第 1 章　研究目的と貢献

1.1　研究目的と先行研究

本稿では、価格が長期平均水準に平均回帰する資産に投資し、価格の変動に応じて買い／売り／保有なしのポジションを切り替える最適投資戦略問題を、連続時間モデルを用いて考察する。投資家の評価関数には、取引戦略から得られるリターンから取引コストを控除した値の現在価値、あるいはそれから資産価値の変動に伴うリスクを控除したものを考える。

取引コストの存在を仮定するため、最適戦略は離散時間間隔でポジション変更する戦略となる。取引期間には期限を設けず、決められた回数の取引が可能であるとして最適投資問題を設定する。このため、最適解は時刻に依存せず、ポジション変更の有無と変更先に応じて価格領域を分割する形で表現される。

最適スイッチ問題 (optimal switching problem) の先行研究の多くは、遷移可能な状態が 2 種類である 2 レジーム (regime) 問題を考察している。本稿では、既存の 2 レジーム問題を 3 レジーム問題に拡張し、同一時点で複数回のスイッチを実行するという連続同時スイッチという概念を導入することにより、先行研究では取り扱うことができなかった問題に対して具体的な解析手法を構築した。あわせて、各レジームにおける資産価格の領域を正負対称な実数全域に拡張することで、資産運用においてより自然な最適化問題となるように先行研究のモデルを修正した。既存研究の多くは解の存在と一意性を示すにとどまっているが、本稿では具体的に数値解を求めることにより解の可視化も行い、最適戦略の検証を行えるようにした。

1.1.1　研究の背景と概要

最適ポートフォリオ研究の歴史において、多様な設定、アプローチのモデルが研究されてきたが、long ポジションと short ポジションを組合せたポジションによる最適投資戦略には研究余地が残されており、制約がなく実務的にも受容れられるモデルは少なかった。

Long only のポジションを前提とする場合、対象資産を成長資産と想定することが多いが、long/short のポジションを自由に保有できる場合、合成資産として価格差が、成長性の相殺された平均回帰型資産というある種の定常過程となるものを探すことも可能である。そのような合成資産に対する投資戦略として pair-trading 戦略がある。

初期の最適ポートフォリオ研究による最適解は最適ウエイトの形で表現されたが、それはリバランスタイミングを与えるものではなく具体的な取引戦略ではなかった。取引コストを考えると、より現実的な離散間隔取引戦略による取引タイミングを与えるような最適解が望まれた。

先行研究のうち例えば、Zhang and Zhang (2008), Song and Zhang (2013) では平均回帰資産の最適スイッチ戦略を取扱っているが、構築可能なポジションは、どちらか一方を long し、他を short する合成ポジションか、或は square のみで、両構成銘柄を逆転させたポジションをとれない。すなわち 2 レジーム限定のモデルであった。Pair-trading 戦略の特徴は構成銘柄を対等に long/short できることにあり、逆転したポジションを対称に記述できるようなモデルが望ましい。そのため本稿では平均回帰資産の最適スイッチ問題を対称な 3 レジーム問題に拡張することを考えた。その際、現実に即し、取り得るポジションの定義域に制約がな

く、また、実務とも整合的なパフォーマンス評価関数による最適化モデルを構築した。

レジーム数の拡張の他、本稿の貢献としては、連続同時スイッチを考慮に入れられるようモデルを改善し、そのモデルのもとで最適戦略により特徴付けられる状態変数空間の構造を特定するための解析手段を提供した。またより実態に即したモデルとするため、評価関数にリスク評価項をとり入れ、具体的な最適解を数値計算した。またシミュレーションや実証分析を行い実務への適用可能性も評価した。

1.1.2 Pair-trading、平均回帰過程、最適スイッチ問題

本稿で取り扱う投資戦略は pair-trading である。たとえば、同一産業に属する 2 銘柄の価格変動がほぼ連動しているとしよう。ただし個別要因による変動もあるため両者にはリターン差が存在する。企業固有の基礎的要因により一方が優位に立つと価格差が拡大し、競争により他方が巻返すと縮小するため、対数価格乖離は長期的平均のまわりを動くと仮定する。

このようにほぼ連動すると考えられる 2 銘柄の一方を long、他方を short ポジションとして保有し、それをペア・ポジションの long とみなし、全体を反転させたものをペア・ポジションの short と呼ぶことにすると、このポートフォリオ価値は構成銘柄の対数価格乖離と局所的には連動する。構成銘柄の対数価格乖離は長期的には平均回帰的動きに従うと考えられる。これを連続時間の拡散過程の一種である、Ornstein–Uhlenbeck process としてモデル化する。

このようなポジションを保有し、構成銘柄の価格差がピークに達したところで利食う (すなわちポジションを解消して稼いだリターンをポートフォリオ内に蓄積する) ことができれば、パフォーマンスを改善することが可能となる。この投資戦略問題を、ペア・ポジションを long, square, short の 3 レジーム間で切り替える (スイッチする) 確率的最適制御問題 (stochastic optimal control problem) として定式化し、資産価格変化に伴うリターンからレジーム切り替えに伴う取引コストを控除し期待割引現在価値化したそれらの期中合計を評価関数とした。スイッチのタイミングを停止時 (stopping time) とし、その際のスイッチ先レジームの指定と併せて制御変数とし、それを制御することにより最大化された評価関数が値関数 (value function)、それを与える制御変数すなわちその停止時及びスイッチ先レジームの指定のセットが最適戦略である。

ペアのポジションに対する一連の取引過程はレジーム遷移 (switching) 過程として記述できる。まず株Aを買い、株Bを空売りすることをペアの買持ち (long)($\xi = 1$) と呼ぶことにする。その逆を売持ち ($\xi = -1$)、ポジションを持たない状態を square ($\xi = 0$) と呼ぶことにする。これが 3 種類のレジームを持つモデルである。レジーム ($\xi \in \mathbb{I}$) を制御変数とし、適切な評価関数を設定することにより、それを最大化する最適化問題を作れば、最適解として最適な運用戦略を求めることができることになる。

1.1.3 先行研究の概要

過去の文献では、遷移可能な状態が 2 種類である 2 レジーム問題を扱ったものが多い。

Pham and Vath (2007) では幾何ブラウン運動に従う確率過程を取扱い、評価関数を冪型とし、粘性解アプローチとして 2 レジーム問題の解析解を与えている。Bayraktar and Egami (2010) では取扱い対象の確率変数を幾何ブラウン運動や O–U 過程とし、可動域を吸収壁により制限し、評価関数として冪型関数や時間割引きされた線型関数を用いて最適解を求めている。Pham (2009) は書籍であり、最適スイッチ問題の章では、数理モデル上のレジーム数は任意の整数として記述されてはいるが、具体例は 2 レジーム問題中心で、変数の可動域も正の値に限定されている。Zhang and Zhang (2008) では平均回帰資産の運用を意識し、買持ち／

保有しないという 2 レジームによる最適スイッチ問題を取扱っている。幾何平均回帰過程に従う資産 (従って資産価格の可動範囲は正の領域のみ) を運用し、取引コストを控除し、スイッチにより発生するキャッシュフローを最大化するという独特な問題を解いている。検証定理を用いて値関数を求めている。この独特な評価関数の設定は以下の 2 文献、Song and Zhang (2013), Nguyen, Tie, and Zhang (2014) にも共通の特徴である。Song and Zhang (2013) では、Zhang and Zhang (2008) にストップ・ロスの水準を設けたモデルの拡張を行っている。Pair-trading を意識し、2 資産の価格乖離が平均回帰過程に従うモデルである。Nguyen et al. (2014) では更にそのモデルが拡張され、長期回帰平均が外生的にマルコフ・ジャンプし値が変化する仕組みになっている。以上は遷移可能な状態が 2 種類である 2 レジーム問題である。

一般的なレジーム数に関する最適スイッチ問題は、特定の資産運用戦略を意識しない抽象的な研究としてBrekke and Oksendal (1994) で取り扱われている。一般的な伊藤過程を対象資産として値関数と最適戦略の満たすべき十分条件が与えられている。抽象的で汎用的な結果ではあるが、個別の問題に関してそのような条件を満たす最適解をどのように導くかという問題は別途考える必要がある。Pham, Vath, and Zhou (2009), Ngo and Pham (2016) では 3 レジーム問題を取り扱っている。まずPham et al. (2009) では幾何ブラウン運動や、幾何平均回帰過程に従う資産価格の最適スイッチ戦略を求める問題を取扱っており、従って資産価格の可動範囲は正の範囲のみであり、2 資産価格の乖離を独立した確率過程と捉えて実数全域を確率過程の可動範囲としたい本稿の用途を満たすものではない。取引期間は無限期間であり、スイッチ回数が無制限のケースのみを取扱っている。またNgo and Pham (2016) はSuzuki (2016) 後の出版であるが、パフォーマンスの計測法が独特でありまた、連続同時スイッチは意識されていない。

平均回帰型資産に対する最適購入或は売却戦略、或はそれらを繰り返す問題に関しても多くの研究がなされている。例えばBertram (2010) やGöncü and Akyıldırım (2016) では Ornstein–Uhlenbeck 過程に従う資産に対して最適購入・売却問題を取り扱っている。ポジション解消の閾値は予め長期平均に設定されている。ただし、長期平均でポジション解消することが必ずしも最適ではないことをSuzuki (2016) は示唆している。Bayraktar and Egami (2010) では Ornstein–Uhlenbeck process を資産価格モデルとして 2 レジームの最適スイッチ問題を取り扱っているが、価格乖離ではなく資産価格自体を平均回帰型としてモデル化しているため、価格水準 0 を吸収壁とし、状態変数を正の領域のみに限った偏ったモデルとなってしまっている。本稿では価格乖離を 1 資産と見做しそれをモデル化している。正負対称で実数全域を定義域とする状態変数を想定し、買持ちと売持ちとは完全に対称な取り扱いを想定するものである。Zhang and Zhang (2008), Nguyen et al. (2014), Song and Zhang (2013) においても平均回帰型資産の最適売買問題が取り扱われているが 2 レジームで状態変数の定義域は正の象限のみである。Pair-trading 戦略の長所は、ポジションを対称に反転させられることにある。-1 を掛けることにより符号を反転させられる設定の問題も上記文献の中には存在するがそれでも 2 レジーム問題でしかない。square ポジションはリスク管理上は重要なレジームであると考えられる。

1.2 本稿による貢献

1.2.1 レジーム数の拡張

本稿の貢献のひとつは、pair-trading における取引戦略のとりうるレジーム数を 3 個に拡張したことである。この拡張によって、実際に行われている pair-trading により近い状況をモデル化することができた。

最適スイッチ問題を取り扱う既存の文献では、1.1.3節で紹介したとおり、レジーム集合の設定としては、買

持ち、保有しない (square) の 2 個のレジームを用いるのがこれまでの研究の主流であった。本稿では連続時間市場において遷移状態が 3 個のレジームからなる最適スイッチ問題を資産運用問題に適用し、具体的な最適戦略 (optimal strategy) を導出した。本稿では 2 銘柄の対数価格乖離を一つの確率過程としてモデル化し、その可動範囲は実数全域である必要があり、また、long A/short B と long B/short A は互いに対称なモデル式となるべきである。先行研究の中では、Pham et al. (2009) が 3 レジーム問題を用いているが、対象資産価格を表す確率変数の可動範囲は正の領域のみとされ、またパフォーマンスを計測する関数の値域が非負などに制限されているため、本稿にはそのまま応用することができない。またNgo and Pham (2016)(Suzuki (2016) 後の出版であり純粋な先行研究とは呼べないが) でも 3 レジーム問題は取り扱われているが、パフォーマンスの計測法が独特で、スイッチを発生させて初めてそれまでの累積パフォーマンスが決まるような仕様になっており、予め構築したポジションに基づいてその後の収益が決まるというファイナンスの常識的なパフォーマンス認識とは異なるものである。

そこで、平均回帰する資産価値の可動範囲の制約がなく long/short/square の 3 状態が対称となるような自然なモデル化を実現するため、問題を 3 レジーム問題に拡張することに取組んだ。このような拡張により、既存の 2 レジーム問題に比べて幅広い実行可能領域を確保し、評価関数も資産運用問題に適したものにすることができた。一方で、2 レジーム問題は実質的には、特定の状態から、「いつ」スイッチするかを決定するだけの問題であったが、これを 3 レジーム問題に拡張する場合、いつを決定することに加えて、どの状態に遷移するかという意思決定も同時に最適化しなくてはならないことが問題を複雑化させる。

本稿のモデルは、平均回帰型資産運用において買持ち/売り持ち/square の 3 レジームのポジションをとり得る最適スイッチ問題に最初に解を与えた研究である。本稿の貢献はそうした複数レジーム遷移可能な最適スイッチ問題の最適戦略を具体的に求めた点にもある。

1.2.2　スイッチ権利回数 n、レジーム ξ の組合せと最適化問題の範囲

本稿では、投資運用期間を無限とし、投資ポジションを変更できる回数を任意の整数として与え、最適化問題の解を求める方法を検討する。先行研究では投資ポジションの変更回数を限定して議論が行われてきたが、本稿ではこのように問題を一般化することで、これまでの既存研究を含めて、統一的な視点から分析を進める。

まずスイッチ権利数がゼロ ($n = 0$) の場合は、買持ち ($\xi = 1$)、売持ち ($\xi = -1$)、square($\xi = 0$)、の各戦略を取り続けた場合に相当する。スイッチする権利が与えられていないため最適化問題ではないが、この戦略の期待値はスイッチ権利数が一般的な 1 以上の問題 ($n \geq 1$) の解を求めるうえで基礎データとなる。

$n = 1$ のときは、最適停止問題になる。すなわち、スイッチの権利を一回行使することにより上記 $n = 0$ の値関数を得るための最適停止時を求める問題である。一般的な運用戦略の文脈では、ξ の初期値に応じて $\xi = 1$ のとき最適売却問題、$\xi = 0$ のとき最適購入問題（或は最適売却問題或は両者の組み合わせ）、$\xi = -1$ のとき売り持ちの最適解消問題などに相当する。Pemy and Zhang (2006), Guo and Zhang (2005), Zhang (2001), Eloe, Liu, Yatsuki, Yin, and Zhang (2008) では、幾何ブラウン運動に従う資産に対する最適売却問題が研究されたが、枠組みとしては本稿の問題は彼らの問題を含んでいることになる。つまり彼らの問題は本稿の問題で $n = 1$(1 回のスイッチ権利を持つ場合) とおいた特別な場合に相当する。

$n \geq 2$ のときが最適スイッチ問題である。特に $n = 2, \xi = \pm 1$ のとき、最適ポジション解消後再構築問題、$n = 2, \xi = 0$ のとき、最適ポジション構築後再解消問題等に相当する。一般の $n < \infty$ のとき、最適（有限回）繰返しスイッチ問題、$n = \infty$ のとき、無限回繰返しスイッチ問題になる。

本稿では後に述べるレジーム数の拡張、連続同時スイッチ、評価関数の次数の拡張等を行ったうえで、なお

かつ一般の n に対し、まとめてそのような新しい問題を抽象的な一つの問題として一括して解くことにする。

1.2.3 連続同時スイッチ

本稿では、最適戦略の実行中、スイッチ間の時間間隔が 0 で連続して同時に発生するスイッチのことを（連続）同時スイッチと呼ぶことにする。 2.2節では、連続同時スイッチに纏わる基礎的な解析を行っている。

一般に、レジーム数が増加すると、ひとつのレジームからその他のレジームへの遷移の可能性を全て考慮する必要が生じるため、最適化問題が複雑になる。本稿の最適投資戦略問題においては、売持ちポジションからは、売持ちポジションに留まる、買い持ちポジションに変更する、square ポジションに変更するという 3 つの選択肢があるため、問題が複雑になる。しかし、本稿の問題であれば、たとえば売持ちポジションから買持ちポジションへの遷移は、中間の square ポジションを瞬間的に経由していると考えることができる。すなわち、瞬間的に同一時点で複数回のスイッチが発生したとみなすことができる。本稿では、このように同一時点で複数回の戦略変更が行われるという概念を明示的に導入することにより、最適化問題の構造を単純化する工夫を行なった。この概念を明示的に取扱う先行研究はこの分野にはない。

先行研究のひとつであるPham et al. (2009) の研究では、レジーム i から j へのスイッチで発生する取引コストを g_{ij} と書くことにして、3 つのレジーム i, j, k を遷移するときに発生する取引コストについて、$g_{ik} < g_{ij} + g_{jk}, j \neq i, k$ といった (等号なし) 三角不等式が成立することを仮定している。このとき、直接遷移するコストは第三のレジーム経由で迂回して遷移する合計コストを真に下回るため、$i \to j \to k$ という連続同時スイッチは、直接 $i \to k$ とする選択肢に劣後することになり、同時スイッチという選択肢は排除される。

そこで、本稿では (等号を含む) 退化三角不等式 $g_{ik} \leq g_{ij} + g_{jk}, j \neq i, k$ が成立する設定とし、連続同時スイッチという選択肢を許容することで、例えば、売持ち（買い持ち）ポジションから中間の square ポジションを瞬間的に経由し、買持ち (売り持ち) ポジションに瞬時に遷移する場合も考慮できるようにしている。

同時スイッチという概念を導入して、中間レジームにおいて動的計画原理を適用することで、連続同時スイッチを、単に 2 つの独立した最適化問題の解に忠実に従った結果として現れる現象ととらえることができる。こうして問題設定を整備することにより、問題の複雑さを緩和し、より単純な問題へ分解することで、最適スイッチ領域内の部分集合に更に最適連続同時スイッチ領域を導入し、それらの領域の基本的な性質を明らかにした。

1.2.4 同時スイッチがある場合のスイッチ領域の特定

連続同時スイッチの導入にあわせて、本稿では最適戦略を規定する継続領域、および最適スイッチ先別に領域を区分するために必要な解析的手段を新たに提供した。

本稿のモデルにおいては、最適投資行動は投資開始時刻と無関係で、その時のレジーム及び状態変数の位置のみに依存する。つまりその時のレジーム毎に、状態変数空間を、継続領域及び最適スイッチ領域に分解し、さらに最適スイッチ領域をどのレジームにスイッチするかによって分解する。継続領域等の出現の仕方はパラメータの値に大きく依存し、解の具体的特定には数値計算技術が要求される。しかし、計算機による古典的な数値計算技術だけで自由境界問題の継続領域の特定ができるわけではなく、実数空間上のどのあたりにそれが存在するのか、その集合が単一の連結領域なのか、複数の連結領域に分割されているのか、有限領域なのか無限領域なのかといった領域の特徴に関する考察が必要となる。微分方程式を手掛かりに解を特定する場合、この継続領域が連結なのか分離しているのかは決定的に重要である。継続領域を支配する微分方程式は連結領域

ごとに独立したものであるからである。一旦、連結継続が途切れてしまえばその方程式は他の連結領域上の方程式とは無関係である。このように最適解を具体的・実用的にするためには、継続・スイッチ領域の実数空間上での特定が最も煩雑な処理であるといえよう。

同時スイッチが起きる場合、初回の最適スイッチ先のみを特定するだけでは不十分である。最適な連続同時スイッチの最終スイッチ先のレジームにおける継続領域を、一連の同時スイッチの最終継続領域と呼ぶことにする。本稿の問題設定ではスイッチは有限回数でいずれかの最終継続領域に達するが、その最終最適スイッチ先による領域の分類 (式 (2.2.6)) が、領域構造を解明するための鍵となる。

これまでの研究では、連続同時スイッチがなかったため、最適スイッチによる遷移先は継続領域であることが保証されていた。しかし連続同時スイッチがある場合、初回のスイッチが同じレジームへの最適遷移領域内であっても、そのスイッチ先で継続状態になるのか、さらに別のレジームへ遷移するのが最適なのかによって領域の性質が異なる。このため、初回の最適スイッチ領域を最終遷移先レジーム別の最終継続領域で分割して、別々に解析しなくてはならない。そこで、各レジーム毎に実数空間全域を最終継続領域で分割して解析を行うためのいくつかの定理を提唱した (補題2.2.1, 補題2.2.2)。スイッチ領域特定のための手掛かりとなる特別な領域 (これを本稿では参照領域と呼んでいる) が文献Pham (2009) 等にみられるが、この概念は連続同時スイッチがない場合のものであったため、本稿ではそれらの体系の拡張を行った。参照領域と最終継続領域の間の包含関係を示し（補題2.2.2)、スイッチ領域の構造を特定するための補助定理とした。2.2節ではそうした連続同時スイッチ領域を含む、スイッチ領域、継続領域の構造を明らかにするために必要な基本的な性質の確認を行っている。

最適運用戦略を求める上で考慮を要するのは、状態変数空間上の継続・スイッチ領域の特定である。領域がどのように分離されるのかという大域的な構造を把握するための命題群を構築した。まず互いに素な連結参照領域内部に最適連結スイッチ領域を高々 1 領域しか含まないようにできるための十分条件である、仮定2.2.1を提案した。これにより最適スイッチ領域の構造が参照領域を介して間接的に把握できるようになった。またそのようなことが可能なことを示す系2.2.3とその証明を与えた。

この前提条件のもとで最適スイッチ領域の構造及びそれらの存在範囲が特定され、問題を具体的な解析の問題まで落とし込むことが可能となった。これは本稿の主要な貢献の一つである。連続同時スイッチを意識したスイッチ先の構造解析はSuzuki (2021) で最初に行われたものであり、本稿は同時スイッチが明示的に許容される問題を取り扱う際の研究の基礎を築くという貢献を行った。

1.2.5 取引コスト・モデルと最適戦略

本稿で導入された最適連続同時スイッチの概念を実現するため、市場の取引コストモデルの適切な設定を行った。

本稿では、取引量に取引コストを比例させる比例取引コストモデルを採用することにより、連続同時スイッチを実用化している。これにより取引回数の概念を明確化でき、また動的計画原理を連続同時スイッチの各瞬間で成立するようにできる。連続同時スイッチといえども個々のスイッチは独立した取引であり、その順序も明確に決まっている。個々のスイッチ毎に独立したコストを払うことにより、連続同時スイッチによる遷移のうちのどの中間レジームにいても同時刻の過去のスイッチ履歴に関わらず、最終継続領域に達したときの経済的結果を同一にするような問題設定とすることができる。この設定の場合、それらの任意の中間レジームにいる状態を初期状態とするような小さな最適化問題に分解でき、それらの個々の問題を解いた最適戦略を連結したものが一連の連続同時スイッチ全体の最適戦略に一致する。それにより動的計画原理を同時スイッチ中の任

意の中間レジームを起点として成立させられる。そうすると直接的には連続同時スイッチのうち最初のスイッチの最適化問題までを解くだけでよいことになる。それ以降の最適スイッチ問題は、別途そのスイッチ先の状態を初期状態とするような小さな別の最適スイッチ問題に帰着させることができるからである。

1.2.6 粘性解 (viscosity solution)

本稿では最適スイッチ問題の値関数の求解手段として粘性解法を用いている。これにより求めようとする値関数を一意に求めることができ、効率的に数値計算を行える。

最適スイッチ問題の値関数は、動的計画原理（定理2.1.1）により継続領域上で満たすべき二階線形微分方程式と、スイッチ領域上で満たすべきスイッチ前後の値関数の関係式を組み合わせた Hamilton–Jacobi–Bellman-変分不等式 (HJB-variational inequality)(2.1.68) を導出し、値関数がその粘性解となることを示したうえで（定理2.1.4）、状態変数空間上の実数全域で C^1- 級かつ線形成長的な変分不等式の粘性解の一意性（定理2.1.6）を利用して値関数を求める。

偏微分方程式による値関数の求め方には古典解による方法と粘性解による方法があるが、古典解は解が滑らかとなる継続領域上での値関数の必要条件を示しているだけであり、スイッチ領域も含めた定義域全体で、候補となる関数が値関数に一致することを検証定理により示さなくてはならない。既存の文献では、Zhang and Zhang (2008), Guo and Zhang (2005), Zervos (2003) が検証定理を用いている。また古典解は一般に、継続領域境界で解の定義域が途切れてしまうが、粘性解は考察対象としている領域全体を 1 連続の定義域とすることができ、実数空間全体で 1 連続の解として表現できる。

この古典的アプローチの煩雑さを避けるために、Crandall and Lions らによって粘性解の概念が導入された。このアプローチにより確率制御問題に汎用性を持った強力な解析手段がもたらされ、局所有界条件を満たすだけの関数を形式的なベルマン方程式の解とするための厳密な数学的解釈を与えることが可能となった。本稿でも粘性解アプローチを用いており、解の一意性を示せれば古典的な検証定理を示す必要はない。求めようとする値関数が、実数空間全域にわたる一意の粘性解で表されることは数値計算上も決定的に重要である。非線形方程式を取り扱うような数値計算では予め解の個数が特定されていないと先に進むことができない。

1.2.7 比較原理 (comparison principle) 構築のための解析手段の提供

粘性解の一意性を示すために比較原理が用いられるが、本稿の枠組みにおいてそれを構築するために必要となる定理を提唱し、それを証明した。これらの定理により解析環境が整備され、比較原理を効率よく構築することが可能となる。

比較原理 (定理2.1.5) は粘性解の一意性、連続性を示すために必要である。これは粘性優解が粘性劣解以上になるという単純な命題であるが、粘性解が粘性優解かつ粘性劣解であることを考え併せると、この比較原理のおかげで全ての粘性解が一意になる。また値関数の連続性も同時に導かれる。ただし比較原理は汎用的な前提のもとで成立する原理ではない。個々の最適化問題に応じたアレンジが必要である。Suzuki (2016) を研究する時点で、実数空間全体を定義域とし、かつ投資期間が有限でない同様の問題に対する比較原理の証明は既存文献では取扱われていなかったため独自の証明を行った。Suzuki (2021) でモデルの評価関数を線型から二次関数へと拡張する際に、更にこの比較原理の拡張も行った。本稿中ではこの二次関数の場合の比較原理を示しているが、評価関数中のリスク回避係数を 0 とおいたものが線形の場合に相当するため、本稿の比較原理は、評価関数が一次、二次の両者にわたり有効である。

比較原理の証明では不等式の証明を行うが、典型的な手順は、0 以上を示したいとき、0 の代わりに微小な正の摂動項を挿入して、まず易しい仮の問題に直して証明し、その後その摂動項を 0 に近付ける (極限操作する) ことにより間接的に 0 以上となることを示すというやり方である。技巧を要するのは適切な摂動項となる関数を探すことである。摂動項は元の関数に加算される微小な項という建て付けであるため、元の関数の性質を踏襲してなおかつ後の極限操作においてもその性質が保たれるような適切な関数形を探さなくてはならない。

本稿の問題の場合、この元の関数の性質というのは粘性優解性である。粘性優解性を摂動化された関数に伝搬させるためには、2 つの別々の微分方程式のそれぞれの粘性優解の線形結合が、同じ線形結合により、元の 2 つの微分方程式どうしを合成してできた新しい微分方程式の粘性優解になっていると都合がよい (定理2.1.2)。同様の考え方に基づき、2 個の別々の変分不等式の粘性優解どうしの正値線形結合が、同様にしてそれら 2 個の変分不等式を正値線形結合してできた新しい変分不等式の粘性優解となるための十分条件を定理として導いた (定理2.1.3)。この定理は比較原理を摂動法を用いて証明する際、摂動関数を効率よく発見するためには有効な定理である。この定理もこの分野の研究を行う上での礎となると考えられる。実際、本稿で取り扱った問題においても、二次の項を持つ評価関数を最適化してできた値関数に対して (粘性解に対して線形成長条件を要件としている) 比較原理を見通しよく適用できたのも、この基礎的な定理の貢献に負うところが大きい。この定理2.1.3に示す計算は、無条件で行えるわけではなく、本稿ではそのような計算を可能とするために必要な前提条件を示している。またそれらの手順を正当化させるために必要な一連の定理を証明した。

これらの結果を用いることにより、本稿で取扱う問題の比較原理を効率的に示すことができた。このような解析手段の提供という環境整備も本稿による貢献の一つである。

1.2.8　評価関数の次数の拡張

Suzuki (2016)、Suzuki (2018) の評価関数は線型であったが、Suzuki (2021) では投資家の評価関数を、期待リターンのみでなく、ポジション保有に伴うリスクも考慮したものへと拡張した。本稿では初めから両モデルを包含した形式の評価関数を用いている。

最適継続・スイッチ領域の構造を研究したいくつかの文献、Ngo and Pham (2016), Pham et al. (2009), Pham (2009), Suzuki (2016), Suzuki (2018) では準線型関数 (正斉次性かつ劣加法性) を評価関数に用いている。より特定的には、Pham et al. (2009), Suzuki (2016) では線形関数を、Ngo and Pham (2016) では定数を用いている。多くの研究の評価関数は二次関数より低成長率のものであるが、El Asri and Hamadene (2009), El Asri (2010), El Asri (2013) では任意の多項式関数を評価関数として解の存在と一意性について論じている。

評価関数の成長速度は最適継続・スイッチ領域の形状に大きな影響を与える。本稿で取り扱う評価関数には投資リスクを評価する二次関数を取り入れている。平均回帰型資産をリターンの一次の評価関数で評価するとき、典型的な最適戦略は、価格乖離が長期平均をある程度上回ったときにポジションを売持ちに、そしてある程度下回った時にポジションを買持ちに遷移するという戦略である。ファイナンスの分野ではポートフォリオの高期待リターンを一方的に追求するだけが目的ではない。実務上は適切なリスク管理がなされなくてはならない。

Suzuki (2016)、Suzuki (2018) は累積期待リターンの線形関数を評価関数としていた。従来、比較原理 (comparison principle) を適用する上で非線形化は難しいと考えられていたが、本稿では二次のリスクペナルティ項を追加しても比較原理が適用できるように拡張した。本稿のモデルでリスク評価関数として設定したのは、平均回帰過程のライフサイクルにおける価格乖離変数の現在位置の、長期平均からの乖離の平方である。

評価関数に対するこの拡張によって、リスク回避的な投資家向けのモデルが記述できるようになり、より現実的な最適解が得られるようになった。

リスクペナルティ項を追加した場合について分析した結果、価格乖離変数の空間上の両端には、過度なリスクを回避するための、square 以外のレジームをとれない領域が出現することが分かった。すなわち、この領域においては、square 以外のポジションは瞬時に square にスイッチされ、それ以外のポジションを保有することは最適でない。これは最適性の観点からも自然な結果である。即ち、ポジション保有により、過度なリスクを負う領域では投資ポジションをとらない square にするのが最適ということになる。このように問題のクラスを拡張するために、領域構造特定のための命題系2.2.3をはじめとする一連の命題群を提唱し、それらを証明した。

第 2 章　数理モデル

第2章は、戦略の最適性を担保するための数理的な定理を提唱し、その正当性を証明することが主要目的である。この章で提示する主要な定理の概要を以下に述べる。

定理2.1.1(動的計画原理: Suzuki (2016), Theorem 3.1) は動的計画原理であり、この原理は最適化問題の根幹を成している。この定理は、最適な戦略を仮定した場合、制御可能な変数のどの部分を変更しても、対応する値関数は改善しないという普遍的な原理を数理的に表現したものであり、値関数に関する再帰的な表現で表される。すなわち、最適なアクション (スイッチする／しない) を起こす場合、それに対応する値関数は、そのアクションによる部分と、アクション後の残りの部分に分けられるが、その残りの部分は、最初の最適なアクションを起こした結果を前提として新たにスタートする場合の同様の値関数で表現できるという関係が成立するはずである。この原理を成立させるように最適なアクションが決まる。ここで連続時間問題の場合、この最適なアクションを時間的に無限小の設定で行うと、スイッチしないことが最適アクションの場合、継続領域上で満たされるべき HJB-微分方程式が導かれる。これは従属変数を値関数とするものであり、大まかには、その HJB-微分方程式を解くことにより値関数が求められるはずである。動的計画原理は値関数を求めるための導入となる原理であり、本稿で取扱う具体的問題に対してその原理が成立することをこの定理が示している。

継続領域上では値関数を支配しているのは、HJB-微分方程式であったが、スイッチ領域上ではそうならない。継続領域を離れると一般的には求める値関数は C^2-級ではなくなるため、古典解は役に立たない。スイッチ領域も含めた実数全域による単一の連結領域上で原則、一連続の解として表現できるのが粘性解である。実数空間全域で値関数を規定する変分不等式を提示し、求める値関数がその変分不等式の粘性解になることを示すのが定理2.1.4(HJB-変分不等式の粘性解: Suzuki (2021), Theorem 2.3) である。 求める値関数は実数全域で C^2-級にならないが、C^1-級であることが、定理2.2.1(Smooth fit condition: $v(z,\xi,n) \in C^1(\mathbb{R})$: Suzuki (2021), Theorem 3.1) で示される。この性質により、継続領域上の区分的な粘性解を古典解と見做すときの継続領域境界上で満たされるべき古典解の必要条件が得られる。

ただし、一般に、変分不等式の粘性解は一意ではないが、条件を絞ることにより一意性を担保できれば、解が値関数であることを検証する必要がなくなる。粘性解の一意性を担保するために用いられるのが、前述の定理2.1.5(比較原理: Suzuki (2021), Theorem 2.4) である。これは粘性優解が粘性劣解以上になるという、形式的には単純な定理であるが、粘性解が粘性優解かつ粘性劣解であることを考え併せると、この比較原理のおかげで全ての粘性解が一意になる。それを直接表現するのが、定理2.1.6(連続性・一意性: Suzuki (2021), Theorem 2.5) である。ただし比較原理は汎用的な前提のもとで成立する原理ではなく、新種の問題の場合、

個別の最適化問題に応じたアレンジが必要となる。

前述のとおり、比較原理では不等式の証明を行うが、技巧を要するのは適切な摂動項となる関数を探すことである。効率的に摂動項を探すために必要な定理が、定理2.1.2(粘性優解どうしの正値線型結合: Suzuki (2021), Theorem 2.1), 定理2.1.3(変分不等式の正値線型結合: Suzuki (2021), Theorem 2.2) である。これらは、微分方程式どうしの正値線型結合、或は変分不等式どうしの正値線型結合と、それぞれの粘性優解どうしの正値線形結合に関する定理である。

前述のとおり、本稿のモデルにおいては、最適投資行動は投資開始時刻と無関係で、その時のレジーム及び状態変数 (価格乖離とレジーム) の位置のみに依存する。つまりその時点のレジーム毎に状態変数空間を、継続領域及び最適スイッチ領域に分解し、さらに最適スイッチ領域をどのレジームにスイッチするかによって分解する。継続領域、スイッチ領域の出現の仕方はパラメータの値に大きく依存し、解の具体的特定には数値計算技術が要求される。しかし、計算機による古典的な数値計算技術だけで自由境界問題の継続領域の特定ができるわけではなく、実数空間上のどのあたりにそれらが存在するのか、その集合が単一の連結領域なのか、複数の連結領域に分割されているのか、有限領域なのか無限領域なのかといった領域の特徴の把握が必要となる。前述のとおり、微分方程式を手掛かりに解を特定する場合、継続領域が連結なのか分離しているのかは決定的に重要であり、最適解を具体的・実用的にするためには、継続・スイッチ領域の実数空間上での構造の特定には煩雑な考察を要する。定理2.2.2(連結スイッチ領域: Suzuki (2021), Theorem 3.2) は、連結なスイッチ領域を取出すための手掛かりとなる定理である。また、定理2.3.1(スイッチ領域の構造) は、具体的な特定の問題に関して連結スイッチ領域を特定する定理であり、本稿の主要研究結果の一つでもある。

第 3 章　最適戦略の解釈と感応度分析

第3章では第2章で導出された最適戦略の解釈、リスク回避度の解釈、感応度分析等を行う。特に3.2節では数理的に導き出された最適戦略の、主要なパラメータに関する感応度分析を行った。変化させるパラメータは取引コスト、平均回帰資産の回帰強度、資産のボラティリテイなどである。そして結果に対して最適性を説明できるような解釈を与えた。

本稿のスイッチ問題の解として得られる最適戦略の特徴は、スイッチ発生タイミングを決定付ける価格乖離変数の位置である。これは過程の現在のレジームに基づく継続領域境界である。数値的に求められたこの継続領域境界の、パラメータに対する感応度を計測した。すなわち最適化問題を構成する主要なパラメータの変化に対して、最適スイッチを決定付ける変数の位置 (最適スイッチ地点) がどう変化するか、また、最適スイッチ後に次のスイッチが発生するまでの時間間隔の期待値 (期待一巡時間) がどう変化するのかを計測した。

取引コスト係数 K は運用戦略のパフォーマンスに直接影響を与えるため、その変化が最適投資戦略へ与える影響は大きい。K の上昇に伴い、最適スイッチ地点は回帰中心から遠ざかる動きをする。これは K の増加に伴い、最適戦略が総コスト抑制のためにスイッチ発生頻度を抑制する動きになるためであると考えられる。それに伴い、期待一巡時間 τ は増加する結果となった。この結果は、最適化の観点からも納得できるものである。

次いで平均回帰強度 θ による感応度分析である。本稿のモデルは平均回帰型の資産を投資対象としているが、その長期平均への回帰力の違いが、最適運用戦略に及ぼす影響を考察した。運用対象資産の平均回帰運動は、スイッチという投資取引を行う原動力につながるものである。運用対象資産である O–U 過程の数理的構造により、価格乖離変数が長期平均から遠ざかるほど、また、平均回帰強度が大きいほど、回帰中心への回帰

力も大きくなる。そのため θ が増加すれば、価格乖離変数が平均から近くても同様の平均回帰力を得ることができる。そのため、感応度分析を行った結果は、θ の増加に伴い、最適スイッチ地点は回帰中心に近づく動きとなった。このとき継続領域間隔が狭くなるため、その分、期待一巡時間は短くなった。

運用対象資産のボラティリティ σ 増加に伴い、最適スイッチ地点は回帰平均から遠ざかる。これは最適投資戦略が、取引コストを伴う頻繁のスイッチを避けるためであると考えられる。文献Gatev, Goetzmann, and Rouwenhorst (2006) では、価格差のボラティリティの 2 倍の 2σ の位置を、価格差の長期平均からの乖離によるスイッチ発動の目安としていた。感応度分析結果をみると、スイッチ発動タイミングの目安として彼らがボラティリティ比例の関数を用いていたのはよい推測であったことがわかる。ただし、彼らのモデルでは取引コストが考慮されておらず、2σ は実際には最適戦略ではない。

また、評価関数にリスク項が組み込まれる場合の、リスク回避係数 λ の感応度分析も行った。評価関数がリスク・ペナルティ項を含む場合、その項の係数がリスク回避係数 λ である。ポジションが long 或は short をとっている場合、価格乖離変数が回帰中心から離れるに連れて、評価関数に占めるリスクペナルティ項の影響が大きくなる。ポジション保有に伴うリスクの影響が限度を超して大きくなると、ポジション保有が最適でなくなるため、square ポジションへのスイッチが発生する。その地点より外側の $\pm\infty$ を含む領域が安定的 square 領域である。それらの領域では、square 以外のポジションではいられない。感応度分析を行った結果、リスク回避係数 λ を大きくすると、評価関数がよりリスク回避的になるため、安定的 square 領域が広くなることが分かった。反対に λ が 0 に近づくにつれ安定的 square 領域は縮小し、$\lambda = 0$ で安定的 square 領域は消滅する。

これらの分析結果は全て理論的な最適解に期待される動きと整合的であり、結果は理解できるものである。

第 4 章　数値計算

第4章では最適解を数値計算により具体的に求めた。一般に一般解の形が同じでも、与える任意定数や自由境界によって継続・スイッチ領域の構造は変化する。一般解における任意定数と自由境界を特定し、最適化問題の解を数値的に求めた。数値計算においては、特殊関数を取扱う必要があるため、既存の計算機技術を効率的よく活用する必要がある。このような困難があるため、本稿のような問題設定で数値解を求めている既存文献は少ない。

最適解を特徴付ける値関数はある種の変分不等式の粘性解であり、ある前提条件のもとでその解は一意に決定される。解の存在と一意性を証明するだけでも一纏まりの研究成果物であるが、具体的にその解を数値的に求めることができなければ、ファイナンス研究としての実用性は乏しい。本稿で用いている粘性解の概念は抽象度の高い数学を用いて記述されており、計算機を使い、定義に従って直接粘性解を求めることはできない。問題を構成する概念は精緻に構築されているがそれを導出するための道具はデジタルであり、実数空間上の $\forall, \exists$ といった解析的演算には向いておらず、具体的に数値解を算出するためには工夫が必要である。

粘性解自体は独自の定義を持ち、その定義には古典的な一般解のような表現は現れないが、実数空間上に複数個表われ得る、それぞれの自由境界問題における各継続領域上で古典的な一般解表現を用い、それらを張り合わせたものが粘性解になるための条件と構成手順を研究した。一般に各レジーム毎に、解くべき自由境界問題は、実数空間上に存在する連結した継続領域の個数毎に存在するため、定義域上の区分ごとに解を求めることになる。こうして各レジーム毎に、古典的一般解による区分的自由境界問題系の解として実数全域上の粘性解が導出される。そのような区分的古典解の組合せで構成された関数が、実数空間全域を定義域とする元の変

分不等式の粘性解に一致することを定理4.2.1に示した。この結果を用いると計算処理手順の上では、一般解の任意定数と自由境界という未定係数を求めることにより粘性解を求めることが可能となる。すなわち、実質的な数値計算は非線形連立方程式の求解処理だけで済むことになり、いわゆる微分方程式の数値解法のような汎用的で大掛かりな手法を用いる必要がない。数値計算を行う場合、予め存在する解の個数が分かっていれば、存在しないものを探すリスクを回避できる。数値計算では存在しないことを示すことは難しい。そのため数値計算上も一意性は重要である。一意性によると、得られた粘性解がそのまま値関数になるが、数値計算においては、この定理4.2.1の手順に従えば、条件を満たすようにして最初に計算された結果が自動的に求める粘性解となることが保証され、それが求める値関数になる。

また、本稿で取り扱う粘性解は複数の区分的自由境界問題の古典解の合成として構成されるものであり、特定のスイッチ権利数毎に、かつ特定のレジーム毎に複数の連結部分継続領域が現れ、それら個々の連結領域上毎に独立した自由境界問題を解かなくてはならない。価格乖離を表す変数の実数全域の解の関数形を決定するには、未知数を決定するための非線型連立方程式を繰り返し解かなくてはならない。非線型方程式を解くには、一般的にはシステムに入力すべき初期値の推定が重要である。解に近い初期値を効率よく設定できれば計算効率が上がる。解と係数の連続性によりパラメータが近い連立方程式どうしの解はお互いの解の近傍に表われ易い。幸い本稿の問題は漸化式に基づく繰返し計算を主体とするため、繰返し計算突入後は過去の求解履歴の中から類似のパラメータに対する解を抽出することによって効率的に、求めるべき解に近い初期値を設定できる。本稿ではそのような過去の計算履歴をデータベース化することにより、その効率的な仕組みを実装することに成功した。

また、複雑な関数計算を見通し良く行うためには、関数や解の可視化が不可欠である。これは数値計算プログラムをデバッグする上では欠かせない。理論的に導かれた関数の正当性を確認するには、解析幾何学的な観点からの関数やアルゴリズムの検証作業 (計算機上のデバッグ作業) が必要である。自由境界や微分可能性の検証などは可視化が有効であるが、そのためには高精度のプロッターが必要である。本稿では matplotlib パッケージを用いることにより関数を可視化し、計算処理の正当性を画面で検証しながらアルゴリズム構築を行うことができた。

今回、一般解の計算、ニュートン法による連立方程式の求解、データベースの実装、プロッターの実装等は全て Python プラグラムをインターフェイスとしてパッケージ呼び出しにより実装した。全てのパッケージを単一のプログラミング言語から呼び出すことにより計算全体の効率化に寄与している。

第 5 章　シミュレーションと実証分析

第5章では解析的アプローチのみならず最適戦略の正当性を適宜シミュレーションで確認している。その結果、最適戦略からは、想定されていた良好な結果が得られた。また、解析的に求められた最適戦略の実用可能性を検討するため、市場のデータを用いて実証分析による最適戦略の検証を行った。結果は実務に耐え得るものであった。

5.1節では典型的なパラメータ設定のもと、モンテカルロ・シミュレーションにより運用パフォーマンスを測定したところ、100 回の試行による日次シャープ・レシオの平均は 2.3 であった。一方、類似の最適化問題に対してGatev et al. (2006) では、2σ 戦略が提唱されていた。この戦略は、どのようなペアに対しても一律、各時点における過去一定の観測期間の状態変数の値の実績標準偏差の 2 倍の閾値を、長期平均から現状の状態変数の水準が上回って乖離するときに、スイッチを発動させるような戦略であるが、この戦略によるモンテカ

ルロ・シミュレーションによる日次シャープ・レシオの平均は-0.083 であった。こうして既存の戦略とのパフォーマンス比較においても、本論文の最適戦略の良好な結果が示された。

また、モデルに現実の市場データを適用し、シミュレーションを行い実用性の検証も行った。数理的なアプローチから導き出された複数レジーム問題の具体的な最適解に市場データを適用するような実証研究はまだない。というのもそもそもこのような問題の最適戦略の具体的な解を導き出した例自体が少ないからである。

ファイナンスの分野では pair-trading 戦略実行のためのアプローチとして、大別してファンダメンタルズに基づくアプローチとテクニカル・アプローチがある。前者は伝統的な手法で、構成銘柄のファンダメンタルズを判断基準として両者の価格乖離の行方を判断する手法であり、後者は乖離を何らかの確率過程にモデル化しライフサイクルとみなすようなやり方である。特定のペアのモデル化に関しては本稿の手法は後者である。

しかしながら、モデルを実証データに適用するにあたって、実務上は無数に可能性のある 2 銘柄の組合せの中から適切なペアを選択するという課題がある。そこに関しては伝統的なファンダメンタルズに基づく判断を取り入れた。つまりファンダメンタルズに共通点を持つような銘柄群からペアを選択、構成するというものである。基礎的な収益構造が類似している銘柄同士のリターン格差は市場や業界全体の要因 (factor) に影響され難くなり、個別企業要因を反映した平均回帰過程に当て嵌まり易いと考えられる。典型的には、有効なペアは同業種から抽出したり、親子上場企業や、合併が予定されている銘柄どうしが用いられる。親子上場によるペアは比較的共和分関係を持ちやすく、かつ長期観測可能である。世界全体では多数の親子上場銘柄が存在する。その中から適切な 82 のグローバル・ペアを選択して本稿が導き出した最適スイッチ戦略を適用させ、ヒストリカル・シミュレーションを行った。

具体的には、5.2.1節で平均回帰確率過程のパラメータを推定し、有効なペアの探索法を示した。すなわち 2 銘柄の株式のペアの価格乖離が単位根を持たないような組み合わせを探索するため、拡張 Dickey–Fuller の単位根検定 (Dickey and Fuller (1979)) を有意水準 0.01 で行った。ここでは世界の株式市場に親子上場している銘柄の中から、2010 年初から 2015 年末までの日次株価を用いて単位根の存在という帰無仮説を棄却する 82 のペア (表5.2) を抽出している。

5.2.3節では、抽出されたペアに対して実証データを用いて本稿の最適戦略を適用させたシミュレーションを行った。対象観測期間に 1 回以上のスイッチが発生した 66 ペアの平均日次シャープ・レシオは 0.69 であった。本論文のモデルは数理モデルから生まれた最適解であるものの、この結果より実務的にも十分利用可能であると考えられる。