

契約付マッチング*

——理論と応用——

糟谷祐介・平田大祐

本稿は「契約付マッチング(matching with contracts)」と呼ばれる理論とその応用を概説する。第一に、契約付マッチング理論の標準的なモデルと、応用上中心的な役割を果たす累積オファー・メカニズム(cumulative offer mechanism)を紹介する。第二に、それらのモデルおよびメカニズムの現実の事例への応用を解説する。第三に、累積オファー・メカニズムに依拠しない「無構造アプローチ」による理論研究を紹介し、その意義を論じる。
JEL Classification Codes: C78, D47

1. 序論

本稿は、Hatfield and Milgrom(2005)によって定式化され、過去15年の間に発展してきた「契約付マッチング(matching with contracts)」の理論とその応用を概説する。契約付マッチングは理論的には、Gale and Shapley(1962)以来の古典的なマッチング理論の一般化である。古典的理論については、特に2012年にAlvin RothとLloyd Shapleyがノーベル経済学賞を受賞して以来、広く紹介・解説されているので、本稿では詳しい解説を省略する。マッチングに詳しい邦語のテキストとしては、栗野(2019)と坂井(2010)を参照されたい。

古典的理論と比較した場合、契約付マッチング理論の最も分かりやすい特徴は、その名前にもある通り「契約」の存在である。典型的なマッチング理論では、大学入試(college admission)問題を例にして言えば、学生と大学の間にはマッチするかしないか(入学するかしないか)という二種類の関係しか存在しない。しかし、ある大学に入学が許可されるとしても、授業料減免の有無や、入学を許可された学科・プログラムなど、学生にとっての望ましさに影響する様々な条件が存在し得る。そこで契約付マッチングでは、同一の学生—大学間にも複数の「マッチの仕方」が存在することを考慮し、

個々の「マッチの仕方」を契約と呼ぶのである¹⁾。

今日的な契約付マッチング理論のもう一つの重要な特徴は、選択関数(choice functions)をモデルの基本要素とすることである。古典的な理論では、再び大学入試を例とすると、大学の選抜基準は学生のランキングと定員によって与えられ、各大学は選考対象のうちランキング上位の学生から順に入学を許可すると仮定される。しかしながら、現実のマッチング市場では、そのような絶対無二のランキングはしばしば存在しない。例えば、ある大学が成績の良い学生を入学させたいと思う一方で、入学する学生全体の多様性も重要だと考えているとしよう。この大学が(1)成績の良い非マイノリティ学生と(2)成績のあまり良くないマイノリティ学生を比較したとき、既に多様性が十分に確保されているならば前者を合格させたいと考えるであろう。しかし、合格者全体にマイノリティが少なすぎる場合には、成績には目を瞑って後者を合格させるかもしれない。つまり、この大学にとって(1)と(2)のどちらの学生が望ましいかは、他の志願者のプールに依存して変化するので、両者の間の単純な二項関係では表現できない。このような古典的理論の限界に対して、大学の選抜基準を志願者全体から合格者全体への関数として抽象的にモデル化することにより、より多く

の現実の事例を特殊ケースとして扱えるようになることも契約付マッチングの重要な特徴である。

次節以降は以下のように構成される。2節では契約付マッチングの標準モデルを導入し、Hatfield and Milgrom(2005)の主要定理の一つを紹介する。3節では、その後の理論上の発展と応用上の意義を、米国陸軍での事例を中心に論じる。4節では、2-3節で紹介した潮流とはやや異なるアプローチの可能性について解説する。

2. 契約付マッチングの標準モデル

本節では Hatfield and Milgrom(2005)に基づき、契約付マッチング理論の標準的なモデルと基本的な結果について概説する。次節で述べるように契約付マッチングの現実への応用は多岐に渡るが、便宜上ここでは生徒と学校の間のマッチング(学校選択制)のモデルとして解説する。

I, S を生徒と学校の有限集合とする。序論で述べたように、契約付マッチング理論では生徒 i と学校 s の間に複数の「マッチの仕方」が存在することを許し、あり得る「マッチの仕方」全体の集合を Θ で表す。どの生徒がどの学校にどのような条件でマッチするかを記述した組 $x = (i, s, \theta) \in I \times S \times \Theta$ を **契約** と呼ぶ。契約 x が与えられたとき、その契約でマッチする生徒と学校をそれぞれ $\mathbf{i}(x)$ と $\mathbf{s}(x)$ で表す。以下ではあり得るすべての契約の集合を X で表し、有限であると仮定する。

このモデルにおけるマッチングの結果は、成立した契約全体の集合 $X' \subset X$ として表現される。すなわち、契約 $x = (i, s, \theta)$ が X' に含まれることは、生徒 i が学校 s に θ という条件で入学することを表す。ある生徒 i に関わる契約が X' に一つも含まれない場合には、 i はモデル内のどの学校 $s \in S$ にも入学せず、何らかの外部機会 $\emptyset$ を得るものと解釈する。逆にある i に関係する契約が複数ある場合には、 i が複数の学校に入学する、あるいは同じ学校に複数の異なる条件で入学することと解されるが、そのような状況は多くの場合非現実的なので除外

する必要がある²⁾。つまりここでの**実現可能な配分**(feasible allocation)とは

$$[x, y \in X' \text{ and } x \neq y] \Rightarrow \mathbf{i}(x) \neq \mathbf{i}(y)$$

を満たすような契約の部分集合 X' であり、以下では実現可能な配分全体を $\mathcal{X} \subset 2^X$ で表す。

次に、生徒の選好と学校の選抜基準を定義する。各生徒 i は自分に関わる契約全体および外部機会 $\emptyset$ の上に線形の選好関係 $\succ_i$ を持ち、任意の $x, y \in X$ に対して $x \succeq_i y$ で $[x \succ_i y \text{ or } x = y]$ を表すこととする。選好 $\succ_i$ に基づいて外部機会よりも望ましい契約は i にとって許容可能(acceptable)であると言う。一方、各学校 s の選抜基準は、選抜対象となる契約のメニューから選抜の結果受入の対象となる契約の集合を選ぶ、**選択関数**として表現される。より具体的には s の選抜基準は任意の $X', X'' \subset X$ と $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} & \cdot C_s(X') \in \mathcal{X} \text{ and} \\ & C_s(X') \subset \{x \in X' : \mathbf{s}(x') = s\}, \\ & \cdot x \notin C_s(X'' \cup \{x\}) \\ & \Rightarrow C_s(X'' \cup \{x\}) = C_s(X''), \end{aligned}$$

を満たすような $C_s : 2^X \rightarrow 2^X$ である。第一の条件は C_s は s 以外の学校に係る契約を選抜しないこと、および同じ生徒の契約を複数選抜することはないことを意味する。第二の条件は irrelevance of rejected contracts(Aygun and Sönmez, 2012, 2013)と呼ばれる合理性の条件であり、「選考の対象になっても選抜されない契約は、そもそも選考対象から除外されても選抜結果に影響しない」ことを要求する。多くの応用上、選抜基準 C_s は学校 s の選好であるとは限らないことには注意が必要である。例えば米国の学校選択制度は、各学校は兄あるいは姉が既にその学校に通学しているような生徒を優先的に選抜するように設計されていることが多い。これは、(生徒側のメリットを勘案すると)そのような生徒が優先されるべきであるという、教育当局あるいは社会全体の価値規範を表現し

ているのであって、学校側に兄弟姉妹を同時に受け入れるメリットがあるわけではない。

そのような価値規範としての選抜基準と生徒の選好の双方を勘案した上で、社会的に公正な配分を規定するのが以下の安定性である。各生徒の選好の組 $\succ_I = (\succ_i)_{i \in I}$ および各学校の選抜基準の組 $C_S = (C_s(\cdot))_{s \in S}$ が与えられたとき、配分の安定性は次のように定義される。

定義. $(\succ_I, C_S)$ を所与とする。以下の条件を満たすとき、配分 X' は個人合理的であると言う：

- ・ $x \succ_{i(x)} \emptyset$ for all $x \in X'$, かつ
- ・ $C_s(X') = \{x' \in X' : s(x') = s\}$ for all $s \in S$.

以下の条件を満たすとき、学校 s と契約の集合 X'' は配分 X' をブロックすると言う：

- ・ $C_s(X' \cup X'') \neq C_s(X')$, かつ
- ・ $C_s(X' \cup X'') \geq_{i(x)} X'$ for all $x \in C_s(X' \cup X'')$.

いかなる (s, X'') にもブロックされないとき、個人合理的配分 X' は $(\succ_I, C_S)$ において安定であると言う。□

上記の安定性の定義は古典的な安定マッチングの定義の一般化になっており、契約付マッチングにおいても最も重要視される配分の性質である。なぜ安定性が制度設計上望ましいのかを確認するために、 X' を $(s, \{y\})$ にブロックされる不安定な配分であると仮定し、生徒 $i(y)$ が「自分は学校 s と契約 y で入学を認められるべきである」と訴え出たとしよう。ブロックの定義から、既存の配分で入学を認められている契約全体に y を加えた上で選考をやり直すと、 C_s は実際に y を選抜するはずである³⁾。その点で当該の生徒 $i(y)$ の訴えは正当である。例えば制度設計者に配分 X' を強制する力があっても、 $i(y)$ が y を望んでいるにも関わらず正当な訴えが認められない状況は社会的に公正

とは言えないであろう⁴⁾。

どのような配分が(安定性の意味で)社会的に望ましいかは生徒の選好と学校の選択関数に依存する。このうち学校の選抜基準である選択関数は、社会的な議論を通じて制度設計者(学校選択制であれば自治体の教育当局)が公的に決定するものである。他方、生徒の選考は制度設計者には直接観察することのできない私的情報である。従って望ましいマッチング・メカニズムには、生徒に選好を正直に表明する適切な誘因を与えたうえで、安定なマッチングを実現することが求められる。「適切な誘因」には様々な基準があるが、マッチング理論において通常考えられるのは耐戦略性(正直に選好を申告することが各生徒にとって支配戦略となること)である。

より形式的には、マッチング・メカニズムは生徒の選好のありえる組み合わせに対して実現可能な配分を割り当てる関数である。社会的に望ましいマッチング・メカニズムの候補として既存研究で中心的な役割を果たしてきたのは、次に定義する累積オファー・メカニズム(cumulative offer mechanism)である。以下の記述は各ステップで i_t をどのように選ぶかを特定していないが、一定の条件の下では、 i_t をどのように選んでも最終的に同じ出力が得られることが知られている(Hirata and Kasuya, 2014; Kominers and Sönmez, 2016; Hatfield *et al.* 2020)。また契約の数は有限であると仮定されているので、以下のアルゴリズムは有限の高々 $|X|$ ステップで必ず収束する。

定義. 各学校の選抜基準 $C_S = (C_s)_{s \in S}$ を所与とする。累積オファー・メカニズム $F^*(\cdot | C_S)$ は以下のアルゴリズムに基づいて、入力 $\succ_I = (\succ_i)_{i \in I}$ に対応する契約集合 $F^*(\succ_I | C_S)$ を出力する。以下では I_t, P_t はそれぞれ、「ステップ t でオファーを出す資格のある生徒の集合」および「ステップ t までにオファーされた契約の集合」を表す。

- ・ 初期条件： $I_1 = I, P_0 = \emptyset$ とする。

・ステップ $t \geq 1$: 任意の $i_t \in I_t$ はまだオファーされていない契約 $X - P_{t-1}$ のうち $>_{i_t}$ に照らし合わせて最も良い契約 x_t を新たにオファーする. 各学校 s は $P_t := P_{t-1} \cup \{x_t\}$ から $C_s(P_t)$ を選抜し, 仮合格として受け入れる. いかなる仮合格も得ておらず, かつまだオファーしていない許容可能な契約がある生徒の集合を

$$I_{t+1} := \{i \in I : [i \neq \mathbf{i}(x) \text{ for all } x \in \cup_s C_s(P_t)] \text{ and } [y >_i \emptyset \text{ for some } y \in X - P_t]\},$$

とする. I_{t+1} が非空であればステップ $t+1$ に進む. I_{t+1} が空集合である場合には仮合格を最終決定とし, $F^*(>_I | C_s) = \cup_s C_s(P_t)$ を出力して終了する. $\square$

累積オファー・メカニズムは古典的マッチング理論における受入保留メカニズム(deferred acceptance mechanism; Gale and Shapley, 1962)によく似ているが, 以下の点に注意が必要である. 累積オファー・メカニズムの各ステップでは, 学校は過去に仮合格として受け入れなかったものも含め, それまでにオファーされた全ての契約から選択する⁵⁾. この定義から, 累積オファー・メカニズムの出力は**実現可能である場合には必ず安定にもなることが分かる**⁶⁾.

一般には累積オファー・メカニズムの出力は常に実現可能であるとは限らない. 更に出力が常に実現可能である場合でも, 一般には耐戦略だとは限らない. しかしながら, Hatfield and Milgrom (2005) は各学校の選抜基準 $C_s(\cdot)$ が以下の二つの条件を満たすときには, 累積オファー・メカニズムが安定性と耐戦略性の両方を満たす望ましいマッチング・メカニズムとなることを示した.

定義. 選択関数 C_s が任意の $x, y \in X$ と $X' \subset X$ に関して

$$[x \neq y \text{ and } x \notin C_s(X')] \Rightarrow x \notin C_s(X' \cup \{y\}),$$

を満たすとき, C_s は**代替的**(substitutable)であると言う⁷⁾. $\square$

定義. 選択関数 C_s が任意の $X', X'' \subset X$ に関して $X' \subset X'' \Rightarrow |C_s(X')| \leq |C_s(X'')|$ を満たすとき, C_s は**サイズ単調**(size-monotonic)であると言う. $\square$

定理(Hatfield and Milgrom, 2005). 全ての学校の選抜基準 $C_s(\cdot)$ が代替的かつサイズ単調ならば, 累積オファー・メカニズム $F^*(\cdot | C_s)$ は耐戦略的であり, その出力は常に安定である. $\square$

3. 弱い代替性とその応用

前節で紹介した Hatfield and Milgrom (2005) の定理は後続研究によって続々と一般化され, 今日では累積オファー・メカニズムが安定性および耐戦略性を満たすためのより弱い条件が複数知られている⁸⁾. これらの理論的一般化は, 契約付マッチングの現実社会への応用範囲の拡大にも実際に貢献している. 現実のマッチング市場において, 一般化された(より弱い)条件は満たすものの, Hatfield and Milgrom (2005) のオリジナルの条件は満たさない事例がしばしば観察されるからである. 以下では, そのような応用の例として, 米国陸軍における士官候補生マッチングを取り上げる⁹⁾.

米国陸軍士官学校(US Military Academy)の卒業生は, ブランチと呼ばれる専門性に基づく陸軍の下部組織に配属され, 一定の軍役義務を課された上でより専門的な訓練を積む. 一方 1980 年代以来, 米国陸軍では下級士官の定着率の低さが大きな問題であった. そこで下級士官の定着率を高める目的で, 米国陸軍は 2006 年に “branch-for-service” と呼ばれる制度を導入した. これは, ブランチの割当てにおいて優遇することを通じて, 元来 5 年間であった軍役義務の期間の 8 年間への自発的延長を促す制度である. しかしながら, 米国陸軍が 2006 年に導入した割当てメカニズムには, 安定性および耐戦略性の点で問題があることが Sönmez and

Switzer(2013)によって指摘された。その解決策として Sönmez and Switzer(2013)は前節で紹介した累積オファー・メカニズムを提案し、2020 年から実際に累積オファー・メカニズムが採用されている(OConnor, 2019)。

この事例は、前節の標準モデルで以下のように定式化できる。 I, S を本節ではそれぞれ、士官候補生とプランチの集合とする。両者の間には軍役義務期間に応じて二つのマッチの仕方、すなわち $\theta \in \{5, 8\}$ がある。各プランチの選抜基準は3つの要素から誘導される。第一は士官学校での成績等によって決まる、陸軍から見た士官候補生の優先順位である。以下では i の方が j よりも優先順位が高いことを $i \triangleright j$ で表す¹⁰⁾。第二はプランチの定員 q_s である。最後の要素は、定員に占める優遇枠の数 q_s^e である。これらの要素から各プランチの選抜基準は以下のように与えられる。

定義. 優先順位 $\triangleright$ 、定員 q_s 、優遇枠数 q_s^e が与えられたとき、プランチの選択関数 $C_s^{MA}(\cdot)$ は各入力 X' に対して以下のように出力を計算する：

1. 最初の $q_s - q_s^e$ 枠については優先順位のみに基づいて選抜する。すなわち、 X' に契約が含まれる士官候補生のうち、優先順位上位 $q_s - q_s^e$ 人に係る契約を選抜する。 $(i, s, 5)$ と $(i, s, 8)$ がともに X' に含まれる場合には $(i, s, 5)$ を優先する。 X' のうち、まだ選抜されていない士官候補生に係る契約の集合を $\tilde{X}'$ とする。
2. 残りの q_s^e 枠は軍役義務期間の延長に同意する士官候補生を優先して選抜する。すなわち、 $\tilde{X}'$ に $\theta=8$ であるような契約が含まれる士官候補生のうち、優先順位上位 q_s^e 人の契約を選抜する。 $(i, s, 5)$ と $(i, s, 8)$ がともに X' に含まれる場合には $(i, s, 8)$ を優先する。 $\tilde{X}'$ のうち、まだ選抜されていない士官候補生に係る契約の集合を $\hat{X}'$ とする。
3. まだ全定員が埋まっていない場合には残りの枠を再び優先順位(のみ)に基づいて選抜

する¹¹⁾。

□

陸軍士官学校における選抜基準は、(1)優秀な士官候補生は優先されるべきであるという規範と(2)優遇枠を通じて軍役義務期間の延長を促したいという目的の折衷である。この折衷の結果、上記の C_s^{MA} の構成の各段階は古典的なマッチング理論における選抜基準と同等であるにも関わらず、全体としては代替性を満たさないことが以下の例から分かる。

例. $I = \{i, j\}, i \triangleright j, q_s = 2, q_s^e = 1$ とする。 $X' = \{(j, s, 5), (j, s, 8)\}$ および $X'' = \{(i, s, 5), (j, s, 5), (j, s, 8)\}$ とすると、 $C_s^{MA}(X') = \{(j, s, 5)\}$ かつ $C_s^{MA}(X'') = \{(i, s, 5), (j, s, 8)\}$ である。 $X' \subset X''$ かつ $(j, s, 8) \notin C_s^{MA}(X')$ であるにも拘わらず $(j, s, 8) \in C_s^{MA}(X'')$ なので、この C_s^{MA} は代替性を満たさない。

□

上の例が示す通り陸軍士官学校の選抜基準は Hatfield and Milgrom(2005)の代替性を満たさないが、**ユニラテラル代替性**(unilateral substitutability)と呼ばれるより弱い性質を満たす。前節の定理は代替性をユニラテラル代替性に置き換えても成立するため、プランチ割当てにおいて累積オファー・メカニズムは望ましい性質を満たすのである。

定理(Hatfield and Kojima, 2010). 各プランチの選択関数 C_s が以下の性質(ユニラテラル代替性)とサイズ単調性を満たすならば、累積オファー・メカニズムは安定かつ耐戦略的である：任意の $i \in I, y \in X$ 、および $X' \subset X$ に関して、

$$\begin{aligned} & \{i \neq \mathbf{i}(y) \text{ and } i \notin \{\mathbf{i}(x) : x \in C_s(X')\}\} \\ & \Rightarrow i \notin \{\mathbf{i}(x') : x' \in C_s(X' \cup \{y\})\}, \end{aligned}$$

が成立つ¹²⁾。

□

定理(Sönmez and Switzer, 2013). 上記の各プランチの選抜基準 C_s^{MA} はユニラテラル代替性

およびサイズ単調性を満たす。結果として、米国陸軍士官学校のランチ割当て市場において、累積オファー・メカニズムは安定性と耐戦略性を満たす。□

上述の米国陸軍の事例以外にも、契約付マッチングの応用として記述され累積オファー・メカニズムが望ましい性質を満たす現実の事例が続々と報告されている。ドイツにおける司法修習生と裁判所のマッチング(Dimakopoulos and Heller, 2019)、イスラエルにおける修士課程修了生と博士課程のマッチング(Hassidim *et al.*, 2017)、インド工科大学の入試制度(Aygün and Turhan, 2019, 2020)等はその代表的な例である。一風変わった例としては、旅客機の座席アップグレード(Kominers and Sönmez, 2016)、電気自動車のスマート充電(Morstyn *et al.*, 2018)への応用も提案されている。

4. 無構造アプローチ

ここまで解説してきた通り、契約付マッチングの既存研究は累積オファー・メカニズムを中心に発展してきた。理論面では累積オファー・メカニズムが望ましい性質を満たすより弱い条件が探求され、結果として累積オファー・メカニズムを適用できる現実の応用事例の範囲が拡大してきた。しかしながら、マッチング市場における本来の目的は社会的に望ましい配分・メカニズムを実現することであり、累積オファー・メカニズムはそのための一つ的手段・候補に過ぎない。実際、「安定かつ耐戦略であるが累積オファー・メカニズムではないマッチング・メカニズム」が存在するケースが、少なくとも理論上は存在することが確認されている(Hirata and Kasuya, 2017)¹³⁾。

そこで Hirata and Kasuya(2017)は、累積オファー・メカニズムであるか否かを問わない、安定かつ耐戦略的なメカニズムの一般的な性質を調べる新たなアプローチを採用した。このアプローチの特徴は、学校の選抜基準に代替性やサイズ単調性のような構造を一切仮定しない点にある。 $C_s(\cdot)$ に何の仮定もない場合には、

安定かつ耐戦略的なマッチング・メカニズムが存在するとは限らず、存在する場合でも累積オファー・メカニズムであるとは限らない。しかし、存在の問題を脇に置いて分析することで、安定かつ耐戦略的なマッチング・メカニズムの一般的かつ純粋な性質を炙り出すことができる。本稿では一例として、そのようなメカニズムの一意性を紹介する。望ましい性質を満たすメカニズムが複数存在する場合には、それらの内どれが最も望ましいかを(追加の性質・基準を導入して)比較検討する余地がある。しかし、安定性と耐戦略性を望ましい性質として要求する限り、そのような余地は決して存在しないことを以下の定理は保証する。

定理(Hirata and Kasuya, 2017). $C_s = (C_s)_{s \in S}$ を任意の選択関数の組とする。 C_s の下で安定かつ耐戦略的なマッチング・メカニズムは高々一つしか存在しない。□

証明. C_s を任意に固定し、 $f(\cdot), g(\cdot)$ を $>_I$ を入力とし $(>_I, C_s)$ に関して安定な配分を出力とするマッチング・メカニズムとする。以下では、 $f(\cdot)$ と $g(\cdot)$ が異なる、すなわち $f(>_I) \neq g(>_I)$ なる $>_I$ が存在すると仮定して矛盾を導く。一般性を失わず、 $>_I^*$ を $f(>_I) \neq g(>_I)$ なる $>_I$ のうち、各生徒の許容可能な契約の数の総和が最小となるものとする。 $x_i, y_i \in X \cup \{\emptyset\}$ でそれぞれ、生徒 i が $f(>_I^*)$ と $g(>_I^*)$ で受け取る契約(あるいは外部機会)を表すものとする。

最初に、 $x_i >_I^* y_i >_I^* \emptyset$ であるような i が存在する場合を考える。 x_i のみを許容可能とするような生徒 i の選好を $>_i^*$ で表すこととする。 $f(\cdot)$ の耐戦略性から、 $f(>_i^*, >_{-i}^*)$ において i は契約 x_i を得ていなければならない。もし代わりに外部機会 $\emptyset$ を得ているとすると、 i には真の選好が $>_i^*$ であるときに偽って $>_i^*$ を申告する誘因が存在するからである。一方、 $g(\cdot)$ の耐戦略性からは、 $g(>_i^*, >_{-i}^*)$ において i は外部機会 $\emptyset$ を得ることが導かれる。もし x_i を得られるとすると、真の選好が $>_i^*$ である

ときに $>_i^\circ$ を申告する誘因が存在するからである。まとめると、 f と g の出力は $(>_i^\circ, >_{-i}^*)$ において異なっている。しかし、 $>_i^\circ$ は x_i のみを許容可能とする選好である一方、 $>^*$ は少なくとも x_i と y_i の二つを許容可能とする。従って、 $f(>_i^\circ, >_{-i}^*) \neq g(>_i^\circ, >_{-i}^*)$ は、 $>_i^*$ の最小性に矛盾する。

$y_i >^* x_i >_i \emptyset$ であるような i が存在する場合は上の議論と対称である。従って残されたケースは、全ての生徒 i について、 $x_i >_i^* y_i \Rightarrow y_i = \emptyset$ かつ $y_i >^* x_i \Rightarrow x_i = \emptyset$ が成立する場合である。このようなケースでは、各生徒 i について、 $f(>^*)$ と $g(>^*)$ の和集合に含まれる $\mathbf{i}(x) = i$ であるような契約 x は高々一つしかない。従って、任意の学校 s と任意の $x \in C_s(f(>^*) \cup g(>^*))$ に関して、 $\mathbf{i}(x)$ は配分 $C_s(f(>^*) \cup g(>^*))$ を $f(>^*)$ よりも弱い意味で好むはずである。つまり $(s, g(>^*))$ は $f(>^*)$ をブロックするための第二の条件を満たすことになるが、 $f(>^*)$ は安定であると仮定されているので第一の条件は満たされないはずである。すなわち $C_s(f(>^*) \cup g(>^*)) = C_s(f(>^*))$ が成立する必要がある。同様に、 f と g の役割を入れ替えると、 $C_s(f(>^*) \cup g(>^*)) = C_s(g(>^*))$ も成立しなくてはならない。つまり全ての $s \in S$ について $C_s(f(>^*)) = C_s(g(>^*))$ が成立つが、これは $f(>^*) = g(>^*)$ であることに他ならず、元々の仮定と矛盾する。 ■

選択関数に一切の構造を仮定しないこのようなアプローチには、2つの利点がある。第一の利点はその適用可能性の広さである。このアプローチでの証明は安定性と耐戦略性の定義(と両者を満たすメカニズムの存在)以外の何にも依存していない。従って、安定かつ耐戦略的なメカニズムの存在を保証する新たな条件が将来発見されたとしても、それがどのような条件であれ無構造アプローチの結果は適用可能であり、そのような条件の発展に応じて同じ命題を証明しなおすことは不要である。やや逆説的であるが、無構造アプローチの有用性は選抜基準の条件に関する研究の将来まで含めた進展によって

高められ、両者の間にはある種の補完性が存在すると言える。

第二の利点は、理論的な純粋さ・明晰さである。望ましいメカニズムが存在するための条件には、しばしばそれ以外の含意が付随する。従って存在のための条件を課した分析は、そのような追加の含意にも明示的・暗黙的に依存することとなる。例えば、代替性は累積オファーマ・メカニズムの出力が「生徒にとって最適な安定マッチング(student-optimal stable matching, SOSM)」と一致することを含意し(Hatfield and Milgrom, 2005), Sakai(2011)はこの性質を利用して安定かつ耐戦略的なメカニズムの一意性を証明している。他方、Hirata and Kasuya(2017)の証明は、一意性が純粋に安定性と耐戦略性の定義のみから導かれる帰結であり、SOSM や累積オファーマ・メカニズムとは本来無関係であることを示している。このように、本質的には不要な含意への依存を排除することで、結論が成立つ理由のより根源的な理解の助けとなることが、無構造アプローチの抽象的・観念的なメリットであると言える。

Hirata and Kasuya(2017)以降、契約付マッチングの枠組みで類似のアプローチをとった研究が少数ではあるが出現している。Hirata *et al.*(2020)は、選抜基準が変更されたときの配分の変化に耐戦略性をもつ含意を分析し、抽象的な環境下での分析に上記の一意性定理を活用している。耐戦略性には遂行可能性の条件としては強すぎるという批判があり得るが、本研究の結果は耐戦略性が規範的要請としても重要であることを示唆している。Alva and Manjunath(2019a, b)は(1)耐戦略的なメカニズム間のパレート支配関係、および(2)安定なメカニズムをパレート支配するような耐戦略メカニズムを、それぞれ分析している。

5. 結語

本稿では、(1)累積オファーマ・メカニズムが望ましい性質を満たすために選択関数に求められる具体的な条件を探る主流派のアプローチと、(2)そのような条件を仮定せずマッチング・メ

カニズムの一般的な性質を分析する無構造アプローチ、の二つを通じて契約付マッチングの既存研究を概説してきた。これら二つのアプローチは、分析対象とする選択関数の領域は異なる一方で、選択関数を分析主体にとっては所与のものとして扱う点は共通している。本節では、選択関数のそもそもの意義と役割について論じて結びとしたい。

多くのマッチング市場において、実際の選択関数は、配分の公正さに関する社会の価値観（だと政策当局者が思っているもの）を直接・間接に反映している。選択関数によって規定される安定性が重要視されるのも、そのような社会的な価値観の形式的な表現と見なされるからである。その意味では、選択関数は分析者が自由に選べるものではない。

しかし一方で、大本の社会的な価値観は通常、選択関数ほど明確なものではなくより曖昧である。ランチ割当ての事例で言えば、具体的に構成された選択関数 $C_s^{MA}(\cdot)$ の背後には、(1) 優秀な士官候補生は優先することと(2) 優遇枠を通じて軍役義務期間の延長を促すこと、という二つのより曖昧な目的がある。これらの目的（あるいはその背後にある価値）を完全に否定することは現実的ではないが、それらと整合的な選択関数が $C_s^{MA}(\cdot)$ のみであるわけではない。例えば、実際の選抜基準では通常枠の割当てを行った後に優遇枠を割り当てるが、この順序を入れ替えた別の選抜基準を考えることもできる。そのような選抜基準は実際の基準と同様に2つの目的を表現していると言えるが、累積オファー・メカニズムを通じて実現される配分は異なる。

つまり、社会的な価値観を所与としても、それをどう選択関数として表現するかには分析・設計の余地がある。そのような選択関数の設計あるいはプライオリティ・デザインの研究としては Sönmez and Yenmez (2019a, b), Dur *et al.* (2018), Echenique and Yenmez (2015), Pathak *et al.* (2020) 等が挙げられる。マッチング市場の設計プロセスを(1) 曖昧な社会的価値観、(2) 具体的な選択関数、(3) 安定なマッチングの実現

という3つの段階に分割するならば、これらの研究は(1)と(2)の間の関係性の研究であり、前節までに紹介した研究は(2)と(3)の関係性を扱っている。本稿では紙幅の都合から後者に焦点を当てて解説してきたが、より良いマーケット・デザインのためには両者は相互補完的であり、いずれも重要である。

(神戸大学大学院経済学研究科・経済学部、
一橋大学大学院経済学研究科・経済学部)

注

* 本稿の執筆にあたっては、熊野太郎先生(横浜国立大学)および高山直樹先生(一橋大学)からの確かつ有益な助言をいただいた。本稿で紹介する研究の一部はJSPS 科研費(19K01542)の助成を受けた研究成果に基づいている。

1) 従って、契約付マッチング理論における「契約」の意味は契約理論やメカニズムデザイン理論におけるそれとは全く異なることに注意が必要である。また、複数のマッチの仕方を許す理論の端緒としては Kelso and Grawford (1982) の「賃金付マッチング(matching with salaries)」がよく知られている。契約付マッチングと賃金付マッチングの関係については、Echenique (2012) および Schlegel (2015) を参照せよ。

2) このように片側の主体——この場合生徒——は高々一つの契約しか結べない(が反対側の主体——この場合学校——は複数の契約が結べる)と仮定されたモデルを多対一(many-to-one)と呼ぶ。多対多(many-to-many)の契約付マッチングの研究としては、Klaus and Walzl (2009) と Chen *et al.* (2016) などが挙げられる。

3) 本稿における選択関数の定義の一部である irrelevance of rejected contracts から、 $C_s(X' \cup \{y\}) \neq C_s(X')$ となるのは左辺に y が含まれる場合のみであることに注意せよ。

4) 選抜基準が学校の嗜好・最適化の表現である場合には、 $(s, \{y\})$ が X' をブロックすることは、 s に X' から逸脱して y を受け入れる誘因があることを意味する。従って制度設計者が不安定な配分を実行するためには、そのような逸脱を防ぐ強い強制力が必要である。このように解概念として見た場合、安定な配分(全体の集合)は協力ゲーム理論におけるコアの概念と一致する。

5) 対照的に一般的な受入保留メカニズムの定義では、学校は「保留中のオファー」と「新規のオファー」からのみ選択し、過去に拒否したオファーは選択の候補に含まれない。結果として、受入保留メカニズムの出力は(常実現可能ではあるが)安定であるとは限らない。両メカニズムを比較すると、累積オファー・メカニズムの方が受入保留メカニズムより弱い条件の下で安定な配分を発見することができる(Hatfield and Kojima, 2010)。

6) 累積オファー・メカニズムで最終的にオファー

された契約全体を P_T とし、出力を $X' = \bigcup_s C_s(P_T)$ とする。選択関数に課された irrelevance of rejected contracts から、任意の s と X'' に関して $X'' \subset P_T \Rightarrow C_s(X' \cup X'') = C_s(X') = C_s(P_T)$ が成立する。従ってブロックの第一の条件である $C_s(X' \cup X'') \neq C_s(X')$ が成立するためには、 $x \notin P_T$ かつ $x \in C_s(X' \cup X'')$ であるような x が存在することが必要である。 x がメカニズムの中でオファーされないのは、 $\mathbf{i}(x)$ が X' においてより良い契約を得ているか x が許容可能でないかのいずれかの場合のみなので、ブロックの第二の条件が同時に満たされることはあり得ない。

7) この定義は、 x の価値が y との補完性によって高まる(結果、 x が X' から選ばれないが $X' \cup \{y\}$ から選ばれる)可能性を排除している。数学的には、意思決定理論において Sen's(1970) α と呼ばれる条件と同一であるが、解釈は大きく異なることに注意が必要である。意思決定理論では $C_s(X') = \{a, b\}$ である場合、 a と b は同等に最も望ましく、最終的にはそのいずれかが選択されるものと解釈される。他方、本稿の文脈では $C_s(X') = \{a, b\}$ は a と b の両方が選抜されることを意味する。

8) 累積オファー・メカニズムの安定性と耐戦略性に関する条件については、以下でとりあげる Hatfield and Kojima(2010)の他に Afacan and Turhan(2015), Flanagan(2014), Hatfield and Kominers(2019), Hatfield *et al.*(2020), Kodam(2017), Schlegel(2020)等を参照せよ。

9) よく似た、しかしより複雑な予備役士官訓練課程の事例については Sönmez(2013)を見よ。

10) ここでは、実際の事例に基づき、優先順位は全ブランチで共通であると仮定するが、各ブランチが異なる順序 $\succ_s$ を持っていて以下の議論には影響しない。

11) 第二段階までで全定員が埋まらない場合には、 $\bar{X}'$ には $\theta=5$ の契約しか含まれないことに注意せよ。

12) この条件は「 i に係る契約が X' から一つも選ばれないならば、($i = \mathbf{i}(y)$ かつ $y \in C_s(X' \cup \{y\})$) の場合を除いて) $X' \cup \{y\}$ から選ばれない」ことを意味している。言い換えればこれは、契約レベルではなく生徒レベルの代替性条件である。

13) このような例は、複数の学校の選抜基準が独立に設計される場合には、特定の意味で「非常に限定的」にしか存在しないことも知られている(Hatfield *et al.*, 2020)。しかしながら、選抜基準が(学校の選好ではなく)社会規範の表現であることを勘案すれば、(例えば「他の学校に受け入れ先のない生徒を優先的に入学させる」というような)学校間の選抜基準の相関あるいは相互依存はむしろ自然である。そのような相関・相互依存のある選抜基準の分析および設計は、今後のマッチング理論に残された大きな課題であると考えられる。

参考文献

栗野盛光(2019)『ゲーム理論とマッチング』日本経済新聞出版社。
坂井豊貴(2010)『マーケットデザイン入門：オークションとマッチングの経済学』ミネルヴァ書房。

Afacan, M. O. and B. Turhan (2015) "On Relationships between Substitutes Conditions," *Economics Letters*, Vol. 126, pp. 10-12.
Alva, S. and V. Manjunath (2019a) "Stable-Dominating Rules," *mimeo*.
——— (2019b) "Strategy-Proof Pareto Improvement," *Journal of Economic Theory*, Vol. 181, pp. 121-142.
Aygün, O. and T. Sönmez (2012) "The Importance of Irrelevance of Rejected Contracts in Matching under Weakened Substitutes Conditions," *mimeo*.
——— (2013) "Matching with Contracts: Comments," *American Economic Review*, Vol. 103, No. 5, pp. 2050-2051.
Aygün, O. and B. Turhan (2019) "Dynamic Reserves in Matching Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 188, 105069.
——— (2020) "Designing Direct Matching Mechanisms for India with Comprehensive Affirmative Action," *mimeo*.
Chen, P., M. Egedal, M. Pycia, and M. B. Yenmez (2016) "Manipulability of Stable Mechanisms," *American Economic Journal—Microeconomics*, Vol. 8, No. 2, pp. 202-214.
Dimakopoulos, P. D. and C.-P. Heller (2019) "Matching with Waiting Times: The German Entry-Level Labour Market for Lawyers," *Games and Economic Behavior*, Vol. 115, pp. 289-313.
Dur, U., S. D. Kominers, P. A. Pathak, and T. Sönmez (2018) "Reserve Design: Unintended Consequences and the Demise of Boston's Walk Zones," *Journal of Political Economy*, Vol. 126, No. 6, pp. 2457-2479.
Echenique, F. (2012) "Contracts versus Salaries in Matching," *American Economic Review*, Vol. 102, No. 1, pp. 594-601.
Echenique, F. and M. B. Yenmez (2015) "How to Control Controlled School Choice," *American Economic Review*, Vol. 105, No. 8, pp. 2679-2694.
Flanagan, F. X. (2014) "Relaxing the Substitutes Condition in Matching Markets with Contracts," *Economics Letters*, Vol. 123, No. 2, pp. 113-117.
Gale, D. and L. S. Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1, pp. 9-15.
Hassidim, A., A. Romm, and R. I. Shorrer (2017) "Redesigning the Israeli Psychology Master's Match," *American Economic Review*, Vol. 107, No. 5, pp. 205-209.
Hatfield, J. W. and F. Kojima (2010) "Substitutes and Stability for Matching with Contracts," *Journal of Economic Theory*, Vol. 145, No. 5, pp. 1704-1723.
Hatfield, J. W. and S. D. Kominers (2019) "Hidden Substitutes," *mimeo*.
Hatfield, J. W., S. D. Kominers, and A. Westkamp (2020) "Stability, Strategy-Proofness, and Cumulative Offer Mechanisms," *Review of Economic Studies*, forthcoming.

- Hatfield, J. W. and P. R. Milgrom (2005) "Matching with Contracts," *American Economic Review*, Vol. 95, No. 4, pp. 913-935.
- Hirata, D. and Y. Kasuya (2014) "Cumulative Offer Process is Order-Independent," *Economics Letters*, Vol. 124, No. 1, pp. 37-40.
- (2017) "On Stable and Strategy-Proof Rules in Matching Markets with Contracts," *Journal of Economic Theory*, Vol. 168, pp. 27-43.
- Hirata, D., Y. Kasuya, and Y. Okumura (2020) "Stability, Strategy-Proofness, and Repsecting-Improvements Properties," *mimeo*.
- Kadam, S. V. (2017) "Unilateral Substitutability Implies Substitutable Completability in Many-to-One Matching with Contracts," *Games and Economic Behavior*, Vol. 102, pp. 56-68.
- Kelso, A. S. and V. P. Crawford (1982) "Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes," *Econometrica*, Vol. 50, No. 6, pp. 1483-1504.
- Klaus, B. and M. Walzl (2009) "Stable Many-to-Many Matchings with Contracts," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 45, No. 7-8, pp. 422-434.
- Kominers, S. D. and T. Sönmez (2016) "Matching with Slot-Specific Priorities: Theory," *Theoretical Economics*, Vol. 11, No. 2, pp. 683-710.
- Morstyn, T., A. Teytelboym, and M. D. McCulloch (2018) "Matching Markets with Contracts for Electric Vehicle Smart Charging," *2018 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, pp. 1-5.
- O'Connor, B. (2019) "Assigning Branches to Cadets Takes on New System," https://www.army.mil/article/227124/assigning_branches_to_cadets_takes_on_new_system.
- Pathak, P. A., T. Sönmez, M. U. Ünver, and M. B. Yenmez (2020) "Fair Allocation of Vaccines, Ventilators and Antiviral Treatments: Leaving No Ethical Value Behind in Health Care Rationing," *mimeo*.
- Sakai, T. (2011) "A Note on Strategy-Proofness from the Doctor Side in Matching with Contracts," *Review of Economic Design*, Vol. 15, pp. 337-342.
- Schlegel, J. C. (2015) "Contracts versus Salaries in Matching: A General Result," *Journal of Economic Theory*, Vol. 159, Part 1, pp. 552-573.
- (2020) "Equivalent Choice Functions and Stable Mechanisms," *Games and Economic Behavior*, Vol. 123, pp. 41-53.
- Sen, A. K. (1970) *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco.
- Sönmez, T. (2013) "Bidding for Army Career Specialties: Improving the ROTC Branching Mechanism," *Journal of Political Economy*, Vol. 121, No. 1, pp. 186-219.
- Sönmez, T. and T. B. Switzer (2013) "Matching with (Branch-of-Choice) Contracts at the United States Military Academy," *Econometrica*, Vol. 81, No. 2, pp. 451-488.
- Sönmez, T. and M. B. Yenmez (2019a) "Affirmative Action in India via Vertical and Horizontal Reservations," *mimeo*.
- (2019b) "Constitutional Implementation of Reservation Policies in India" *mimeo*.