぶことにする。

(4) 式より次のようになる。

$$\begin{aligned}
 p_i(y_t, z_{g,t}) &= P[\rho_g(\rho_0 Y_t + \sqrt{1 - \rho_g^2} Z_{g,t}) \\
 &\quad + \sqrt{1 - \rho_g^2} \varepsilon_{i,t} \leq \theta_g | Y_t = y_t, Z_{g,t} = z_{g,t}] \\
 &= P\left[\varepsilon_{i,t} \leq \frac{\theta_g - \rho_g(\rho_0 y_t + \sqrt{1 - \rho_g^2} z_{g,t})}{\sqrt{1 - \rho_g^2}}\right] \\
 &= \Phi\left(\frac{\theta_g - \rho_g(\rho_0 y_t + \sqrt{1 - \rho_g^2} z_{g,t})}{\sqrt{1 - \rho_g^2}}\right) \tag{6}
 \end{aligned}$$

北野 (2007) は、利用可能なデータの制約もあり、カテゴリ区分はどの属性に基づいて行うべきであるかという問題にはあえて立ち入らない方針を採っているが、本研究は、日本公庫 CLO 組成時に取得された債務者の属性データ (業種、地域、企業規模) の利用が可能であるため、最適なカテゴリ区分についても議論を行うこととする。

### 2.1.3 $t$ 分布に基づくファクターモデル

前述したが、正規分布 1 ファクターモデルでは潜在変数間の依存構造は正規コピュラで与えられており、金融実務では信用リスクを有する多数の企業向け債権を原資産とする資産担保証券の評価や中小企業 CLO の格付けにおいて一般的に用いられている<sup>8)</sup>。

債務者間のデフォルト依存関係をモデル化するにあたっては、Merton (1974) に端を発するデフォルトに関する潜在変数法にコピュラを組み合わせるモデル (ファクター・コピュラモデルと呼ばれる) がよく用いられている。コピュラとは、各周辺分布が  $[0,1]$  上の一様分布に従う多変量確率分布に対する総称であるが、任意の多変量分布は各変量の周辺分布とコピュラの組み合わせで特徴づけられることが知られており (Sklar の定理)、特に分布間の依存構造を特定することはコピュラを特定することと同義になる。したがって、デ

8) R&I は 2007 年 1 月 31 日付で、CDO 商品の定量評価に使用するモデルを正規ファクターコピュラモデルによるモンテカルロ・シミュレーション法に改定することを次の URL にて公開している (<http://www.r-i.co.jp/rating/st/detail/j07-a-004-rm.pdf>)。

また、ムーディーズも、シンセティック CDO のトランシェの期待損失率をモンテカルロ・シミュレーション・モデル (正規コピュラ) を用いて計量するツール「CDOR-OM™」を無償で提供しており、ムーディーズのアナリストが格付け過程で用いている同モデル/プロセスを利用して、利用者サイドでポートフォリオの期待損失率などを算出することが可能となっている。

フォルト依存関係をコピュラを用いてモデル化することで、個社別のスコアリングモデル PD と、債務者間の依存構造とを分けて論じることが可能になる。また、計算負荷を軽減して CLO 全体の損失分布を算出することが可能となる。

ただし、Schönbucher (2005) にも記載があるとおり、正規コピュラはテール独立という特殊な依存構造、すなわち、分布全体の間では相関が認められても、分布の裾部分では依存性が弱まって 0 に近づいていくという性質がある。しかし、実際には、現下のように経済・金融環境が急速に悪化するなど何らかの大きなストレスが生じている状況では、多くの企業が同一方向へと変動する場合があります。分布の裾における依存性を表現できるモデルが望ましいと考えられる。

潜在変数間の依存構造に正規コピュラ以外の関係を適用して分布の裾における依存性を考慮できるようにし、信用ポートフォリオの損失分布に与える影響を議論した研究がいくつかある。Mashal and Naldi (2002) は潜在変数間の依存構造に  $t$  コピュラを仮定して実証研究を行っている。また、戸坂・吉羽 (2005) では、正規および  $t$  コピュラのほか、Clayton, Gumbel および Frank コピュラを対象として各コピュラの性質、具体的なパラメータ推定方法や乱数発生方法等を示して実証分析を行っている。一般に  $t$  コピュラは正の裾依存性をもち、自由度パラメータを用いることによってその依存性の強さを表現できることが知られている。

一方、 $t$  コピュラではなく、(1) 式で与えられる 1 ファクターモデルにおける共通ファクター  $X_{g,t}$  と固有ファクター  $\varepsilon_{i,t}$  が  $t$  分布に従う「(1 次元)  $t$  分布ファクターモデル<sup>9)</sup>」を提唱する研究も多くある。例えば、北野 (2006) は、1 次元  $t$  分布ファクターモデルに基づく数値実験を通じて、仮想的な CDO に対する  $t$  分布の自由度パラメータの裾依存性への影響などを考察し、自由度が小さい  $t$  分布ファクターモデルにおいては、強い裾依存性が観測されることを数値例で示している。

9) ファクター・コピュラモデルの観点からは、double- $t$  コピュラと呼ぶのが一般的になっており、各文献の結果に触れる際には double- $t$  コピュラという表現を用いるが、我々のモデルに関しての表現としては  $t$  分布ファクターモデルで統一することをお断りしておく。

また、Hull and White (2004) は様々な分析の1つとして、共通ファクター  $X_{g,t}$  と固有ファクター  $\varepsilon_{i,t}$  が  $t$  分布に従うモデル（彼らは“double  $t$ -distribution” コピュラと呼んでいる）を用いて、iTraxx EUR のインデックス・トランシェの市場価格とモデル価格との比較などを行い、各ファクターが裾の厚い周辺分布をもつ“double  $t$ -distribution” コピュラが市場データによく適合していたと結論づけている。

同様の視点で、Burtschell et al. (2009) は、いくつかのコピュラモデル (Gaussian, Student- $t$ , Clayton, double- $t$ , stochastic correlation, Marshall-Olkin) による CDO 等の価格付けの比較分析を行っている。iTraxx Europe の CDO トランシェについては、他の比較対象コピュラ (Gaussian, Student- $t$ , Clayton) などに比べて、double- $t$  コピュラが (スーパー・シニア部分で過大評価気味ではあったが) 市場価格に最も整合的であったと主張している。

また、Burtschell et al. (2009) では、double- $t$  コピュラモデルの裾依存性についても言及しているが、コピュラモデルの裾依存性に関する議論は、付録 B 節でまとめる。

北野 (2006) でも指摘されているが、 $t$  分布ファクターモデルと「多変量  $t$  分布モデル (周辺分布を  $t$  分布にして依存関係を  $t$  コピュラで導入したもの)」は、いくつかの点で性質が大きく異なる。 $t$  分布ファクターモデルでは、潜在変数間の無相関と独立は同値となるが、多変量  $t$  分布モデルでは無相関であっても独立とはならないので、相関係数が 0 であっても、潜在変数間には何らかの依存性が残る形になることに注意が必要である。また、 $t$  分布ファクターモデルでは共通ファクターと固有ファクターの  $t$  分布の自由度を別々に設定することが可能であるが、多変量  $t$  分布モデルでは共通にしなければならない。計算負荷の面でも、 $t$  分布ファクターモデルは条件付き独立の性質を利用できるが、多変量  $t$  分布モデルでは多変量  $t$  分布に従う乱数を用いたシミュレーションが必要となる。

したがって、 $t$  分布ファクターモデルは、相関係数の構造は 1 次元正規分布ファクターモデルと同様の制約を受けるものの、数値的に扱いやすい面がある。また、付録 B 節の議論から、 $t$  分布ファクターモデルでも裾依存性を表現できる可能性が高いので、あえて多変量  $t$  分布モデル (すなわち  $t$  コピュラに

よる依存構造)に固執しなくてもよいと考えられる。

## 2.2 ファクターモデルによる資産相関の推定結果

資産相関の推定には多くの先行研究があり、その多くが正規分布1ファクターモデルによるものである。表4-1は、橋本(2008)の図表19(1ファクターモデルを用いた資産相関推定の主要既存研究の概要)の一部を引用し、橋本(2008)および森平・瀬尾・佐藤(2008)について追加したものである<sup>10)</sup>。

表4-1 先行研究での資産相関の水準

橋本(2008)の図表19(1ファクターモデルを用いた資産相関推定の主要既存研究の概要)の一部を引用し、橋本(2008)および森平・瀬尾・佐藤(2008)について追加した。

先行研究	データの概要	分類の基準	資産相関の水準
Gordy and Heitfield (2002)	Moody's (1970~1998)	格付別	0.0551~0.1114
	S&P (1981~1997)		0.044~0.0886
Hamerle, Liebig and Rosch (2003)	S&P (1982~1999)	格付別	0.0391~0.0695
Bluhm and Overbeck (2003)	Moody's (1970~2001)	格付別	0.1177~0.4251
Dullmann and Scheule (2003)	独 53,280 社 (1991~2000)	信用度別, 規模別	0.002~0.04529
Lopez (2004)	KMV CreditMonitor Database (米 6,909 社, 欧 3,675 社, 日 3,255 社 (~2000))	格付別, 規模別, 国別	0.1000~0.5500
Dietsch and Petey (2004)	仏 440,000 社 (1995~2001)	信用度別, 規模別, 業種別	0~0.01149
	独 280,000 社 (1997~2001)		0~0.000425
北野 (2007)	日・月次倒産率(東京商工リサーチ+国税庁, 1982/7~2002/7)	資本金規模別	約 0.0016~0.0234
橋本 (2008)	日 960,980 社の倒産率(帝国データバンク, 1985~2005)	業種別, 規模別, 信用度別, 地域別	0.01~0.032
森平・瀬尾・佐藤 (2008)	日・総件数約 500 万件(CRD 決算書データ, 2001~2005)	業種別	0.005329 (卸売業)~0.011236 (小売業)



このうち、森平・瀬尾・佐藤 (2008) は、2001 年から 2005 年までの決算データ総件数約 500 万件について業種によるカテゴリ区分を用いて検証している。その結果、資産相関が最小値の 0.005329 (卸売業) から最大値の 0.011236 (小売業) の範囲の水準となったと示している。

また、橋本 (2008) は、業種、企業規模、信用度、地域によって日本企業をカテゴリ分けして、実際のデフォルトの時系列データに基づいて比較・検討を行っている。その結果として、(1) 資産相関の推定のためには、1 種類の共通ファクターのみでは十分ではない場合があること、(2) 資産相関は、業種、企業規模、信用度、地域の各グループの中でばらつきがみられること、(3) 資産相関が大きい傾向がみられるのは、企業規模別では規模の大きい企業、信用度別では信用度が高位および低位の企業であること、が示されている。

そのほか、Dietsch and Petey (2004) や北野 (2007) では、企業規模が小さいほど資産相関が小さいという結果が得られている。

### 3 研究方法

2.1.2 および 2.1.3 での先行研究の議論をふまえて、本研究では新たに  $t$  分布 2 ファクターモデルを導入し、パラメータ推定およびシミュレーションによる裏付け資産プールに対する損失分布の分析を行う。

$t$  分布 2 ファクターモデルを導入する主な理由は次の 2 点である。

1. 北野 (2007) の議論および結果をふまえると、カテゴリ区分という考え方を導入することでカテゴリ内相関およびカテゴリ間相関を表現でき、その変動要因をグローバルファクターおよびカテゴリ内共通ファクターに分解できる 2 ファクターモデルは、信用プールのデフォルトリスク評価の精緻化に結びつく可能性があること。
2. 北野 (2006) の数値実験による裾依存性の示唆や付録 B 節における議論か

---

10) 表中の北野 (2007) では 2 ファクターモデルを扱っているが、他の研究との比較のため、ここでは同論文の「モデル 1」(カテゴリ内共通ファクターを用いる 1 ファクターモデル) による結果を挙げている。また、同研究および森平・瀬尾・佐藤 (2008) におけるグローバルファクターウエイトはそれぞれ 2 乗したものが本稿で定義する資産相関にあたるため、この表では同論文のファクターウエイトを 2 乗したものを載せている。

ら、グローバルファクターとカテゴリ内共通ファクターが  $t$  分布に従うと仮定することで、潜在変数の周辺分布がファットテール性をもつだけでなく潜在変数の分布間に強い裾依存性が表現できる蓋然性が高いと考えられる。したがって、分布の下裾に位置するファクター実現値がデフォルトと判断されるファクターモデルにおいて、ファクターに  $t$  分布を仮定することでより強いデフォルト依存性が表現可能であると期待されること。

提案する  $t$  分布 2 ファクターモデルはパラメータ数が多く、最尤推定を試みるには次項で述べるデータの現時点におけるサンプル数は十分ではないかもしれない。しかし、本節で述べるパラメータ推定手法およびシミュレーション解析手法を実際に試みて、モデルの適用可能性や課題を把握しておくことの意義は小さくないと考える。

### 3.1 基礎データ

本研究に用いる債務者データは、日本公庫 CLO13 案件 (表 4-2) 組成時点での各 CLO ポートフォリオに含まれる中小企業 6,000 社強の個社データの業種、

表 4-2 これまでに組成された日本公庫 CLO の概要

平均 PD は CRD モデル III および RDB 中小企業クレジット・モデルそれぞれで算出した加重平均 PD。案件名に \* 印があるものはシンセティック方式 CLO で、無印のものはキャッシュ (債権譲渡) 方式 CLO。

案件名	実施日	融資件数	融資金額	平均 PD : CRD/RDB
広域 CLO	04.9.30	58 件	26.10 億円	0.49%/0.62%
地域金融機関 CLO	05.3.22	509 件	103.53 億円	0.60%/0.76%
第 2 回地域金融機関 CLO	05.12.22	840 件	205.09 億円	0.65%/0.73%
地域金融機関平成 18 年 3 月 CDO	06.3.23	321 件	70.75 億円	0.65%/0.66%
地域金融機関平成 18 年 9 月 CLO	06.9.27	338 件	120.53 億円	0.62%/0.67%
地域金融機関 CLO (たんぽぽ 2007)*	07.2.28	1,190 件	304.84 億円	0.55%/0.77%
地域金融機関平成 19 年 3 月 CLO	07.3.23	270 件	56.85 億円	0.53%/0.77%
地域金融機関平成 19 年 6 月 CLO	07.6.28	355 件	134.88 億円	0.51%/0.67%
地域金融機関平成 19 年 9 月 CLO	07.9.26	235 件	101.39 億円	0.64%/0.99%
地域金融機関 CLO (こすもす 2007)*	07.9.27	310 件	74.22 億円	0.59%/0.75%
地域金融機関平成 19 年 12 月 CLO	07.12.26	241 件	99.20 億円	0.62%/0.82%
地域金融機関 CLO (たんぽぽ 2008)*	08.3.14	1,193 件	295.18 億円	0.51%/0.70%
地域金融機関平成 20 年 3 月 CLO	08.3.25	219 件	102.33 億円	0.65%/1.02%
合計		6,079 件	1,694.89 億円	

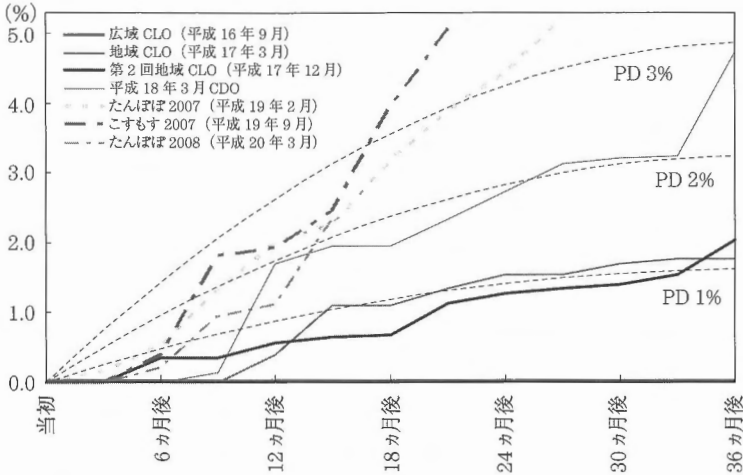


図 4-3 日本公庫 CLO における累積デフォルト率の推移  
 原債権の貸付年限：3 年。横軸に組成からの経過月数，縦軸に累積デフォルト率をプロットしている。原債権は期中均等償還されるため，期間 3 年の 1~3% のデフォルトカーブを記載している。

地域，企業規模という属性と，スコアリングモデル(CRD モデルⅢ，RDB 中小企業クレジット・モデル，リスクカルクなど)によって算出される PD である(各スコアリングモデルの概要は，付録 A 節を参照のこと)。

各 CLO の年率換算した平均 PD を表 4-2 にまとめている<sup>11)</sup>。この表で確認できるように，平均 PD は年率 0.5~1.0% に収まっており差異は少ない。しかし，図 4-3 および図 4-4 のとおり，個別 CLO の累積実績デフォルト率は平均的には年率 2% 程度で推移しているものの，案件によって大きく異なっており，地域金融機関平成 18 年 9 月 CLO や平成 19 年 2 月シンセティック CLO (たんぽぽ 2007) においてはモデル PD を大きく上回るデフォルト発生が続いている。

### 3.2 $t$ 分布 2 ファクターモデル

本研究では，正規分布 2 ファクターモデルに加えて新たに， $t$  分布 2 ファク

11) 国内中小企業に対しては，リスクカルクの精度は高くない可能性があるので今回の分析では除外し，表 4-2 には CRD モデルⅢおよび RDB 中小企業クレジット・モデルそれぞれで算出した加重平均 PD を記載している。

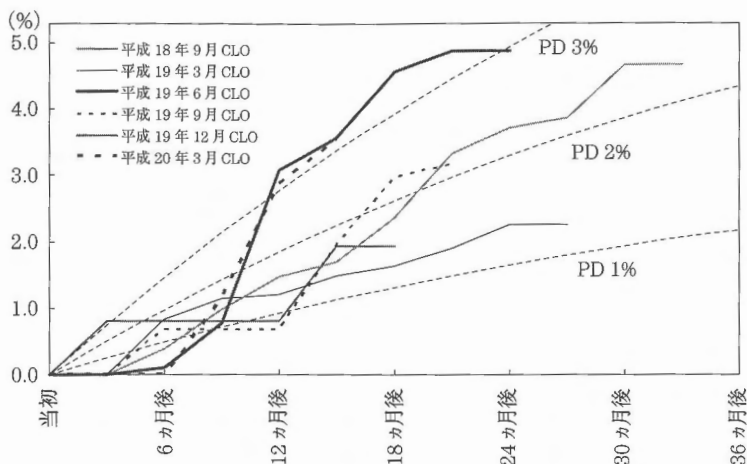


図 4-4 日本公庫 CLO における累積デフォルト率の推移  
 原債権の貸付年限：5 年。横軸に組成からの経過月数，縦軸に累積デフォルト率をプロットしている。原債権は期中均等償還されるため，期間 5 年の 1~3% のデフォルトカーブを記載している。

ターモデルを導入して，前項で説明した日本公庫 CLO の分析を行う。本研究は「格付けなどに一般的に幅広く用いられている正規コピュラに基づくモデルは，債務者間のデフォルトリスクの依存関係が中小企業 CLO に与える影響を過小評価しているのではないか」といった投資家の懸念に答えることを 1 つの企図としており， $t$  分布 2 ファクターモデルを導入することで，潜在変数の周辺分布がファットテール性をもつと同時に，潜在変数どうしの分布の裾における強い依存関係も表現できることが期待される。

具体的には， $t$  分布 2 ファクターモデルに対して次のような分析を行う。

(1) 規模・地域・企業規模それぞれをカテゴリ区分としたときの各パラメータ（ファクターウエイト，デフォルト閾値およびファットテール性を支配する自由度  $\nu$ ）の最尤推定を行う。(2) 中小企業債権プールの信用リスク評価に最適なカテゴリ区分について考察する。(3) 最尤推定されたパラメータ値を用いたモデルによるモンテカルロ・シミュレーションを行う。そして，得られた損失分布と実績デフォルト率とを端的に比較するために，当初に得ていた格付け，期中見直し後の現時点（2009 年 11 月）の格付け，損失分布シミュレーション

に基づく推定格付けを比較・考察する。

以下では、 $t$  分布 2 ファクターモデルの定式化およびパラメータの最尤推定についてまとめる。

### 3.2.1 $t$ 分布 2 ファクターモデルの概要

$t$  分布 2 ファクターモデルは、2.1.2 の正規分布 2 ファクターモデル (4) で導入されたグローバルファクター  $Y_t$ 、カテゴリ内共通ファクター  $Z_{g,t}$  および固有ファクター  $\varepsilon_{i,t}$  がいずれも標準正規分布に従うという仮定を、いずれも自由度  $\nu$  ( $\nu > 2$ ) の  $t$  分布に従うという仮定に置き換えることで定式化する<sup>12)</sup>。

自由度パラメータ  $\nu \rightarrow \infty$  とすると正規分布に収束することが知られているので、 $t$  分布ファクターモデルは正規分布ファクターモデルの一般化としてみなすことができる。よって、自由度パラメータを最尤推定することで、正規ファクターモデルが妥当かどうかの検証も可能となる。ただし、各債務者の無条件周辺デフォルト確率は変わらなくとも、潜在変数の分布における裾の厚さはデフォルト時点の依存構造に影響を与えることが期待される。

$t$  分布 2 ファクターモデルに対する裾依存性についての解析的な評価は得られていない。しかし、2.1.3 でも触れた北野 (2006) の考察や付録 B の議論をふまえると、 $t$  分布 1 ファクターモデルは  $\rho$  が十分大きいときには正規分布 1 ファクターモデル (裾従属係数がゼロ) より強い裾依存性があると推察され、それは  $t$  分布 2 ファクターモデルの場合においても同様であると類推される。

また、正規分布の場合と異なり、 $t$  分布に従う確率変数の一次結合がまた  $t$  分布に従うという性質はないため、(4) の形で与えられる潜在変数  $V_{g,i,t}$  自体の分布は  $t$  分布にはならないことに注意が必要である。しかしながら、異なるカテゴリ  $g$  と  $h$  の間のカテゴリ内共通ファクター  $X_{g,t}$  と  $X_{h,t}$  間の相関は  $\rho_g^2$ 、カテゴリ内相関 (同一カテゴリ  $g$  に属する債務者の潜在変数  $V_{g,i,t}$  と  $V_{g,j,t}$  の相関) は  $\rho_g^2$ 、カテゴリ間相関 (異なるカテゴリ  $g$  と  $h$  に属する債務者間の潜在変数  $V_{g,i,t}$  と  $V_{h,j,t}$  の相関) は  $\rho_g^2 \rho_h \rho_g$  となることは、2.1.2 で示した正規分布 2 ファクターモデルの場合と同じである。

$Y_t = y_t$ 、 $Z_{g,t} = z_{g,t}$  の下でのカテゴリ  $g$  に属する債務者の  $t$  期における条件

12) それぞれのファクターの  $t$  分布の自由度を別々に設定することも可能である。

付きデフォルト確率を  $p_g(y_t, z_{g,t})$  と表記すると,  $\varepsilon_{i,t}$  が自由度  $\nu$  の  $t$  分布に従うことから, (6) 式の導出と同様に次が得られる.

$$p_g(y_t, z_{g,t}) = T_\nu \left( \frac{\theta_g - \rho_g (\rho_0 y_t + \sqrt{1 - \rho_0^2} z_{g,t})}{\sqrt{1 - \rho_g^2}} \right). \quad (7)$$

ただし,  $T_\nu(\cdot)$  は自由度  $\nu$  の  $t$  分布関数を表す.

### 3.2.2 $t$ 分布 2 ファクターモデルに対する最尤推定の方法

(7) 式に含まれるパラメータであるファクターウエイト  $\rho_0, \rho_g (g=1, \dots, G)$ , デフォルト閾値  $\theta_g (g=1, \dots, G)$  および自由度  $\nu$  の推定には, 北野 (2007) で用いられている正規分布 2 ファクターモデルに関する最尤法を参考とする.

$G$  個のカテゴリのうちカテゴリ  $g$  に属する  $t$  期初 ( $t=1, 2, \dots, T$ ) の生存債務者数を  $N_{g,t-1}$ ,  $t$  期中に発生したデフォルト債務者数を  $D_{g,t}$  とする.  $Y_t, Z_{g,t}$  はそれぞれ  $t$  に関して独立かつ自由度  $\nu$  の  $t$  分布に従うとする.  $t$  期において  $Y_t = y_t, Z_{g,t} = z_{g,t}$  の条件の下ではデフォルト事象は条件付き独立であるので, デフォルト債務者数  $D_{g,t}$  を対象事象の発生回数, デフォルト発生確率  $p_g(y_t, z_{g,t})$  を対象事象の発生確率,  $t$  期初の生存債務者数  $N_{g,t-1}$  を試行回数とみなす 2 項分布に従う.

この 2 項分布  $\text{Bin}(D_{g,t}; N_{g,t-1}, p_g(y_t, z_{g,t}))$  の密度関数を  $f(D_{g,t}; N_{g,t-1}, p_g(y_t, z_{g,t}))$  とすれば次のようになる.

$$f(D_{g,t}; N_{g,t-1}, p_g(y_t, z_{g,t})) = \binom{N_{g,t-1}}{D_{g,t}} p_g(y_t, z_{g,t})^{D_{g,t}} (1 - p_g(y_t, z_{g,t}))^{N_{g,t-1} - D_{g,t}} \quad (8)$$

ただし,  $p_g(y_t, z_{g,t})$  は (7) 式で与えられるものとする. これを  $y_t$  および  $z_{g,t}$  に関して, 自由度  $\nu$  の  $t$  分布の密度関数によって積分して無条件化すること,  $t$  分布 2 ファクターモデルに関する対数尤度関数

$$l(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \nu) = \sum_{t=1}^T \log \left[ \prod_{g=1}^G \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(D_{g,t}; N_{g,t-1}, p_g(y_t, z_{g,t})) \times t_\nu(z_{g,t}) dz_{g,t} \right\} t_\nu(y_t) dy_t \right] \quad (9)$$

を得る. ただし,  $t_\nu(\cdot)$  は自由度  $\nu$  の  $t$  分布の密度関数とし, 全カテゴリに関するファクターウエイトおよびデフォルト閾値を要素とするベクトルをそれぞれ

れ  $\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_G)$  および  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_G)$  と表している。

対数尤度関数 (9) において、2カ所の密度関数  $t_v(\cdot)$  を標準正規密度関数  $\phi(\cdot)$  に変え、条件付きデフォルト発生確率  $p_\theta(y_t, z_{g,t})$  を (6) にしたものが、北野 (2007) で導入されている正規分布 2 ファクターモデルの対数尤度関数になることに注意しておく。

### 3.3 CLO 裏付け資産プールに対する損失分布シミュレーション分析の方法

CLO は優先・メザニン・劣後などのトランシェに区分され、裏付け資産が生み出すキャッシュフローは優先順位に従って配分される。各トランシェにとっては、下位にあるトランシェが「信用補完」となるため、上位トランシェの信用力が相対的に高く、下位トランシェの信用力が相対的に低くなる。CLO の格付けに際しては、裏付け資産である中小企業ポートフォリオについて損失分布を得たうえで、各トランシェの上下限に切り分けてトランシェごと期待損失率を計算し、表 4-3 で与えられる格付けと期待損失率の対応テーブルに照らして格付けが付与される<sup>13)</sup>。

本研究では、前節の手法により推定されたパラメータに基づき、対象 CLO

表 4-3 格付けと期待損失率の対応テーブル

本テーブルはムーディーズが公表しているもので、各平均年限ごとに左列の格付け付与のために満たさなければならない期待損失率の上限を示している。

	1年	2年	3年
Aaa	0.0000%	0.0001%	0.0004%
Aa 1	0.0003%	0.0017%	0.0055%
Aa 2	0.0007%	0.0044%	0.0143%
Aa 3	0.0017%	0.0105%	0.0325%
A 1	0.0032%	0.0204%	0.0644%
A 2	0.0060%	0.0385%	0.1221%
A 3	0.0214%	0.0825%	0.1980%
Baa 1	0.0495%	0.1540%	0.3080%
Baa 2	0.0935%	0.2585%	0.4565%
Baa 3	0.2310%	0.5775%	0.9405%

13) 期待損失率に基づく格付け手法はムーディーズが採用している。一方、R&I およびスタンダード&プアーズは、各トランシェの毀損確率によって格付けを行っている。

の裏付け資産について以下のような方法でモンテカルロ・シミュレーションを行い、損失分布を生成する。

1. 各試行ごとに、正規分布もしくは自由度  $\nu$  の  $t$  分布に従う乱数を、グローバルファクター  $Y_t$  用に1つ、カテゴリ内共通ファクター  $Z_{g,t}$  用にカテゴリ数（本研究ではどのモデルでも3つとしている）、固有ファクター  $\varepsilon_{i,t}$  用に各 CLO の債務者数だけ発生させる
2. 1. で発生した乱数と最尤推定により得られたパラメータとを (7) 式に代入して債務者ごとのデフォルト確率を求める
3. 2. で求めたデフォルト確率と、モデル PD を保守的に修正した債務者ごとの PD とを比較して各債務者のデフォルト時刻を求める
4. 3 で求めたデフォルト時刻が満期時点前の債務者について、その時点での約定残高（これを当該債務者のデフォルト金額とみなす）を合計し CLO 組成金額で除したものを、当該試行での裏付け資産プールの損失率とする
5. 1~4 を 100 万回繰り返すことで、CLO ポートフォリオの損失分布を生成する

あるトランシェの境界を、総資産を1とした比率で下限  $\alpha$ 、上限  $\beta$  と表す ( $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ )。また、試行  $j$  回目の裏付け資産プールの損失率を  $p^{(j)}$  とする。このとき、試行  $j$  回目における対象トランシェの損失率は、下限  $\alpha$  と上限  $\beta$  およびプール損失率  $p^{(j)}$  により

$$\min\left\{1, \max\left(0, \frac{p^{(j)} - \alpha}{\beta - \alpha}\right)\right\}$$

と計算される。これを 100 万回繰り返しその平均を対象トランシェの期待損失とし、表 4-3 に照らし合わせてモデルが妥当とする格付けを推定する。

## 4 研究結果

### 4.1 実データによるパラメータの最尤推定

まず、日本公庫 CLO13 件のうち、デフォルト先の詳細な情報が開示されているシンセティック CLO のデフォルト実績データを、2007 年 3 月から 2009 年 6 月まで 28 カ月分用いて、3.2.2 で述べた最尤推定の方法に基づいて、正



規分布 2 ファクターモデルおよび  $t$  分布 2 ファクターモデルのパラメータを最尤推定する<sup>14)</sup>。また、付録 C 節では、2 ファクターモデルと比較する意味で、カテゴリ別の 1 ファクターモデルを適用して推定した結果を示している。

本研究では、カテゴリ区分として、(1) 地域 (大都市 <東京都, 大阪府および愛知県>, 都市圏 <先の 3 都府県を除く関東, 関西および東海>, その他の地方), (2) 業種 (製造業, 卸売・小売業, その他の業種), (3) 企業規模<sup>15)</sup> (当初借入金額 20 百万円未満, 同 20 百万円以上 40 百万円未満, 同 40 百万円以上) を用いる。なお、日本公庫 CLO においては、地域、業種、企業規模について、より細かい区分での開示が行われているが、サンプル数の制約から、いずれのカテゴリも 3 区分としている。

各カテゴリのデフォルト閾値  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , グローバルファクターおよびカテゴリ内共通ファクターに対するファクターウエイトを表すパラメータ  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  ならびに自由度  $\nu$  ( $t$  分布 2 ファクターモデルのみ) の最尤推定結果は表 4-4 および表 4-5 のとおりである。各パラメータについて最尤推定値と推定量の標準偏差である標準誤差 (カッコ内の数値) を示している。理論上は、最尤推定量の標準偏差は Fisher 情報行列の逆行列をサンプルサイズで割って得られる行列の対角成分の正の平方根として得られるが、パラメータの真値が未知の場合には、Fisher 情報行列の代わりに最尤推定値における目的関

14) 対数尤度関数 (9) 式に含まれる積分計算には、北野 (2007) と同様にガウス求積法を用いている。ガウス求積法の MATLAB プログラムは Miranda and Fackler (2002) に記載されている qnwnorm を用いている。ノード数 (積分区間の分割数) は本研究ではすべて 100 分割としている。対数尤度関数を -1 倍して最小化問題とし、各ファクターウエイトには計算負荷も考慮して  $10^{-5} \leq \rho \leq 0.5$  の制約を設けているため、北野 (2007) と同様に MATLAB の制約条件付き最小化の関数 fmincon を用いて推定計算を実装している。fmincon では複数種類の最適化アルゴリズムを使い分けることができるが、本研究では medium-scale の逐次 2 次計画法 (SQP) を用いている。これはラグランジュ関数のヘシアンを反復ごとに近似しながら準ニュートン法的に解いていく方法である。詳細は MATLAB ユーザーズガイド (2004) 参照。

15) 当初データには売上規模による債務者の分布が開示されているが、期中のデフォルト先については企業の特定を避けるため、当初借入金額のみの公表となっている。このため、パラメータの推定においては、借入金額がある程度企業規模を表していると仮定して借入金額の規模によるカテゴリ区分に基づいて推定を行う。一方、CLO の評価においては、借入金額の規模によるカテゴリ区分に基づいて分析すると金額ベースでの CLO 評価にバイアスがかかってしまうため、売上規模ベースで分析を行う。

表 4-4 日本公庫 CLO データに対する正規分布 2 ファクターモデルの最尤推定結果

カッコ内の数値は各推定値の標準誤差。また、[ ] 内の数値は AIC (赤池情報規準)。

	地域	業種	企業規模
カテゴリ 1	大都市	製造業	20 百万円未満
カテゴリ 2	都市圏	卸・小売	20 百万円以上 40 百万円未満
カテゴリ 3	地方	その他	40 百万円以上
$\theta_1$	-2.715 (0.78)	-3.040 (1.03)	-3.302 (1.05)
$\theta_2$	-2.750 (0.32)	-2.591 (0.58)	-2.668 (0.14)
$\theta_3$	-3.161 (0.83)	-3.108 (1.01)	-3.195 (1.01)
$\rho_0$	0.707 (1.00)	0.707 (1.00)	0.707 (1.00)
$\rho_1$	0.041 (1.00)	0.045 (1.00)	0.114 (1.00)
$\rho_2$	0.041 (1.00)	0.051 (1.00)	0.114 (1.00)
$\rho_3$	0.060 (1.00)	0.066 (1.00)	0.284 (1.00)
対数尤度 [AIC]	-7.67 [29.3]	-8.44 [30.9]	-5.04 [24.1]
カテゴリ内相関平均	0.0023	0.0030	0.0354
$\rho_1^2$	0.0017	0.0021	0.0129
$\rho_2^2$	0.0017	0.0026	0.0129
$\rho_3^2$	0.0036	0.0044	0.0804
カテゴリ間相関平均	0.0011	0.0014	0.0129
$\rho_0^2 \rho_1 \rho_2$	0.0009	0.0012	0.0064
$\rho_0^2 \rho_2 \rho_3$	0.0012	0.0017	0.0161
$\rho_0^2 \rho_3 \rho_1$	0.0012	0.0015	0.0161

数 (対数尤度) の Hesse 行列を用いることが一般のデータ分析ではしばしば行われているため、その方法に倣って算出している<sup>16)</sup>。

また、非線形最適化の際に初期値に対する依存性の問題がつきまとうため、ここでは以下のように対応した。まず、初期値の組み合わせについて様々なパターンを試し、デフォルト閾値  $\theta_0$  については各カテゴリにおいて、観測された実績デフォルト率  $P$  に対して  $\theta_i = \Phi^{-1}(P)$  として初期値と与えることにした。これは、実績デフォルト率の標準正規分布関数 ( $t$  分布 2 ファクターモデルでは自由度 7 の  $t$  分布関数) の逆関数で与えた値から大きく離れた値を初期値とすると最適化の際に収束しないことが確認されたために行った措置であ

16) 本研究では、標準誤差を MATLAB の fmincon 関数が算出した Hesse 行列の逆行列の対角成分の正の平方根で与えている。

表 4-5 日本公庫 CLO データに対する  $t$  分布 2 ファクターモデルの最尤推定結果  
 カッコ内の数値は各推定値の標準誤差。また、[ ] 内の数値は AIC (赤池情報量規準)。

	地域	業種	企業規模
カテゴリ 1	大都市	製造業	20 百万円未満
カテゴリ 2	都市圏	卸・小売	20 百万円以上 40 百万円未満
カテゴリ 3	地方	その他	40 百万円以上
$\theta_1$	-3.798 ( 0.75)	-4.694 ( 1.00)	-5.211 ( 1.00)
$\theta_2$	-3.861 ( 0.62)	-3.607 ( 1.00)	-3.552 ( 1.00)
$\theta_3$	-5.236 ( 0.84)	-4.818 ( 1.00)	-4.075 ( 1.00)
$\rho_0$	0.707 ( 1.00)	0.707 ( 1.00)	0.707 ( 1.00)
$\rho_1$	0.036 ( 1.00)	0.032 ( 1.00)	0.069 ( 1.00)
$\rho_2$	0.036 ( 0.88)	0.056 ( 1.00)	0.054 ( 1.00)
$\rho_3$	0.208 ( 0.96)	0.109 ( 1.00)	0.376 ( 1.00)
$\nu$	6.91 ( 1.03)	6.94 ( 1.00)	7.88 ( 1.00)
対数尤度[AIC]	-7.58 [31.2 ]	-8.41 [32.8 ]	-4.96 [25.9 ]
カテゴリ内相関平均	0.0153	0.0053	0.0497
$\rho_1^2$	0.0013	0.0010	0.0048
$\rho_2^2$	0.0013	0.0032	0.0029
$\rho_3^2$	0.0432	0.0118	0.1414
カテゴリ間相関平均	0.0027	0.0019	0.0083
$\rho_0^2\rho_1\rho_2$	0.0006	0.0009	0.0019
$\rho_0^2\rho_2\rho_3$	0.0037	0.0031	0.0101
$\rho_0^2\rho_3\rho_1$	0.0037	0.0017	0.0130

る。次に、 $t$  分布を用いるモデルでは自由度  $\nu$  の水準を探るため、パラメータ  $\rho_g$  を 0.05~0.1 として自由度  $\nu$  を 3~30 の整数値をそれぞれ初期値として最適化したところ、地域および業種のカテゴリ区分では  $\nu$  の初期値を 7 とした場合に、企業規模のカテゴリ区分では  $\nu$  の初期値を 8 とした場合に最終的に最も対数尤度が高くなった。その一方で  $\nu$  の初期値を 5 以下とした場合や 15 以上とした場合では収束しないことが確認された。そこで、この予備分析で対数尤度が最大となった整数値をそれぞれの区分での  $t$  分布の自由度  $\nu$  の初期値とした。最後に、各モデルにおいて  $\rho_g$  の初期値を 0.01~0.4 までの範囲で与えて最適化したところ、地域および業種のカテゴリ区分では  $\rho_g$  の初期値を 0.01~0.10 にした場合、規模のカテゴリ区分では  $\rho_g$  の初期値を 0.1~0.15 にした場合に対数尤度が高くなり、その近辺から外れた初期値に対しては収束しないことが確認された。以上の手続きにより、各パラメータで最適化計算が収

束し、対数尤度が高くなる初期値の範囲がつかめたので、各パラメータの初期値を上述した範囲内になるように、初期値の組をさらに選び最適化を行い、最終的に最も対数尤度の高くなった組に対する最適化の数値解をパラメータの最尤推定値とすることにした<sup>17)</sup>。

1ファクターモデルに対する推定結果は付録C節の表4-10、4-11を参照されたい。全体的に言えることは、正規分布か $t$ 分布か、あるいは1ファクターか2ファクターかという違いによらず、相関の大きさはほぼ同じ傾向が示されていることである。例えば、カテゴリ区分を地域とした場合は、地方でのカテゴリ内相関が最も高く、大都市、都市圏では同じ水準となり、カテゴリ区分を業種とした場合、その他の業種でのカテゴリ内相関が最も高く、卸・小売業がそれに次ぎ、製造業が最も低い結果となった。

また、どのカテゴリ区分が有用であるかという点について対数尤度を比較すると、対数尤度はカテゴリ区分を企業規模とした場合が最も高く、地域による区分がそれに次ぎ、業種による区分で最も低くなっている。特に、企業規模が大きいカテゴリでのカテゴリ内相関 $\rho_{22}^2$ が相対的に高くなっていることが分かる。2009年上半期に比較的規模の大きい中小企業にデフォルトが集中して発生していたことがあり、そのことが企業規模の区分の大きいカテゴリでの相関が大きくなったことにつながっている可能性もある。

さらに、どのモデルが最良かということについてAICに注目して比較すると、 $t$ 分布1ファクターモデル（付録C節の表4-11）および正規分布2ファクターモデルはほぼ同様の水準で高いが、 $t$ 分布2ファクターモデルはAICがやや大きいことが確認される。このことは、AIC最小をモデル選択基準とする場合には、パラメータ数が最も多い $t$ 分布2ファクターモデルが必ずしも最良とは主張できないことを示唆しているが、モデル選択基準については様々な議論があり、今後の課題としたい。

次に、パラメータの推定値について、表4-1で示した先行研究の資産相関の水準との比較が可能な、正規分布2ファクターモデルのカテゴリ内相関（正規

17) もちろん、このような手続きで求めた解が大域的な最適解を与えるという保証はない。しかしながら、初期値の与え方に対して注意を払っており、また解釈することが可能な推定結果が得られていることから、ある程度は信頼がおける推定結果であると判断する。

分布 1 ファクターモデルの資産相関と解釈できる) の推定値に注目する。表 4-4 のとおり正規分布 2 ファクターモデルのカテゴリ内相関は 0.0017~0.0804 となっており、先行研究の資産相関の推定値と近い水準にあることが確認される。特に、より詳しく橋下 (2008)、森平・瀬尾・佐藤 (2008) および北野 (2007) の資産相関の水準と本研究のカテゴリ内相関の水準を比較すると、(1) 地域によりカテゴリ区分した場合の資産相関は 0.0017~0.0036、平均が 0.0023 で、橋下 (2008) の結果 (9 地域区分で 0.0125~0.025 程度、平均は 0.015 程度) よりも低い水準であること、(2) 業種によりカテゴリ区分した場合の資産相関は 0.0021~0.0044、平均が 0.0030 で、橋下 (2008) の結果 (中小企業の業種区分で 0.010~0.020) および森平・瀬尾・佐藤 (2008) の結果 (0.005329 (卸売業) ~0.011236 (小売業)) よりも低い水準であること (3) 企業規模区分の資産相関については 0.0129~0.0804、平均が 0.0354 で、橋下 (2008) (中小企業で 0.015) や北野 (2007) (0.0016~0.0234 程度) の結果と比較的に近い水準となることが確認された。企業規模別にみると資産相関は規模の大きい企業で大きく、規模の小さい企業では小さい傾向があることは、企業規模が小さいほど資産相関が小さいという両先行研究の結果と整合的である。

また、橋本 (2008) の結果と同様に、両モデルの結果とも地域、業種、企業規模それぞれの区分についてカテゴリ間で資産相関のばらつきがあることが認められ、与信ポートフォリオのリスク評価の際にグローバルファクターのみで一律の資産相関を適用することは必ずしも適当ではないことを示唆している。

こうした結果の背景については、次のような仮説が考えられる。まず、業種および地域によるカテゴリ区分において資産相関が小さくなったのは、橋下 (2008) や森平・瀬尾・佐藤 (2008) がカテゴリを 7~8 に分けている<sup>18)</sup> のに対して、本研究ではサンプル数の制約からいずれも 3 カテゴリにしか分けてお

18) 橋下 (2008) では、地域を、北海道東北地方、関東甲信越地方、北陸地方、中部地方、近畿地方、中国地方、四国地方、九州沖縄地方、業種を、農林漁鉱業、建設業、製造業、卸売小売業飲食店、金融保険業、不動産業、運輸通信電気ガス等、サービス業とそれぞれ 8 カテゴリに分けている。また、森平・瀬尾・佐藤 (2008) では業種を、製造業、建設業、不動産業、卸売業、小売業、サービス業、その他の 7 カテゴリに分けている。

らず、そのために本来区分すべき業種等を同じカテゴリにしていることも一因であると考えられる。一方、企業規模によるカテゴリ区分については、橋下(2008)が3カテゴリ、北野(2007)が4カテゴリであり、本研究も同じ程度の区分となっている。そして、企業規模が大きい場合には、その企業の業況はグローバルファクターやカテゴリ内共通ファクター(例えば、国内の経済環境や金融環境、あるいは、その企業が属する業種・地域等の業況)の影響を受けやすくなる。実際、企業情報ベンダーの統計資料でも、2008年下期以降の急激な景気悪化局面で、国内中小企業においては資本金50百万円以上の規模の大きな企業群でのデフォルト件数が資本金規模の小さな層に比べても大きく上昇している。一方、企業規模が小さくなると、その企業の業況は個社ごとの事情に左右される度合いが高まると考えられる。

次に、 $t$ 分布2ファクターモデルの自由度パラメータ $\nu$ の推定値をみると、いずれのカテゴリ区分においても6~8前後となっている。正規分布を示す $\nu=\infty$ からはかなり離れた結果であり、実際の中小企業CLOポートフォリオの損失分布は正規分布2ファクターモデルが想定する損失分布よりも裾の厚い(ファットテール性のある)ものになる可能性が示された。

しかし、ファットテール性に寄与するもう1つのパラメータ $\rho$ の推定値は各カテゴリ区分でみると、その大小関係の傾向は両モデルで同様であるものの、 $t$ 分布2ファクターモデルよりも正規分布2ファクターモデルの方が $\rho_1, \rho_2$ では高くなっており、先行研究のように $\rho$ が一定の下で自由度 $\nu$ だけ低下するという結果にはなっていない。そこで、本節で得られた自由度パラメータと相関関係のバランスについて、次項においてモンテカルロ・シミュレーションによって得られる損失分布を通じて確認することとする。

#### 4.2 既発行CLOに対する損失分布シミュレーション分析の結果

本研究では、日本公庫CLO13案件のうち、地域金融機関平成18年9月CLOおよび19年6月CLO並びに地域金融機関CLOシンセティック型(株式会社たんぽぽ2007)について、前項で得られたパラメータ推定値を代入した正規分布2ファクターモデルおよび本研究で提案する $t$ 分布2ファクターモデルを用いて、3.3項で述べた方法でモンテカルロ・シミュレーションにより

表 4-6 分析対象とした日本公庫 CLO の概要

地域金融機関平成 18 年 9 月 CLO および平成 19 年 6 月 CLO はキャッシュ（債権譲渡）方式で期間は 5 年，地域金融機関 CLO シンセティック型（株式会社たんぽぽ 2007）は期間が 3 年である。

	18 年 9 月 CLO	19 年 6 月 CLO	たんぽぽ 2007
債権元本総額	12,053 百万円	13,488 百万円	30,484 百万円
債務者数	338 社	355 社	1,190 社
原債権の平均年限	約 2.6 年	約 2.6 年	約 1.56 年
優先トランシェ 格付け (信用補完率)	10,500 百万円 Aaa (12.9%)	11,900 百万円 Aaa (11.8%)	26,900 百万円 Aaa (11.8%)
メザニントランシェ 格付け (信用補完率)	250 百万円 A3 (10.8%)	180 百万円 A3 (10.4%)	480 百万円 A2 (10.2%)
信託設定日	2006 年 9 月 27 日	2007 年 6 月 28 日	2007 年 2 月 28 日
予定償還日	2011 年 10 月 17 日	2012 年 7 月 17 日	2010 年 4 月 30 日

損失分布を算出する。

これらの案件の概要は表 4-6 のとおりである。この 3 案件は、他の案件に比べて実績累積デフォルト率が非常に高くなっており、うち 2 案件（18 年 9 月 CLO および 19 年 6 月 CLO）では大幅な格下げも起きていて、投資家からも多くの質問が寄せられている特徴的な案件である。

また、シミュレーションの設定としては以下の 4 通りの組み合わせをそれぞれ試行し、裏付け資産プールの損失分布に関する VaR 値や、得られた損失状況について各トランシェの上下限で切り分けて求めたトランシェごとの期待損失率を表 4-3 に基づいて変換して得られる推定格付けについて考察する。

カテゴリ区分を「地域」とする正規分布 2 ファクターモデル（「地域×正規」）

カテゴリ区分を「地域」とする  $t$  分布 2 ファクターモデル（「地域× $t$ 」）

カテゴリ区分を「企業規模」とする正規分布 2 ファクターモデル（「規模×正規」）

カテゴリ区分を「企業規模」とする  $t$  分布 2 ファクターモデル（「規模× $t$ 」）

「地域×正規」に対するシミュレーションを行うのは、格付け会社が債務者の地域もしくは業種の集中に配慮しながら正規コンピュータモデルを使用して中小

企業 CLO の格付けを行っている公表していることに着目して、ある程度は格付け会社の評価に近い結果が出ることを期待したことが理由である。同じカテゴリに対してモデルのアウトプットの違いをみるために、「地域× $t$ 」についてもシミュレーションを行う。

また、前項のパラメータ推定においていずれのモデルでも「企業規模」によるカテゴリ区分の場合に、対数尤度が最大（AIC が最小）であったことから、「規模×正規」および「規模× $t$ 」についてシミュレーションを行う。

ただし、このシミュレーションによる損失分布の分析は、上記 3 案件を含むデフォルト実績データを用いてパラメータ推定をしておいて、各 3 案件の組成時点まで遡ってリスク評価を企図するものである。その意味で事後的な分析であり、フォワード・ルッキングなリスク評価や実際の格付けの妥当性についての議論に結びつけるには注意が不可欠である。

しかし、事後的であって、なおかつ特徴的な 3 案件に対してだけであったとしても、 $t$  分布 2 ファクターモデルが正規分布 2 ファクターモデルと異なるリスク評価を与えること、または同じモデルであってもカテゴリ区分の違いによってリスク評価の差があることが確認できれば、 $t$  分布 2 ファクターモデルについて考える意義が十分にあるものと考ええる。

#### 4.2.1 地域金融機関平成 18 年 9 月 CLO および平成 19 年 6 月 CLO の分析結果

地域金融機関平成 18 年 9 月 CLO および平成 19 年 6 月 CLO のこれまでの累積実績デフォルト率は図 4-5 のとおりで、両案件ともに当初の想定を大きく上回るデフォルトが発生している（年率換算で 3% 前後）。このペースでデフォルトが発生し続けると信用補完となっている劣後受益権部分を超過して優先およびメザニン受益権に棄損が及ぶ可能性がある。このため、両受益権は、2009 年 1 月に 1~2 ノッチ、さらに 2009 年 5 月末には再度格下げされて、2009 年 11 月現在では、優先受益権がシングル A クラスに、メザニン受益権はトリプル B クラスになっている<sup>19)</sup>。

損失分布のシミュレーション結果に基づく期待損失率および分布の上裾部分の厚みを示す VaR 値（いずれも、裏付け資産プールに関して当初原債権金額に対する満期までの累積デフォルト損失額の比率）に関して、平成 18 年 9 月 CLO については表 4-8 の上段、平成 19 年 6 月 CLO については表 4-8 の中段



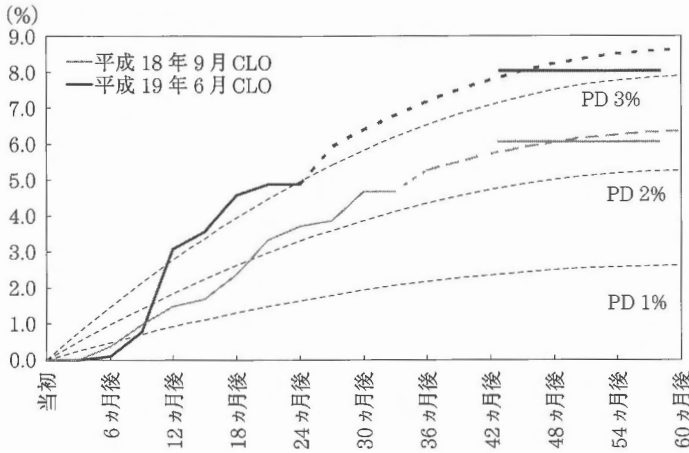


図 4-5 18 年 9 月 CLO および 19 年 6 月 CLO における累積デフォルト率の推移

横軸に組成からの経過月数，縦軸に累積実績デフォルト率をプロットしている。両案件で当初想定を大きく上回るデフォルトが発生している。横線は 2009 年 3 月時点のメザニン受益権の信用補完率で，現状ペースでデフォルトが続くと（点線）同受益権は棄損の可能性がある。

19) 以下のとおり，本節において損失分布や格付けを推定する平成 18 年 9 月 CLO および平成 19 年 6 月 CLO 以外の案件については，優先部分については当初の AAA を維持している。

平成 18 年 9 月 CLO：優先受益権 AA+ → A，メザニン受益権 A+ → BBB+

平成 19 年 6 月 CLO：優先受益権 AA → A-，メザニン受益権 A → BBB

平成 19 年 9 月 CLO：優先受益権 AAA → AAA，メザニン受益権 AA- → A+

平成 19 年 12 月 CLO：優先受益権 AAA → AAA，メザニン受益権 AA → AA

平成 20 年 3 月 CLO：優先受益権 AAA → AAA，メザニン受益権 AA- → A+

(R&I 2009 年 5 月 29 日付け NEWS RELEASE より)

また，ムーディーズは，平成 18 年 9 月 CLO について大幅な格下げの後，次のとおり若干の格上げを行っている。

優先受益権：A3 を A1 に格上げ（前回の格付けアクション：2009 年 4 月 30 日，Aa1 格下げ方向で見直しを A3 に格下げ）

メザニン受益権：B2 を Ba2 に格上げ（前回の格付けアクション：2009 年 4 月 30 日，Baa2 格下げ方向で見直しを B2 に格下げ）

（ムーディーズ 2009 年 11 月 13 日付「地域金融機関平成 18 年 9 月 CLO を格上げ」より）

にまとめている。特に、「規模×正規」および「規模× $t$ 」に対しては、累積デフォルト損失率に関するヒストグラムおよび分布の上裾部分を拡大したものを図でも表している。平成18年9月CLOについては図4-7の上段、平成19年6月CLOについては図4-7の中段のとおりである。これらの図から、累積デフォルト損失率の分布の上裾部分の形状、ならびにVaR値の結果をみると、80% VaR 近辺で「規模× $t$ 」に対する損失が「規模×正規」に対する損失を超えており、 $t$ 分布2ファクターモデルの裾の厚さが確認できる。

また、各シミュレーションによって得られた優先および劣後受益権の期待損失率に基づく推定格付けは、平成18年9月CLOについては表4-9の上段、平成19年6月CLOについては表4-9の中段にまとめている。

シミュレーションによるリスク評価の結果を端的にみるために推定格付けに注目すると、「地域×正規」では、優先受益権については、両案件とも実際の当初格付けと同じAaaであった。一方、メザニン受益権についての推定格付けは、平成18年9月CLOでA2（実際はA3）、平成19年6月CLOではA1（実際はA3）であった。次に、「地域× $t$ 」では、優先受益権については、両案件とも実際の当初格付けよりも1ノッチ下のAa1に、メザニン受益権については、当初格付けよりも3ノッチ下でBaa3になり、実際の格付けよりもやや保守的な結果となっている。

また、「規模×正規」に基づく推定格付けは、優先受益権については両案件とも実際の格付けAaaよりも3ノッチ下のAa3が、「規模× $t$ 」に基づく推定格付けは両案件ともさらに2ノッチ下のA2が得られている。また、メザニン受益権については、「規模×正規」「規模× $t$ 」の双方で投資不適格（Baa3未満）となっている。

当初トリプルAを得ていた両案件の優先受益権が2009年1月から5月の間に数度格下げされ、2009年11月現在でシングルAクラスとなっていることを勘案すると、「規模× $t$ 」の組合せに基づく推定格付けは、実際のCLOポートフォリオの信用リスク状態に整合的であると考えられる。別の見方をすると、「規模× $t$ 」の組合せによる損失分布を基準としてAaaを取得するには、実際のトランシングの3.2倍（18年9月CLO）～3.4倍（19年6月CLO）の信用補完水準が本来は必要であったと試算されている。

いずれのカテゴリ区分でも  $t$  分布 2 ファクターモデルの方が正規分布 2 ファクターモデルよりも明らかに保守的なリスク評価を与えているのは、ファットテール性または裾依存性が寄与している可能性が高いと考えられる。また、「企業規模」カテゴリ区分の方が保守的な評価を与えているのは、現下のよう強いストレス下で、借入金額が比較的多い企業規模の大きい層にデフォルトが集中して、金額ベースでの損失率が件数ベースの損失率よりも大幅に高くなった推定結果がそのまま反映しているためと推察される。しかし、格付け会社が主に注目している地域や業種カテゴリ以外のカテゴリ区分が、リスク評価に有効となりうることを示唆しているとみなすことはできると考える。

以上をまとめると、「規模× $t$ 」の組み合わせについては、18年9月 CLO および 19年6月 CLO のデータ分析期間におけるポートフォリオの毀損状況に整合している結果が得られた一方で、それ以外の組み合わせに対する結果は同期間内のポートフォリオの毀損状況とは整合していないことがうかがえる。事後的かつ限られたサンプルに対する分析に基づく考察であるので一般的な断定はできないが、ファクターの分布だけでなくカテゴリ区分の与え方も、ポートフォリオのデフォルトリスク計測において重要となると考えられる。

これらの結果をふまえて、各設定における損失分布についての考察を表 4-7 にまとめた。

表 4-7 設定ごとの債権プール損失分布の裾の厚さの比較

		ファクター分布	
		正規分布	$t$ 分布
		分布の裾部分で依存性が弱まり 0 に近づく	正の裾の依存性をもつ
カテゴリ区分	地域	債権プールの損失分布の裾が最も薄い（格付け会社が採用）	債権プールの損失分布の裾が厚い
	規模	債権プールの損失分布の裾がやや厚い	債権プールの損失分布の裾が最も厚い（本研究で提案）

#### 4.2.2 地域金融機関 CLO シンセティック型 (株式会社たんぼ 2007) の分析結果

地域金融機関 CLO シンセティック型 (株式会社たんぼ 2007) についても、図 4-6 のとおりデフォルトが年率 3% を超える水準で発生している。しかし、原債権の平均年限が 1.56 年と短いことから信用補完水準には相当の余裕がある。

同 CLO についての損失分布シミュレーション結果に基づく裏付け資産プールの期待損失率および VaR 値は、表 4-8 の下段にまとめている。また、「規模×正規」および「規模× $t$ 」に基づく累積デフォルト損失率に関するヒストグラムおよび分布の上裾部分を拡大したものを図 4-7 の下段に表している。この図から、累積デフォルト損失率の分布の上裾部分の形状、ならびに VaR 値をみると、 $t$  分布 2 ファクターモデルの裾の厚さが確認できる。しかし、「規模× $t$ 」に対する損失が「規模×正規」に対する損失を超えるのは 99.9% VaR 近辺であり、前の 2 案件と比べると裾部分での差異は少ない。

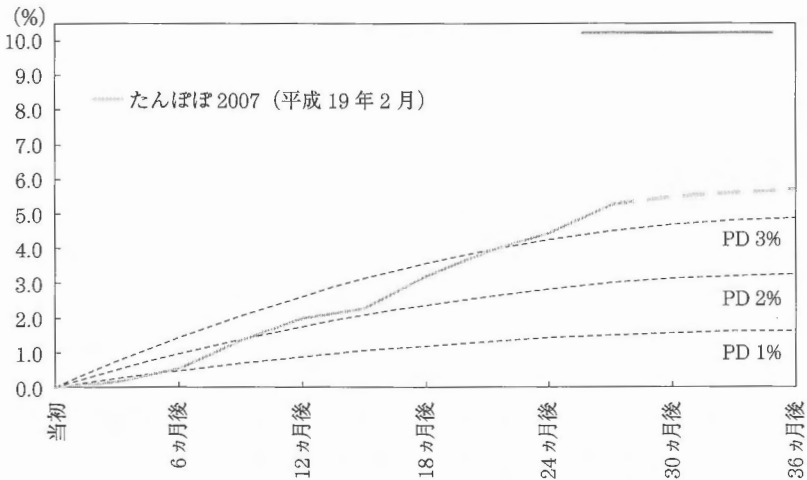


図 4-6 たんぼ 2007 の累積デフォルト率の推移

原債権の貸付年限：3 年。横軸に組成からの経過月数、縦軸に累積デフォルト率をプロットしている。原債権は期中均等償還されるため、期間 3 年の 1~3% のデフォルトカーブを記載している。横線は 2009 年 3 月時点のメザニン受益権の信用補完率であり、現状ベースでデフォルトが続いても (点線) 同受益権についてはまったく棄損の可能性はない。

表 4-8 各 CLO に対して、表 4-4、4-5 の「地域」および「企業規模」区分で推定した両モデルのパラメータ値を用いて、100 万回のモンテカルロ・シミュレーションによって求めた原債権の損失分布の期待損失および VaR 値の比較

表中の値は累積デフォルト損失額（上段）当初原債権金額に対する満期までの累積デフォルト損失率（中段）およびその年率換算値（下段）。

## ◆ 18 年 9 月 CLO

	モデル	期待損失	80% VaR	90% VaR	95% VaR	99% VaR	99.9% VaR
地域	正規分布	751 百万円	885 百万円	963 百万円	1,029 百万円	1,159 百万円	1,309 百万円
	2 ファクター モデル	6.23% (2.27%)	7.34% (2.67%)	7.99% (2.90%)	8.54% (3.10%)	9.61% (3.50%)	10.86% (3.95%)
域	<i>t</i> 分布	751 百万円	910 百万円	1,014 百万円	1,109 百万円	1,320 百万円	1,666 百万円
	2 ファクター モデル	6.23% (2.27%)	7.55% (2.74%)	8.41% (3.06%)	9.20% (3.35%)	10.95% (3.98%)	13.82% (5.03%)
借入規模	正規分布	593 百万円	799 百万円	965 百万円	1,120 百万円	1,463 百万円	1,918 百万円
	2 ファクター モデル	4.92% (1.79%)	6.63% (2.41%)	8.00% (2.91%)	9.29% (3.38%)	12.14% (4.41%)	15.91% (5.79%)
	<i>t</i> 分布	594 百万円	789 百万円	985 百万円	1,195 百万円	1,765 百万円	2,841 百万円
	2 ファクター モデル	4.92% (1.79%)	6.55% (2.38%)	8.17% (2.97%)	9.91% (3.60%)	14.64% (5.32%)	23.57% (8.57%)

## ◆ 19 年 6 月 CLO

	モデル	期待損失	80% VaR	90% VaR	95% VaR	99% VaR	99.9% VaR
地域	正規分布	779 百万円	924 百万円	1,009 百万円	1,081 百万円	1,223 百万円	1,390 百万円
	2 ファクター モデル	5.78% (2.10%)	6.85% (2.49%)	7.48% (2.72%)	8.02% (2.92%)	9.07% (3.30%)	10.31% (3.75%)
域	<i>t</i> 分布	780 百万円	957 百万円	1,074 百万円	1,181 百万円	1,420 百万円	1,825 百万円
	2 ファクター モデル	5.79% (2.10%)	7.09% (2.58%)	7.96% (2.90%)	8.76% (3.18%)	10.53% (3.83%)	13.53% (4.92%)
借入規模	正規分布	615 百万円	828 百万円	999 百万円	1,161 百万円	1,516 百万円	1,996 百万円
	2 ファクター モデル	4.56% (1.66%)	6.14% (2.23%)	7.41% (2.69%)	8.61% (3.13%)	11.24% (4.09%)	14.80% (5.38%)
	<i>t</i> 分布	614 百万円	815 百万円	1,016 百万円	1,229 百万円	1,798 百万円	2,892 百万円
	2 ファクター モデル	4.56% (1.66%)	6.04% (2.20%)	7.53% (2.74%)	9.11% (3.31%)	13.33% (4.85%)	21.44% (7.80%)

## ◆ たんぽぽ 2007

	モデル	期待損失	80% VaR	90% VaR	95% VaR	99% VaR	99.9% VaR
地域	正規分布	1,199 百万円	1,427 百万円	1,581 百万円	1,720 百万円	2,014 百万円	2,392 百万円
	2 ファクター モデル	3.93% (2.25%)	4.68% (2.67%)	5.18% (2.96%)	5.64% (3.22%)	6.61% (3.78%)	7.85% (4.48%)
域	<i>t</i> 分布	1,194 百万円	1,393 百万円	1,527 百万円	1,651 百万円	1,938 百万円	2,441 百万円
	2 ファクター モデル	3.92% (2.24%)	4.57% (2.61%)	5.01% (2.86%)	5.42% (3.09%)	6.36% (3.63%)	8.01% (4.58%)
借入規模	正規分布	939 百万円	1,183 百万円	1,361 百万円	1,526 百万円	1,879 百万円	2,350 百万円
	2 ファクター モデル	3.08% (1.76%)	3.88% (2.22%)	4.47% (2.55%)	5.00% (2.86%)	6.16% (3.52%)	7.71% (4.41%)
	<i>t</i> 分布	941 百万円	1,152 百万円	1,308 百万円	1,458 百万円	1,815 百万円	2,467 百万円
	2 ファクター モデル	3.09% (1.76%)	3.78% (2.16%)	4.29% (2.45%)	4.78% (2.73%)	5.96% (3.40%)	8.09% (4.62%)

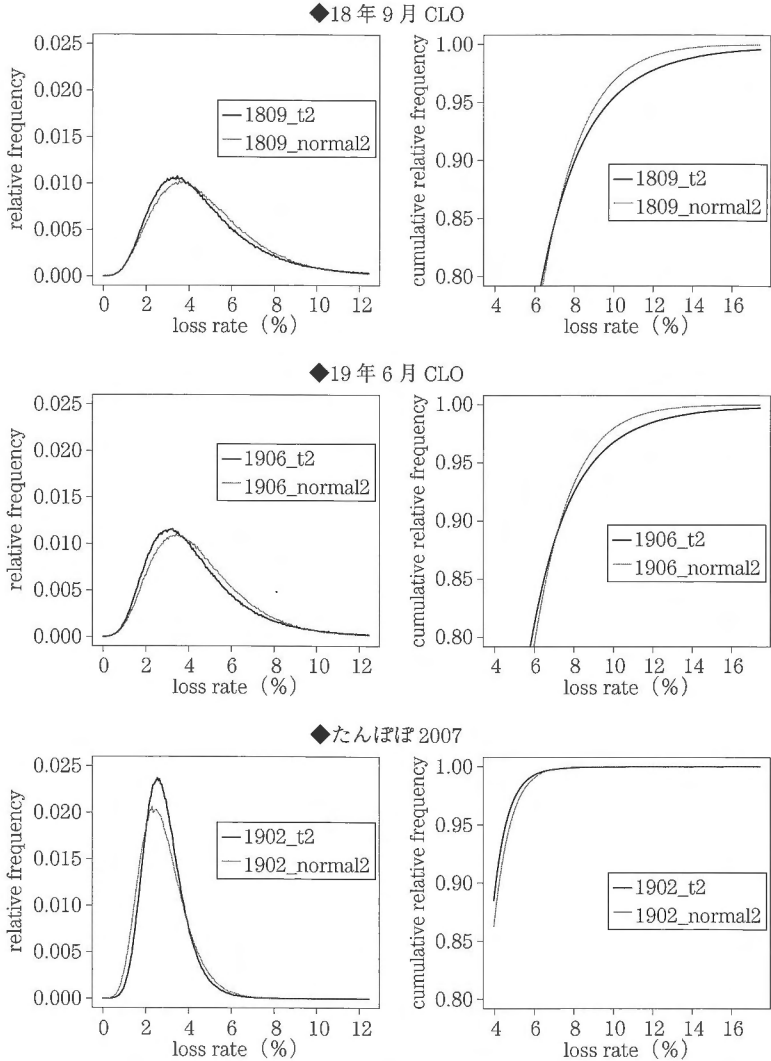


図 4-7 (左側) 各 CLO に対して、表 4-4、4-5 の「企業規模」区分で推定した両モデルのパラメータ値を用いて、100 万回のモンテカルロ・シミュレーションによって求めた当初原債権金額に対する満期までの累積デフォルト損失率の相対頻度ヒストグラム (0.05%ごとに階級を設定)/右側) 上裾部分の累積相対度数 (いずれも正規分布 2 ファクターモデル (細線) および  $t$  分布 2 ファクターモデル (太線))。

また、各シミュレーションによって得られた優先およびメザニン受益権の期待損失率に基づく推定格付けは、表 4-9 の下段にまとめている。

推定格付けに注目すると、「地域×正規」では、優先受益権については実際の当初格付け Aaa に一致し、メザニン受益権についての推定格付けは A1（実際は A2）と 1 ノッチの差はあるが、実際の当初格付けも両モデルの推定格付けもシングル A という評価が得られている。「地域×*t*」では、優先受益権、メザニン受益権ともに当初格付け（それぞれ Aaa, A2）と一致した。

さらに、「規模×正規」および「規模×*t*」に対しては、優先受益権についてもメザニン受益権についても実際の当初格付け（それぞれ Aaa および A2）と一致した結果が得られている。

たんぽぽ 2007 に関しては、組成から 2 年半たった現時点でも格付けの見直しは行われておらず、2 ファクターモデルで分析した結果はいずれの組合せにおいても現状のデフォルト状況と整合的であることが示唆されている。この結果は、18 年 9 月 CLO および 19 年 6 月 CLO に対する分析において「規模×*t*」が保守的なりスク評価を与えていたこととは対照的であり、「規模×*t*」の組合せが必ずしも保守的なりスク評価を与えるわけではないことを表している。

また、一般的な言及はできないものの、今回取り上げなかった残りの案件についてはメザニン毀損可能性がたんぽぽ 2007 と同程度かそれより低いより状況であることを考えると、いずれの組合せのシミュレーション分析においてもたんぽぽ 2007 と同様の結果が得られると推察される。実際、詳細は割愛するが、前 3 案件とは対照的に、特に波乱なく 2008 年 4 月に全受益権が満期を迎えて全額償還された第 1 回地域金融機関 CLO<sup>20)</sup> について、前述した 4 つの組合せのシミュレーション分析をしたところ、優先受益権については全組合せで実際の当初格付けと同じ Aaa が推定された。一方、メザニン受益権の推定格付けは、「地域×正規」では Aaa、「地域×*t*」では Aa1、「規模×正規」では

20) 債権元本総額 10,353 百万円、債務者数 309 社、原債権の平均年限約 1.63 年、優先トランシェ 8,400 百万円（当初格付け AAA、信用補完率 18.9%）、メザニントランシェ 250 百万円（当初格付け A1、信用補完率 16.4%）、信託設定日 2005 年 3 月 22 日、予定償還日 2008 年 4 月 15 日。

表 4-9 各 CLO に対する当初格付けと本研究両モデルによる CLO の評価  
 優先およびメザニントランシェの想定格付けは、ムーディーズの「理想化された期待損失テーブル」(表 4-3) とシミュレーションで算出した累積期待損失率を比較して試算している。毀損回数は 100 万回の試行のうち累積損失が対象トランシェまで及んだ回数を表す。また、当初格付け欄に記載した累積期待損失率は、同テーブルを基に各当初格付けを得るために要求される期待損失率の上限である。

◆ 18 年 9 月 CLO		優先受益権		メザニン受益権	
		累積期待損失率 (毀損回数)	想定格付け	累積期待損失率 (毀損回数)	想定格付け
	当初格付け	[0.00033%以下]	[Aaa]	[0.1691%以下]	[A3]
地	正規分布 2 ファクター	0.00001% (16)	Aaa	0.06224% (3,203)	A2
	<i>t</i> 分布 2 ファクター	0.00275% (1,444)	Aa1	0.63967% (18,546)	Baa3
借入規模	正規分布 2 ファクター	0.01193% (6,320)	Aa3	1.51030% (29,062)	投資不適格
	<i>t</i> 分布 2 ファクター	0.06328% (15,136)	A2	2.65857% (43,562)	投資不適格
◆ 19 年 6 月 CLO		優先受益権		メザニン受益権	
		累積期待損失率 (毀損回数)	想定格付け	累積期待損失率 (毀損回数)	想定格付け
	当初格付け	[0.00033%以下]	[Aaa]	[0.1691%以下]	[A3]
地	正規分布 2 ファクター	0.00004% (88)	Aaa	0.04730% (1,382)	A1
	<i>t</i> 分布 2 ファクター	0.00731% (4,503)	Aa2	0.83184% (14,192)	Baa3
借入規模	正規分布 2 ファクター	0.01500% (8,657)	Aa3	1.34379% (19,538)	投資不適格
	<i>t</i> 分布 2 ファクター	0.06832% (19,486)	A2	2.53904% (32,629)	投資不適格
◆ たんぽぽ 2007		A 号無担保社債		B 号無担保社債	
		累積期待損失率 (毀損回数)	想定格付け	累積期待損失率 (毀損回数)	想定格付け
	当初格付け	[0.00008%以下]	[Aaa]	[0.03038%以下]	[A2]
地	正規分布 2 ファクター	0.00000% (0)	Aaa	0.01099% (1,488)	A1
	<i>t</i> 分布 2 ファクター	0.00003% (12)	Aaa	0.02158% (1,600)	A2
借入規模	正規分布 2 ファクター	0.00000% (0)	Aaa	0.02436% (2,830)	A2
	<i>t</i> 分布 2 ファクター	0.00004% (14)	Aaa	0.02673% (1,535)	A2



Aa1, および「規模× $t$ 」では Aa3 となり, いずれも当初格付け (A1) と比べると楽観的な結果が得られている。

## 5 ま と め

本研究では, 北野 (2007) による正規分布 2 ファクターモデルおよび本研究で提案する  $t$  分布 2 ファクターモデルに基づいて, 日本公庫 CLO 案件の実績データの分析を行った。このうち,  $t$  分布 2 ファクターモデルは先行研究をふまえ, カテゴリ区分という観点を導入できるという 2 ファクターモデルの特性と, ファットテール性および潜在変数間の裾依存性を有する  $t$  分布ファクターモデルの特性の両方を取り込めることを期待して, 新たに提案したものである。

まず, 2 ファクターモデルのカテゴリ区分をどの属性に基づいて行うべきであるか, という点では, 日本公庫 CLO のデータを用いたパラメータ推定の結果, 正規分布と  $t$  分布をベースとするいずれのモデルにおいても, 「企業規模」によるカテゴリ区分で尤度が最大となった。また,  $t$  分布 2 ファクターモデルのファットテール性を支配する自由度パラメータ  $\nu$  の推定結果はいずれのカテゴリ区分でも 6~8 程度となった。 $t$  分布 2 ファクターモデルは  $\nu = \infty$  として正規分布 2 ファクターモデルを包含しており, この結果は現実のデフォルト依存関係は, 資産相関の意味において正規分布が想定するよりもファットテール性が十分に大きいことを示唆している。

AIC を基準とした場合,  $t$  分布 2 ファクターモデルは, 正規分布 2 ファクターモデルに劣る結果にはなり, 統計的に  $t$  分布 2 ファクターモデルが有効であると主張はできないことには注意しておく。しかし, 本研究の段階では, 推定に用いたサンプル数が不十分である可能性や最適化についての技術が洗練されていないこともあり, データおよび推定技術の面での今後の改善の結果次第で  $t$  分布 2 ファクターモデルの適合度も改善する可能性はあると考える。

次に, 13 件の日本公庫 CLO のうち, デフォルトが集中的に発生している 3 つの案件に対してシミュレーションを行い, 裏付け資産プールの損失分布を分析した。そして, その分析結果を端的にみるため, 得られた損失状況について

各トランシェの上下限で切り分けて求めたトランシェごとの期待損失率を、ムーディーズが公表しているテーブルで対応づけた格付けに注目した。

「企業規模」によるカテゴリ区分を用いた  $t$  分布 2 ファクターモデルに基づくシミュレーション結果においては、実績デフォルト率が高まり上位トランシェの償還可能性までが懸念されている案件について、他のカテゴリ区分と分布の組み合わせによるシミュレーション結果よりも保守的で、なおかつ実際のデフォルト発生状況と整合的な格付けが推定された。この結果はパラメータ推定結果も含めて、ファットテール性および潜在変数間の裾依存性を有する  $t$  分布 2 ファクターモデルの性質が影響しているものと推察される。また、カテゴリ区分の選択によって結果に大きな影響が及ぶ可能性があることを示唆されていると考えられる。

一方で、実績デフォルト率が現実に高い CLO 案件であっても、上位トランシェにまで毀損の及ぶ可能性の少ない案件について（さらには、特に波乱なく満期を迎え CLO 全額償還された案件についても）分析した結果、「企業規模」と  $t$  分布 2 ファクターモデルの組み合わせがいたずらに保守的な評価を与えるというわけではないことも確認された。

「企業規模」と  $t$  分布 2 ファクターモデルの組み合わせは、格付け会社が採用していると公表している、債務者の地域もしくは業種の集中に配慮した正規コピュラモデルとは異なる新しいモデルであると言える。事後的な情報を使い、なおかつ限られた案件に対する分析であることに留意が必要であるが、「企業規模」と  $t$  分布 2 ファクターモデルの組み合わせが実際の当初格付けより相当に保守的なリスク評価を与えたという点は注目に値する。したがって、一般的な主張はできないが、保守的なリスク計測が求められる格付け会社や金融機関にとって  $t$  分布 2 ファクターモデルは有望であり、同時に適当なカテゴリ区分を与えることが重要であると考えられる。

今後の課題としては以下の点が挙げられる。まず、国内 CLO は 2000 年 3 月の東京都 CLO から始まったもので歴史が浅く、情報開示が十分でない案件も少なくないことから、欧米の先行研究と比べて母集団およびデフォルトのサンプル数が少ない。そのため、本研究ではパラメータが時間変化するという視点に立てていない。また、実証モデルもカテゴリを 3 区分に限定している。こ

れらについては、CLOの継続的な発行や情報開示の広がりによってデータが蓄積されていくことで改善が期待される。

また、モデルのさらなる改善のために、今回推定されたパラメータによる各CLOの損失分布と、各CLOが満期に至ったときの事後損失やデフォルト発生状況と比較していくことも必要であると考える。

## 付録A スコアリングモデル

### CRD (Credit Risk Database 中小企業信用リスク情報データベース)

中小企業金融の円滑化を図るべく、金融機関や投資家が中小企業の信用リスクについて信頼性の高い財務指標に基づく定量的評価を行うことを企図して、経済産業省・中小企業庁の主導により平成13年3月に構築された情報インフラ。信用保証協会や金融機関会員が有する取引先中小企業の財務データ・非財務データ及びデフォルトデータを収集し、スコアリングモデルの開発や各種サービスの提供により、会員の審査業務の効率化や信用リスク管理の高度化、取引先中小企業の経営支援などをサポートしている。なお「デフォルト」の定義は、3カ月以上の延滞先、実質破綻先・破綻先および信用保証協会の代位弁済先を示す(CRD協会のウェブサイト<http://www.crd-office.net/CRD/index2.htm>)。

### RDB 中小企業クレジット・モデル

日本の中小零細企業を対象とするスタンダード&プアーズと日本リスク・データ・バンクの共同開発による信用リスク評価モデル。金融機関・地方公共団体を除く全業種、非上場企業に対応する。モデルは、日本リスク・データ・バンクの会員から提出されたデータを基礎として、日本リスク・データ・バンクが構築し、スタンダード&プアーズがモデル・パフォーマンスの評価分析を行ったもの。「デフォルト」の定義は、3カ月以上の延滞先、破綻懸念先、実質破綻先・破綻先および保証協会の代位弁済先である。

### リスクカルク日本版

リスクカルクはムーディーズKMV社の商品である。「デフォルト」の定義は、90日間の支払い遅延、倒産、金融機関内での破綻懸念先への分類、償却である。詳しくは、「Moody's RiskCalc™ For Private Companies: Japan

(December 2001)] (日本語訳「ムーティーズ・リスクカルク非上場企業日本版 (2002年2月)」) を参照のこと。

### 付録 B ファクターモデルの裾依存性について

ファクターモデルでデフォルトリスクの依存性を問題にする場合には、ファクターの値がある閾値を下回るというデフォルトの定義から、比較する2変数の分布全体での依存関係よりも分布の下裾部分での依存関係の強さが重要になると考えられる。

ここではまず、裾依存 (tail dependence) 係数についての定義と知られている性質をまとめ、double- $t$  コピュラモデル (1次元  $t$  分布ファクターモデル) の裾依存性についての関連研究を紹介する。

一般に2つの確率変数  $X$ ,  $Y$  の周辺分布関数をそれぞれ  $F_X$ ,  $F_Y$  (いずれも逆関数が存在すると仮定) とするとき、

$$\lambda_u := \lim_{q \uparrow 1} P(Y > F_Y^{-1}(q) | X > F_X^{-1}(q))$$

$$\lambda_l := \lim_{q \downarrow 0} P(Y \leq F_Y^{-1}(q) | X \leq F_X^{-1}(q))$$

で定義される  $\lambda_u$ ,  $\lambda_l$  を (極限が存在すれば) それぞれ上裾依存係数および下裾依存係数と呼ぶ。いずれも1に近いほど依存性が強く、0に近いほど弱いとみなすことができる。

正規コピュラの場合は相関パラメータ  $\rho$  が1より小さければ  $\lambda_u = \lambda_l = 0$  であることが知られている。また、2変量  $t$  コピュラの場合は、自由度を  $\nu$ 、相関パラメータを  $\rho$  とするとき、 $\lambda_u = \lambda_l = 2T_\nu \left( -\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$  と表され、 $\rho > -1$  のときには両裾で同程度に正の裾依存性をもつことが知られている (詳細は、McNeil et al. (2005) の5.3節を参照のこと)。

2.1.3で触れた Burtschell et al. (2009) では、double- $t$  コピュラモデルについて、潜在変数  $V_i$  が、 $\rho \geq 0$  および、それぞれ自由度  $\nu_Y$ ,  $\nu_Z$  の  $t$  分布に従い、独立である共通ファクター  $Y$  および個別ファクター  $Z_i$  を用いて

$$V_i = \rho \sqrt{\frac{\nu_Y - 2}{\nu_Y}} Y + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\frac{\nu_Z - 2}{\nu_Z}} Z_i$$

と表現されるモデルを考えている ( $V_i$  の標準偏差を 1 にするために,  $\sqrt{\frac{\nu_* - 2}{\nu_*}}$  が掛けられている点が, 我々のモデルと異なっていることに注意する). そして, Malevergne and Sornette (2004) の結果を用いて,  $\nu_Y = \nu_Z$  のとき, このモデルの「裾依存係数」は

$$\lambda_u = \lambda_l = \frac{1}{1 + \left( \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} \right)^{\nu_Y}} \quad (10)$$

で与えられるとし<sup>21)</sup>,  $\nu_Y < \nu_Z$  のときは「裾依存係数」は 1,  $\nu_Y > \nu_Z$  のときは「裾依存係数」は 0 であると述べている.

注意が必要であるが, もとものの Malevergne and Sornette (2004) では, 上のモデルにおける  $V_i$  と  $Y$  についての裾依存係数を議論している. その意味で (10) 式を我々が知りたい異なる潜在変数  $V_i$  と  $V_j$  の間の裾依存係数であると即座に解釈することはできない. しかしながら,  $V_i$  と  $V_j$  は同等に共通ファクター  $Y$  と関連しているので,  $V_i$  と  $V_j$  に裾依存性があるということは確かであると考えられる.

また, Wanitjirattikal and Kiatsupaibul (2007) では, 正規コピュラおよび, 自由度 5 の  $t$  分布に基づく  $t$  コピュラと double- $t$  コピュラについて, 共通の相関パラメータを 0.1, 0.5, 0.9 としたそれぞれの場合について数値的に裾依存性を検証している. 特に上裾に関して  $q$  の値を 0.9~0.99 として  $P(Y > F_Y^{-1}(q) | X > F_X^{-1}(q))$  を算出するという方法で漸近的な挙動を観察している<sup>22)</sup>. その結果, 相関パラメータが 0.1 および 0.5 の場合には, double- $t$  コピュラの裾依存性は正規コピュラより大きく  $t$  コピュラより小さいが, 相関パラメータが 0.9 の場合には, 1 次元  $t$  分布ファクターモデルの裾依存性が最も大きい

21)  $\nu_Y = \nu_Z$  として  $\nu_Y \rightarrow \infty$  とするとき, 上記モデルは漸近的に正規コピュラモデルになるので, 裾依存係数も 0 に漸近していくはずである. しかし,  $\rho \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  のときには,  $\nu \rightarrow \infty$  としても (10) 式は 0 に収束しないことは明らかである. このことに対して, Malevergne and Sornette (2004) では,  $\nu \rightarrow \infty$  と  $q \uparrow 1$  の極限操作の順序交換ができないためであると述べている.

22) Wanitjirattikal and Kiatsupaibul (2007) の Table 1 の  $\rho = 0.9$  に対する  $t$  コピュラの裾依存係数の理論値が 0.4454 となっているが, これは  $\rho = 0.8$  に対する理論値である.

ことを考察している<sup>23)</sup>。

### 付録 C 日本公庫 CLO データに対する 1 ファクターモデルの最尤推定結果

ここでは、(4) 式で表される 2 ファクターモデルの式において、 $\rho_0=0$  とおき、各カテゴリ  $g=1,2,3$  に対し  $Z_{g,t}$  をカテゴリ内の共通ファクターとして、

$$V_{g,i,t} = \rho_g Z_{g,t} + \sqrt{1 - \rho_g^2} \varepsilon_{i,t} \quad (11)$$

というカテゴリごとに 1 ファクターモデルとみなせるモデルを、4.1 項で取り上げた日本公庫 CLO データに適用してパラメータ推定した結果を表 4-10、4-11 に示しておく。また、 $\theta_g$  はカテゴリ  $g$  内の債務者に共通であると仮定するデフォルト閾値であり、 $V_{g,i,t} \leq \theta_i$  となるとときに債務者  $i$  はデフォルトと定義していることに注意する。

その他、データや推定上の注意などについては、4.1 項を参照のこと。

表 4-10 日本公庫 CLO データに対する正規分布 1 ファクターモデルの最尤推定結果

カッコ内の数値は各推定値の標準誤差。また、[ ] 内の数値は AIC (赤池情報量規準)。

	地域	業種	企業規模
カテゴリ 1	大都市	製造業	20 百万円未満
カテゴリ 2	都市圏	卸・小売	20 百万円以上 40 百万円未満
カテゴリ 3	地方	その他	40 百万円以上
$\theta_1$	-2.714 ( 0.67)	-3.033 ( 1.00)	-3.302 ( 1.05)
$\theta_2$	-2.746 ( 0.46)	-2.583 ( 1.00)	-2.668 ( 0.14)
$\theta_3$	-3.158 ( 0.91)	-3.130 ( 1.00)	-3.195 ( 1.01)
$\rho_1$	0.008 ( 1.00)	0.009 ( 1.00)	0.114 ( 1.00)
$\rho_2$	0.008 ( 1.00)	0.012 ( 1.00)	0.114 ( 1.00)
$\rho_3$	0.015 ( 1.00)	0.014 ( 1.00)	0.284 ( 1.00)
対数尤度 [AIC]	-7.57 [27.1 ]	-8.41 [28.8 ]	-5.04 [22.1 ]
カテゴリ内相関平均	0.0001	0.0001	0.0354
$\rho_1^2$	0.0001	0.0001	0.0129
$\rho_2^2$	0.0001	0.0002	0.0129
$\rho_3^2$	0.0002	0.0002	0.0804

23) ただし、Burtshell et al. (2007) が表している (10) 式に  $\nu=5$  および各  $\rho$  の値を代入して得た値は、 $\rho=0.5, 0.9$  では Wanitjirattikal and Kiatsupaibul (2007) の漸近的な数値計算の結果とは整合的にみえないことを付記しておく。

表 4-11 日本公庫 CLO データに対する  $t$  分布 1 ファクターモデルの最尤推定結果  
 カッコ内の数値は各推定値の標準誤差。また, [ ] 内の数値は AIC (赤池情報量  
 規準)。

	地域	業種	企業規模
カテゴリ 1	大都市	製造業	20 百万円未満
カテゴリ 2	都市圏	卸・小売	20 百万円以上 40 百万円未満
カテゴリ 3	地方	その他	40 百万円以上
$\theta_1$	-3.890 ( 1.00)	-4.694 ( 1.00)	-5.187 ( 0.99)
$\theta_2$	-3.921 ( 1.00)	-3.607 ( 1.00)	-3.431 ( 0.69)
$\theta_3$	-4.971 ( 1.00)	-4.818 ( 1.00)	-3.966 ( 0.89)
$\rho_1$	0.072 ( 1.00)	0.032 ( 1.00)	0.082 ( 1.00)
$\rho_2$	0.072 ( 1.00)	0.057 ( 1.00)	0.066 ( 1.01)
$\rho_3$	0.217 ( 1.00)	0.110 ( 1.00)	0.306 ( 1.01)
$v$	6.86 ( 1.00)	6.94 ( 1.00)	7.83 ( 0.96)
対数尤度 [AIC]	-7.67 [29.3]	-8.41 [30.8]	-5.29 [24.6]
カテゴリ内相関平均	0.0191	0.0054	0.0350
$\rho_1^2$	0.0052	0.0010	0.0068
$\rho_2^2$	0.0052	0.0033	0.0043
$\rho_3^2$	0.0469	0.0120	0.0938

#### [参考文献]

- 北野利幸 (2006) 「デフォルト相関に関する  $t$  分布ファクターモデル—CDO 評価への応用」『ジャフィー・ジャーナル金融工学と証券市場の計量分析 2006』, 83-117, 東洋経済新報社。
- 北野利幸 (2007) 「デフォルト実績データによるデフォルト依存関係の推定—2 ファクターモデルによる資産相関の最尤推定」『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』, 50, 42-67。
- 戸坂凡展・吉羽要直 (2005) 「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」『金融研究』24 (別冊 2), 115-162。
- 橋本 崇 (2008) 「与信ポートフォリオの信用リスク計量における資産相関について—本邦のデフォルト実績データを用いた実証分析」『日本銀行ワーキングペーパーシリーズ』, No.08-J-10。
- 森平爽一郎・瀬尾純一郎・佐藤隆行 (2008) 「わが国初のデフォルト相関・共倒れリスクの推計」『週刊金融財政事情』2008 年 7 月 21 日号, 42-47。
- 吉規寿郎 (2009) 「中小企業 CLO におけるデフォルト依存関係の推定— $t$  分布 2 ファクターモデル導入の意義及び実務での適用可能性」, 一橋大学大学院国際企業戦略研究科 2008 年度修士論文。

- Burtschell, X., J. Gregory, and J.-P. Laurent (2009), "A comparative analysis of CDO pricing models under the factor copula framework," *Journal of Derivatives*, **16**(4), 9-37.
- Dietsch, M. and J. Petey (2004), "Should SME exposures be treated as retail or corporate exposures? A comparative analysis of default probabilities and asset correlations in French and German SMEs," *Journal of Banking and Finance*, **28**, 773-788.
- Hull, J. and A. White (2004), "Valuation of a CDO and an  $n^{\text{th}}$  to default CDS without Monte Carlo simulation," *Journal of Derivatives*, **12**(2), 8-23.
- Gordy, M. (2000), "A comparative anatomy of credit risk models," *Journal of Banking and Finance*, **24**(1-2), 119-149.
- Gordy, M. and E. Heitfield (2002), "Estimating default correlations from short panels of credit rating performance data," *Working paper*, Federal Reserve Board.
- Malevergne, Y. and D. Sornette (2004), "How to account for extreme comovements between individual stocks and the market," *Journal of Risk*, **6**(3), 71-116.
- Mashal, R. and M. Naldi (2002), "Pricing multiname credit derivatives : Heavy tailed hybrid approach," *Working Paper*, Columbia Business School.
- McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts (2005), *Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools*, Princeton Series in Finance. Princeton University Press.  
(邦訳として、塚原英敦他訳 (2008) 『定量的リスク管理—基礎概念と数理技法』共立出版.)
- Merton, R. C. (1974), "On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates," *Journal of Finance*, **29**(2), 449-470.
- Miranda, M. J. and P. L. Fackler (2002), *Applied Computational Economics and Finance*, MIT Press.
- Schönbucher, P. J. (2005), *Credit Derivatives Pricing Models : Model, Pricing and Implementation*, John Wiley & Sons.  
(邦訳として、望月 衛訳 (2005) 『クレジット・デリバティブモデルと価格評価』東洋経済新報社.)
- The MathWorks (2004), *Optimization Toolbox User's Guide*, The MathWorks Inc.



Wanitjirattikal, P. and S. Kiatsupaibul (2007), "Tail dependence of Student's  $t$  copula and double  $t$  copula and their effects on pricing credit derivatives," *The Thammasat International Journal of Science and Technology*, **12**(2), 1-9.

(吉規寿郎：日本政策金融公庫中小企業事業本部)

(中川秀敏：一橋大学大学院国際企業戦略研究科)