

ペア・トレーディングによる最適投資戦略の理論的拡張および
数値解について

鈴木 清

2021年8月19日

概要

価格が長期平均水準に平均回帰する資産に投資し、価格の変動に応じて買い／売り／保有なしのポジションを切り替える最適投資戦略を導出した。過去の文献では、考慮すべき最適化問題の取引戦略のとりうるレジーム数が2種類である2レジーム問題を扱ったものが多いが、これを3レジームに拡張することにより、実際に行われている投資戦略により近い状況をモデル化することができた。

また先行研究では投資ポジションの変更回数を限定して議論が行われてきたが、投資ポジションを変更できる回数を任意の数として与え、最適化問題の解を求めるように問題を一般化することで、これまでの既存研究を含めて、統一的な視点から分析した。

最適戦略の実行中、スイッチ間の時間間隔が0で連続して同時に発生するスイッチ、すなわち連続同時スイッチを導入し、最適戦略を規定する継続領域、および最適スイッチ先別の領域を区分するために必要な、いくつかの解析的手段を新たに提供した。

また、最適スイッチ問題の値関数の求解手段として粘性解法を用いることにより、求める解を一意にでき、数値計算においても効率的に処理を行った。粘性解の一意性を示すために比較原理が用いられるが、それを構築するために必要な定理を証明した。これらの定理により解析環境が整備され、比較原理を効率よく構築することが可能となる。

更に、評価関数として、期待リターンのみでなく、ポジション保有に伴うリスクも考慮したものへと拡張された問題を取扱った。

また最適解を具体的に求めた。一般に一般解の形式が同じでも、与える任意定数や自由境界によって継続・スイッチ領域の構造は変化する。区分的一般解の任意定数と自由境界を特定し、全区間で粘性解となるようにして、最適化問題の解を数値的に求めた。数値計算においては、特殊関数を取扱うため、既存の計算機技術を効率的によく活用する必要があるため、本稿のような問題設定で数値解を求めている既存文献は少ない。

解析的アプローチのみならず最適戦略の正当性を適宜シミュレーションで確認している。最適戦略を実行するシミュレーションからは、想定されていた良好な結果が得られた。また、解析的に求められた最適戦略の実用可能性を検討するため、市場のデータを用いて実証分析による最適戦略の検証を行った。結果は実務に耐え得るものとなった。

目次

第 1 章	研究目的と貢献	7
1.1	研究目的と先行研究	8
1.1.1	研究の背景と概要	8
1.1.2	Pair-trading、平均回帰過程、最適スイッチ問題	9
1.1.3	先行研究の概要	9
1.2	本稿による貢献	11
1.2.1	レジーム数の拡張	11
1.2.2	スイッチ権利回数 n 、レジーム ξ の組合せと最適化問題の範囲	12
1.2.3	連続同時スイッチ	12
1.2.4	同時スイッチがある場合のスイッチ領域の特定	13
1.2.5	取引コスト・モデルと最適戦略	14
1.2.6	粘性解 (viscosity solution)	15
1.2.7	比較原理 (comparison principle) 構築のための解析手段の提供	15
1.2.8	評価関数の次数の拡張	16
1.2.9	最適解の数値計算	17
1.2.10	シミュレーションと実証研究	18
1.2.11	モデルの可視化・再現性	19
1.3	本稿の構成	20
第 2 章	数理モデル	21
2.1	定式化、値関数、粘性解	22
2.1.1	最適化問題定式化	22
2.1.1.1	買(売)持ち戦略 ($n = 0$)	25
2.1.1.2	動的計画原理	25
2.1.2	値関数の性質	28
2.1.3	試験関数	31
2.1.4	粘性優解の線形結合	34
2.1.5	値関数と HJB-変分不等式	38
2.1.6	摂動関数と比較原理	41
2.2	同時スイッチと継続・スイッチ領域の構造	43
2.2.1	連続同時スイッチ領域の基本	44

2.2.2	最終継続領域	46
2.2.3	参照領域の導入	48
2.2.4	複数連結領域への分解と連結性の確認	50
2.3	HJB-変分不等式の解	54
2.3.1	継続領域上の微分方程式の古典解 (一般解)	54
2.3.2	継続領域上の微分方程式の古典解 (境界条件)	55
2.3.3	線型評価関数 ($\lambda = 0$)	56
2.3.4	個別事例研究 ($n = 1, \lambda = 0$)	59
2.3.4.1	ポジション最適清算問題 ($n = 1, \xi = \pm 1, \lambda = 0$)	59
2.3.4.2	ポジション最適構築問題 ($n = 1, \xi = 0, \lambda = 0$)	60
2.3.5	個別事例研究 ($n = 2, \lambda = 0$)	63
2.3.5.1	ポジション構築権利付きのポジション最適解消問題: ($n = 2, \xi \in \{\pm 1\}, \lambda = 0$)	63
2.3.5.2	ポジション解消権利付きのポジション最適構築問題: [$n = 2, \xi \in \{0\}, \lambda = 0$]	63
2.3.6	個別事例研究 (一般の $n < +\infty, \lambda = 0$)	66
2.3.7	個別事例研究 ($n \rightarrow +\infty, \lambda = 0$)	67
2.3.8	二次評価関数 ($\lambda > 0$)	68
第 3 章	最適戦略の解釈と感応度分析	72
3.1	最適戦略の行動様式とリスク回避度の解釈	73
3.1.1	リスク回避度の解釈 (線型関数 例2.3.1)	74
3.1.2	リスク回避度の解釈 (二次関数 例2.3.2)	75
3.2	最適戦略の感応度分析	76
3.2.1	典型的なパラメータ	76
3.2.2	最適スイッチ位置とスイッチ間隔の期待値 ($\lambda = 0$ の場合)	76
3.2.3	主要パラメータの感応度分析 ($\lambda = 0$)	77
3.2.3.1	スイッチ権利数 n ($\lambda = 0$)	77
3.2.3.2	取引コスト係数 K [図3.2(a), 3.2(b)]	77
3.2.3.3	平均回帰強度 θ [図3.3(a), 3.3(b)]	77
3.2.3.4	ボラティリティ σ [図3.4(a), 3.4(b)]	78
3.2.4	二次式の評価関数の感応度分析 ($\lambda > 0$)	79
3.2.4.1	リスク回避係数 $\lambda > 0$	79
3.2.4.2	確率過程 X のボラティリティ σ	80
第 4 章	数値計算	81
4.1	一般解を構成する特殊関数	83
4.1.1	エルミート関数とその実装	83
4.1.2	エルミート関数の実装上の定義域	84
4.2	区分的一般解を用いた粘性解の構築	85
4.2.1	古典解を接ぎ合わせて粘性解になるのか?	85

4.2.2	区分古典解を用いた粘性解の構築	86
4.3	値関数計算アルゴリズムとデータ構造	91
4.3.1	スイッチの入れ子構造	91
4.3.2	継続領域間の引継ぎ構造	91
4.3.3	初期値問題と解の管理	93
4.3.4	解析的に自明な解の導入による解の存在範囲の推定	95
4.3.5	線型問題と非線形問題	97
第 5 章	シミュレーションと実証分析	100
5.1	Monte Carlo simulation	101
5.1.1	離散化	101
5.1.2	仮想プログラム <u>StrategyLoop</u>	101
5.1.3	スイッチ領域 $\mathcal{S}_N^{\xi, \hat{\xi}}$ の特定	102
5.1.4	Monte Carlo Simulation 実行	103
5.1.5	シミュレーション結果検証	104
5.2	実証分析	107
5.2.1	ペアの選択	107
5.2.2	確率過程のパラメータ推定	110
5.2.3	最適スイッチ戦略の実証的シミュレーション実行	112

目次

2.1	値関数 $v(z, \xi = 1, n = 2)$ の例	44
2.2	例2.3.1の参照領域：線型評価関数の場合（出所）Suzuki [2018] Figure 1	59
2.3	値関数 $v(z, \pm 1, 1)$ （出所）Suzuki [2016] Figure 3	61
2.4	値関数 $v(z, 0, 1)$ （出所）Suzuki [2016] Figure 4	62
2.5	値関数 $v(z, \pm 1, 2)$ （出所）Suzuki [2018] Figure 2	64
2.6	値関数 $v(z, 0, 2)$	65
2.7	値関数: $v(z, \pm 1, n)$ （出所）Suzuki [2016] Figure 5	66
2.8	値関数: $v(z, 0, n)$ （出所）Suzuki [2016] Figure 6	66
2.9	値関数 $v(z, \xi, \infty)$, $\xi = \{-1, 0, 1\}$ （出所）Suzuki [2016] Figure 7	68
2.10	例2.3.2の参照領域の構造: 評価関数が二次式の場合（出所）Suzuki [2021] Figure 2	71
3.1	遷移に伴う一連の値関数: $v(z, \mp 1, 2), v(z, 0, 1), v(z, \pm 1, 0)$ （出所）Suzuki [2018] Figure 2	74
3.2	K 水準別最適スイッチ地点と期待一巡時間（出所）Suzuki [2018] Figure 3	78
3.3	θ 水準別最適スイッチ地点と期待一巡時間（出所）Suzuki [2018] Figure 4	78
3.4	σ 水準別最適スイッチ地点と期待一巡時間（出所）Suzuki [2018] Figure 5	79
4.1	粘性解の条件式の依存関係	82
4.2	値関数 $v(z, \xi, n)$, $\xi = \{-1, 0, 1\}$ の $n = 1 \rightarrow 0$ へのスイッチ前後の関係	92
4.3	値関数 $v(z, \xi, n)$, $\xi = \{-1, 0, 1\}$, $n = 0, 1$	93
4.4	値関数 $v(z, \xi, n)$, $\xi = \{-1, 0, 1\}$, $n = 0, 1, \dots, 5$	94
4.5	自明な解によるスイッチの様子: $v(z, 0, 1) \rightarrow \hat{v}(z, \hat{\xi}), \hat{\xi} = \pm 1$	97
4.6	継続領域境界位置のリスク回避係数 λ に対する感応度分析	98
5.1	n 別最適スイッチ地点 z_n^0, z_n^1 （出所）Suzuki [2018] Figure 6	104
5.2	Monte Carlo simulation によるパフォーマンス（出所）Suzuki [2018] Figure 7	105
5.3	2 戦略による評価関数のシャープ・レシオ比較（出所）Suzuki [2018] Figure 8	106
5.4	HONDA と YUTAKA GIKEN の実行結果（出所）Suzuki [2018] Figure 9	113
5.5	表5.2のペアを用いた最適戦略による実証的シミュレーションによるリスクとリターン（出所）Suzuki [2018] Figure 10	113

表目次

2.1	モデルのパラメータ数値例（出所）Suzuki [2018] Table 1	60
3.1	基本データ事例 1（出所）Suzuki [2018] Table 1	76
4.1	分析で用いられた主要な Python 標準・外部パッケージ	99
5.1	基本データ事例 2（出所）Suzuki [2018] Table 2	103
5.2	Pairs list for the application of the optimal pair trading strategy (Source: Suzuki [2018] Table 3)	111

プログラム 目 次

4.1	エルミート関数 $H_\nu(z)$ の実装	83
4.2	$H_0(0)$ の計算	83
4.3	$H_\nu(z)$ の計算	84
5.1	Pair process loop function (Source: Suzuki [2018] Figure 1)	101
5.2	Find $\mathcal{S}_N^{\hat{\xi}}$ for each $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \xi \in \mathbb{I}$ (Source: Suzuki [2018] Figure 1)	103
5.3	Monte Carlo simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)	103
5.4	Execution of the Monte Carlo simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)	104
5.5	Hypothesis test for pairs (Source: Suzuki [2018] Figure 1)	109
5.6	Historical simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)	112
5.7	Execution of the Historical simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)	112

第 1 章

研究目的と貢献

1.1 研究目的と先行研究

本稿では、価格が長期平均水準に平均回帰する資産に投資し、価格の変動に応じて買い／売り／保有なしのポジションを切り替える最適投資戦略問題を、連続時間モデルを用いて考察する。投資家の評価関数には、取引戦略から得られるリターンから取引コストを控除した値の現在価値、あるいはそれから資産価値の変動に伴うリスクを控除したものを考える。

取引コストの存在を仮定するため、最適戦略は離散時間間隔でポジション変更する戦略となる。取引期間には期限を設けず、決められた回数の取引が可能であるとして最適投資問題を設定する。このため、最適解は時刻に依存せず、ポジション変更の有無と変更先に応じて価格領域を分割する形で表現される。

最適スイッチ問題 (optimal switching problem) の先行研究の多くは、遷移可能な状態が 2 種類である 2 レジーム (regime) 問題を考察している。本稿では、既存の 2 レジーム問題を 3 レジーム問題に拡張し、同一時点で複数回のスイッチを実行するという連続同時スイッチという概念を導入することにより、先行研究では取り扱うことができなかった問題に対して具体的な解析手法を構築した。あわせて、各レジームにおける資産価格の領域を正負対称な実数全域に拡張することで、資産運用においてより自然な最適化問題となるように先行研究のモデルを修正した。既存研究の多くは解の存在と一意性を示すにとどまっているが、本稿では具体的に数値解を求めることにより解の可視化も行い、最適戦略の検証を行えるようにした。

以下この章ではモデルの概要に触れながら先行研究と共に、本稿による主要な貢献を項目別に整理したい。

1.1.1 研究の背景と概要

最適ポートフォリオ研究の歴史において、多様な設定、アプローチのモデルが研究されてきたが、long ポジションと short ポジションを組合せたポジションによる最適投資戦略には研究余地が残されており、制約がなく実務的にも受容られるモデルは少なかった。

Long only のポジションを前提とする場合、対象資産を成長資産と想定することが多いが、long/short のポジションを自由に保有できる場合、合成資産として価格差が、成長性の相殺された平均回帰型資産というある種の定常過程となるものを探することも可能である。そのような合成資産に対する投資戦略として pair-trading 戦略がある。

初期の最適ポートフォリオ研究による最適解は最適ウェイトの形で表現されたが、それはリバランスタイミングを与えるものではなく具体的な取引戦略ではなかった。取引コストを考えると、より現実的な離散間隔取引戦略による取引タイミングを与えるような最適解が望まれた。

先行研究のうち例えば、Zhang & Zhang [2008], Song & Zhang [2013] では平均回帰資産の最適スイッチ戦略を取扱っているが、構築可能なポジションは、どちらか一方を long し、他を short する合成ポジションか、或は square のみで、両構成銘柄を逆転させたポジションをとれない。すなわち 2 レジーム限定のモデルであった。Pair-trading 戦略の特徴は構成銘柄を対等に long/short できることにあり、逆転したポジションを対称に記述できるようなモデルが望ましい。そのため本稿では平均回帰資産の最適スイッチ問題を対称な 3 レジーム問題に拡張することを考えた。その際、現実在即し、取り得るポジションの定義域に制約がなく、また、実務とも整合的なパフォーマンス評価関数による最適化モデルを構築した。

レジーム数の拡張の他、本稿の貢献としては、連続同時スイッチを考慮に入れられるようモデルを改善し、そのモデルのもとで最適戦略により特徴付けられる状態変数空間の構造を特定するための解析手段を提供し

た。またより実態に即したモデルとするため、評価関数にリスク評価項をとり入れ、具体的な最適解を数値計算した。またシミュレーションや実証分析を行い実務への適用可能性も評価した。

1.1.2 Pair-trading、平均回帰過程、最適スイッチ問題

まず、Pair-trading 戦略、平均回帰過程、最適スイッチ問題など、本研究で用いられる基本的な概念の概要を示す。

本稿で取り扱う投資戦略は pair-trading である。たとえば、同一産業に属する 2 銘柄の価格変動がほぼ連動しているとしよう。ただし個別要因による変動もあるため両者にはリターン差が存在する。企業固有の基礎的要因により一方が優位に立つと価格差が拡大し、競争により他方が巻返すと縮小するため、対数価格乖離は長期的平均のまわりを動くとして仮定する。

このようにほぼ連動すると考えられる 2 銘柄の一方を long、他方を short ポジションとして保有し、それをペア・ポジションの long とみなし、全体を反転させたものをペア・ポジションの short と呼ぶことにすると、このポートフォリオ価値は構成銘柄の対数価格乖離と局所的には連動する。構成銘柄の対数価格乖離は長期的には平均回帰運動に従うと考えられる。これを連続時間の拡散過程の一種である、Ornstein-Uhlenbeck process としてモデル化する。

このようなポジションを保有し、構成銘柄の価格差がピークに達したところで利食う (すなわちポジションを解消して稼いだリターンをポートフォリオ内に蓄積する) ことができれば、パフォーマンスを改善することが可能となる。この投資戦略問題を、ペア・ポジションを long, square, short の 3 レジーム間で切り替える (スイッチする) 確率的最適制御問題 (stochastic optimal control problem) として定式化し、資産価格変化に伴うリターンからレジーム切り替えに伴う取引コストを控除し期待割引現在価値化したそれらの期中合計を評価関数とした。スイッチのタイミングを停止時 (stopping time) とし、その際のスイッチ先レジームの指定と併せて制御変数とし、それを制御することにより最大化された評価関数が値関数 (value function)、それを与える制御変数すなわちその停止時及びスイッチ先レジームの指定のセットが最適戦略である。

ペアのポジションに対する一連の取引過程はレジーム遷移 (switching) 過程として記述できる。まず株 A を買い、株 B を空売りすることをペアの買持ち (long) ($\xi = 1$) と呼ぶことにする。その逆を売持ち ($\xi = -1$)、ポジションを持たない状態を square ($\xi = 0$) と呼ぶことにする ((2.1.5) 式)。これが 3 種類のレジームを持つモデルである。レジーム ($\xi \in \mathbb{I}$) を制御変数とし、適切な評価関数を設定することにより、それを最大化する最適化問題を作れば、最適解として最適な運用戦略を求めることができることになる。

1.1.3 先行研究の概要

過去の文献では、遷移可能な状態が 2 種類である 2 レジーム問題を扱ったものが多い。必ずしも資産運用を意識したものばかりではないが、数理モデルとして類似した内容の過去研究を以下に示す。

Dixit [1989] では企業の最適投資行動をモデル化している。投資先案件の価格が幾何ブラウン運動に従う場合に事業継続／撤退を最適に繰り返す戦略 (従ってレジーム数は 2) を導出している。従ってスイッチ権利数が ∞ の場合に相当する。案件価格の可動範囲は正の領域とされている。Dixit & Pindyck [1994] は企業による投資意思決定を最適化するモデルが解説されている書籍である。投資・撤退の決断という 2 レジーム問題の最適タイミングを求める問題が具体例の中心である。Metcalf & Hassett [1995] では資産価値が幾何ブラウン運動に従う場合と幾何平均回帰運動に従う場合について最適投資タイミングを求める問題 (最適買い問題) を

取扱っている。いずれも対象資産価値の可動範囲は正の領域である。投資していない状態から投資した状態への遷移 (従って 2 レジーム問題) が一回だけの最適スイッチ問題である。Zervos [2003] では資産価格が算術ブラウン運動に従う場合の数値解を求めている。レジーム数は 2 であるが、新たな選択肢として、実物オプションの文脈におけるプロジェクト中止の自由裁量権を持つ問題を取扱っている。Hamadene & Jeanblanc [2007] のモデルは事業の操業・停止の 2 レジームのスイッチによりリターンが変化するような有限期間最適化問題を取扱う。BSDEs (backward stochastic differential equations) によるアプローチを用い、最後は数値計算で具体的な解を求めている。Duckworth & Zervos [2001] では幾何ブラウン運動に従う確率過程の場合の解析解を求めている。変数の可動範囲は正の範囲で、レジーム数は 2 である。Tsekrekos [2010] は実物オプション分野の研究であるが、資産運用モデルと考へても数理モデルは同一である。ここでは幾何平均回帰過程 (geometric mean-reverting process) を用いて価格 (従ってその可動範囲は正の領域のみ) をモデル化し、参入・撤退の 2 レジームによるスイッチ問題の最適戦略を求めている。Pham & Vath [2007] では幾何ブラウン運動に従う確率過程を取扱い、評価関数を冪型とし、粘性解アプローチとして 2 レジーム問題の解析解を与えている。Bayraktar & Egami [2010] では取扱い対象の確率変数を幾何ブラウン運動や O-U 過程とし、可動域を吸収壁により制限し、評価関数として冪型関数や時間割引きされた線型関数を用いて最適解を求めている。Pham [2009] は書籍であり、最適スイッチ問題の章では、数理モデル上のレジーム数は任意の整数として記述されているが、具体例は 2 レジーム問題中心で、変数の可動域も正の値に限定されている。Zhang & Zhang [2008] では平均回帰資産の運用を意識し、買持ち／保有しないという 2 レジームによる最適スイッチ問題を取扱っている。幾何平均回帰過程に従う資産 (従って資産価格の可動範囲は正の領域のみ) を運用し、取引コストを控除し、スイッチにより発生するキャッシュフローを最大化するという独特な問題を解いている。検証定理を用いて値関数を求めている。この独特な評価関数の設定は以下の 2 文献、Song & Zhang [2013], Nguyen, Tie & Zhang [2014] にも共通の特徴である。Song & Zhang [2013] では、Zhang & Zhang [2008] にストップ・ロスの水準を設けたモデルの拡張を行っている。Pair-trading を意識し、2 資産の価格乖離が平均回帰過程に従うモデルである。Nguyen et al. [2014] では更にそのモデルが拡張され、長期回帰平均が外生的にマルコフ・ジャンプし値が変化する仕組みになっている。以上は遷移可能な状態が 2 種類である 2 レジーム問題である。

一般的なレジーム数に関する最適スイッチ問題は、特定の資産運用戦略を意識しない抽象的な研究として Brekke & Oksendal [1994] で取り扱われている。一般的な伊藤過程を対象資産として値関数と最適戦略の満たすべき十分条件が与えられている。抽象的で汎用的な結果ではあるが、個別の問題に関してそのような条件を満たす最適解をどのように導くかという問題は別途考える必要がある。Pham, Vath & Zhou [2009], Ngo & Pham [2016] では 3 レジーム問題を取り扱っている。まず Pham et al. [2009] では幾何ブラウン運動過程や、幾何平均回帰過程に従う資産価格の最適スイッチ戦略を求める問題を取扱っており、従って資産価格の可動範囲は正の範囲のみであり、2 資産価格の乖離を独立した確率過程と捉えて実数全域を確率過程の可動範囲としたい本稿の用途を満たすものではない。取引期間は無限期間であり、スイッチ回数が無制限のケースのみを取扱っている。また Ngo & Pham [2016] は、Suzuki [2016] 後の出版であるが、パフォーマンスの計測法が独特でありまた、連続同時スイッチは意識されていない。

投資対象となる 2 銘柄の価格差が定常過程となる、すなわち共和分関係にあるとしてモデル化し、最適投資問題を連続時間で研究した文献もある。この枠組みのモデルを用いた文献には、大別して 2 つの異なるアプローチがある。確率制御問題による定式化と、最適スイッチ問題による定式化である。

まず Merton 型の確率制御問題としてこの問題を取り扱っている既存文献では、取引コストがなく無限小リバランスを前提としている。Mudchanatongsuk, Primbs & Wong [2008] では 2 銘柄によるポートフォリ

オのうち片方を幾何ブラウン運動、両銘柄の対数価格差を O-U 過程とにおいて、辻褃が合うように他の銘柄の価格過程を決めている。その価格過程は複雑な表現となり双方のモデル上の銘柄の対称性は損なわれている。有限期間満期の将来期待ポートフォリオ価値の冪型期待評価関数を最大化している。Chiu & Wong [2011], Chiu & Wong [2015] ではリターンのドリフトが定常過程に従うような銘柄群によるポートフォリオの有限期間の平均分散型評価関数による最適戦略を導いている。Tourin & Yan [2013] で取扱っている 2 銘柄ポートフォリオも非対称で、構成銘柄の一方は幾何ブラウン運動、もう一方は両価格を共和分化させるように調整されたドリフトを持つ伊藤過程としてモデル化されている。有限期間満期のポートフォリオ将来価値の指数型期待評価関数を最大化している。確率制御問題による定式化による場合、最適解は連続時間における各時刻の最適ポートフォリオ・ウェイトという形をとる。細かい取引が連続時間で行われるため、取引コストは導入しにくい(例えば Pliska & Suzuki [2004], Ang [2014] 等を参照)。

一方で、最適スイッチ問題の設定で共和分関係にある資産を取り扱っている文献には、既に概要を紹介した Tsekrekos [2010], Bayraktar & Egami [2010], Zhang & Zhang [2008] Nguyen et al. [2014], Song & Zhang [2013] 等の文献がある。最適スイッチ問題による定式化では、一回当たりの取引量は離散的な単位が選ばれ、最適な間はレジームは不変のまま経過し、スイッチは離散間隔で行われる。取引コストも自然に導入し易い。最適解の形式は、連続時間における各瞬間においてレジーム継続かスイッチか、スイッチ時にはどのレジームへスイッチするかを特定するものである。実務的な観点からモデル構築が行われたと考えられる Gatev, Goetzmann & Rouwenhorst [2006] も最適スイッチ問題としての問題定式化が行われている。本論文の問題定式化も最適スイッチ問題に基づく。特定の平均回帰型資産価値のライフサイクル上の位置を用いて、売り時・買い時を判定できる。ファンドマネージャの典型的な動機としては、市場に歪みを発見したとき、ペアのポジションを構築し、その歪みの解消を待ち、しかる後ポジションを解消して利食うというものである。

本稿で取り扱う資産は 2 銘柄の対数価格乖離が定常過程に従うため、共和分資産に近い。ただし本稿ではその価格乖離を平均回帰過程という 1 つの確率過程としてモデル化しており、確率過程の検定を行う際、その 1 変数による検定を行っている。1.1.2 節でその概要を伝えたが、平均回帰型資産に対する最適購入或は売却戦略、或はそれらを繰り返す問題に関しても多くの研究がなされている。例えば Bertram [2010] や Göncü & Akyıldırım [2016] では Ornstein-Uhlenbeck 過程に従う資産に対して最適購入・売却問題を取り扱っている。ポジション解消の閾値は予め長期平均に設定されている。ただし、長期平均でポジション解消することが必ずしも最適ではないことを Suzuki [2016] は示唆している。また平均回帰型資産を取り扱う研究として、Bayraktar & Egami [2010] では Ornstein-Uhlenbeck process を資産価格モデルとして 2 レジームの最適スイッチ問題を取り扱っているが、価格乖離ではなく資産価格自体を平均回帰型としてモデル化しているため、価格水準 0 を吸収壁とし、状態変数を正の領域のみに限った偏ったモデルとなっている。本稿では価格乖離を 1 資産と見做しそれをモデル化している。正負対称で実数全域を定義域とする状態変数を想定し、買持ちと売持ちとは完全に対称な取り扱いを想定するものである。Zhang & Zhang [2008], Nguyen et al. [2014], Song & Zhang [2013] においても平均回帰型資産の最適売買問題が取り扱われているが 2 レジームで状態変数の定義域は正の象限のみである。Pair-trading 戦略の長所は、ポジションを対称に反転させられることにある。 -1 を掛けることにより符号を反転させられる設定の問題も上記文献の中には存在するがそれでも 2 レジーム問題でしかない。Square ポジションはリスク管理上は重要なレジームであると考えられる。

1.2 本稿による貢献

1.2.1 レジーム数の拡張

本稿の貢献のひとつは、pair-trading における取引戦略のとりうるレジーム数を 3 個に拡張したことである。この拡張によって、実際に行われている pair-trading より近い状況をモデル化することができた。

最適スイッチ問題を取り扱う既存の文献では、1.1.3 節で紹介したとおり、レジーム集合の設定としては、買持ち、保有しない (square) の 2 個のレジームを用いるのがこれまでの研究の主流であった。本稿では連続時間市場において遷移状態が 3 個のレジームからなる最適スイッチ問題を資産運用問題に適用し、具体的な最適戦略 (optimal strategy) を導出した。本稿では 2 銘柄の対数価格の乖離を一つの確率過程としてモデル化しており、その可動範囲は実数全域である必要がありまた、long A/short B と long B/short A は互いに対称なモデル式となるべきである。先行研究の中では、Pham et al. [2009] が 3 レジーム問題を用いているが、対象資産価格を表す確率変数の可動範囲は正の領域のみとされ、またパフォーマンスを計測する関数の値域が非負などに制限されているため、本稿にそのまま応用することができない。また Ngo & Pham [2016] (Suzuki [2016] 後の出版であり純粋な先行研究とは呼べないが) でも 3 レジーム問題は取り扱われているが、パフォーマンスの計測法が独特で、スイッチを発生させて初めてそれまでの累積パフォーマンスが決まるような仕様になっており、予め構築したポジションに基づいてその後の収益が決まるというファイナンスの常識的なパフォーマンス認識とは異なるものである。

そこで、平均回帰する資産価値の可動範囲の制約がなく long/short/square の 3 状態が対称となるような自然なモデル化を実現するため、問題を 3 レジーム問題に拡張することに取組んだ。このような拡張により、既存の 2 レジーム問題に比べて幅広い実行可能領域を確保し、評価関数も資産運用問題に適したものにすることができた。一方で、2 レジーム問題は実質的には、特定の状態から、「いつ」スイッチするかを決定するだけの問題であったが、これを 3 レジーム問題に拡張する場合、いつを決定することに加えて、どの状態に遷移するかという意思決定も同時に最適化しなくてはならないことが問題を複雑化させる。

本稿のモデルは、平均回帰型資産運用において買持ち/売り持ち/square の 3 レジームのポジションをとり得る最適スイッチ問題に最初に解を与えた研究である。本稿の貢献はそうした複数レジーム遷移可能な最適スイッチ問題の最適戦略を具体的に求めた点にもある。

1.2.2 スイッチ権利回数 n 、レジーム ξ の組合せと最適化問題の範囲

本稿では、投資運用期間を無限とし、投資ポジションを変更できる回数を任意の整数として与え、最適化問題の解を求める方法を検討する。先行研究では投資ポジションの変更回数を限定して議論が行われてきたが、本稿ではこのように問題を一般化することで、これまでの既存研究を含めて、統一的な視点から分析を進める。

まずスイッチ権利数がゼロ ($n = 0$) の場合は、買持ち ($\xi = 1$)、売持ち ($\xi = -1$)、square ($\xi = 0$)、の各戦略を取り続けた場合に相当する。スイッチする権利が与えられていないため最適化問題ではないが、この戦略の期待値はスイッチ権利数が一般的な 1 以上の問題 ($n \geq 1$) の解を求めるうえで基礎データとなる。

$n = 1$ のときは、最適停止問題になる。すなわち、スイッチの権利を一回行使することにより上記 $n = 0$ の値関数を得るための最適停止時を求める問題である。一般的な運用戦略の文脈では、 ξ の初期値に応じて $\xi = 1$ のとき最適売却問題、 $\xi = 0$ のとき最適購入問題 (或は最適売却問題或は両者の組み合わせ)、 $\xi = -1$ のとき売り持ちの最適解消問題などに相当する。Pemy & Zhang [2006], Guo & Zhang [2005], Zhang [2001],

Eloe, Liu, Yatsuki, Yin & Zhang [2008] では、幾何ブラウン運動に従う資産に対する最適売却問題が研究されたが、枠組みとしては本稿の問題は彼らの問題を含んでいることになる。つまり彼らの問題は本稿の問題で $n = 1$ (1 回のスイッチ権利を持つ場合) とおいた特別な場合に相当する。

$n \geq 2$ のときが最適スイッチ問題である。特に $n = 2, \xi = \pm 1$ のとき、最適ポジション解消後再構築問題、 $n = 2, \xi = 0$ のとき、最適ポジション構築後再解消問題等に相当する。一般の $n < \infty$ のとき、最適 (有限回) 繰返しスイッチ問題、 $n = \infty$ のとき、無限回繰返しスイッチ問題になる。

本稿では後に述べるレジーム数の拡張、連続同時スイッチ、評価関数の次数の拡張等を行ったうえで、なおかつ一般の n に対し、まとめてそのような新しい問題を抽象的な一つの問題として一括して解くことにする。

1.2.3 連続同時スイッチ

本稿では、最適戦略の実行中、スイッチ間の時間間隔が 0 で連続して同時に発生するスイッチのことを (連続) 同時スイッチと呼ぶことにする。2.2 節では、連続同時スイッチに纏わる基礎的な解析を行っている。

一般に、レジーム数が増加すると、ひとつのレジームからその他のレジームへの遷移の可能性を全て考慮する必要が生じるため、最適化問題が複雑になる。本稿の最適投資戦略問題においては、売持ちポジションからは、売持ちポジションに留まる、買い持ちポジションに変更する、square ポジションに変更するという 3 つの選択肢があるため、問題が複雑になる。しかし、本稿の問題であれば、たとえば売持ちポジションから買い持ちポジションへの遷移は、中間の square ポジションを瞬間的に経由していると考えることができる。すなわち、同一時点で瞬間的に複数回スイッチが発生したとみなすことができる。本稿では、このように同一時点で複数回の戦略変更が行われるという概念を明示的に導入することにより、最適化問題の構造を単純化する工夫を行なった。この概念を明示的に取扱う先行研究はこの分野にはない。

先行研究のひとつである Pham et al. [2009] の研究では、レジーム i から j へのスイッチで発生する取引コストを g_{ij} と書くことにして、3 つのレジーム i, j, k を遷移するとき発生する取引コストについて、 $g_{ik} < g_{ij} + g_{jk}, j \neq i, k$ といった (等号なし) 三角不等式が成立することを仮定している。このとき、直接遷移するコストは第三のレジーム経由で迂回して遷移する合計コストを真に下回るため、 $i \rightarrow j \rightarrow k$ という連続同時スイッチは、直接 $i \rightarrow k$ とする選択肢に劣後することになり、同時スイッチという選択肢は排除される。

そこで、本稿では (等号を含む) 退化三角不等式 $g_{ik} \leq g_{ij} + g_{jk}, j \neq i, k$ が成立する設定とし、連続同時スイッチという選択肢を許容することで、例えば、売持ち (買い持ち) ポジションから中間の square ポジションを瞬間的に経由し、買い持ち (売り持ち) ポジションに瞬時に遷移する場合も考慮できるようにしている。値関数を求める際の連続同時スイッチ領域の重要性に関しては 2.2.1 節に図解入りで解説を行っている。また連続同時スイッチ領域の、一般のスイッチ領域との解析的性質の違いについてもそこで触れている。

同時スイッチという概念を導入して、中間レジームにおいて動的計画原理を適用することで、連続同時スイッチを単に 2 つの独立した最適化問題の解に忠実に従った結果として現れる現象ととらえることができる。こうして問題設定を整備することにより、問題の複雑さを緩和し、より単純な問題へ分解することで、最適スイッチ領域内の部分集合に更に最適連続同時スイッチ領域を導入し、それらの領域の基本的な性質を明らかにした。

1.2.4 同時スイッチがある場合のスイッチ領域の特定

連続同時スイッチの導入にあわせて、本稿では最適戦略を規定する継続領域、および最適スイッチ先別に領域を区分するために必要な解析的手段を新たに提供した。

本稿のモデルにおいては、最適投資行動は投資開始時刻と無関係で、その時点のレジーム及び、状態変数の位置のみに依存する。つまりその時点のレジーム毎に状態変数空間を、継続領域及び最適スイッチ領域に分解し、さらに最適スイッチ領域をどのレジームにスイッチするかによって分解する。継続領域、スイッチ領域の出現の仕方はパラメータの値に大きく依存し、解の具体的特定には数値計算技術が要求される。しかし、計算機による古典的な数値計算技術だけで自由境界問題の継続領域の特定ができるわけではなく、実数空間上のどのあたりにそれが存在するのか、その集合が単一の連結領域なのか、複数の連結領域に分割されているのか、有限領域なのか無限領域なのかといった領域の特徴に関する考察が必要となる。微分方程式を手掛かりに解を特定する場合、この継続領域が連結なのか分離しているのかは決定的に重要である。継続領域を支配する微分方程式は連結領域ごとに独立したものであるからである。一旦、連結継続が途切れてしまえばその方程式は他の連結領域上の方程式とは無関係である。このように最適解を具体的・実用的にするためには、継続・スイッチ領域の実数空間上での特定が最も煩雑な処理であるといえよう。

同時スイッチが起きる場合、初回の最適スイッチ先のみを特定するだけでは不十分である。最適な連続同時スイッチによる最終スイッチ先レジームにおける継続領域を、一連の同時スイッチの最終継続領域と呼ぶことにする。本稿の問題設定ではスイッチは有限回数でいずれかの最終継続領域に達するが、その最終最適スイッチ先による領域の分類(式(2.2.6))が、領域構造を解明するための鍵となる。

これまでの研究では、連続同時スイッチがなかったため、最適スイッチによる遷移先は継続領域であることが保証されていた。しかし連続同時スイッチがある場合、初回のスイッチが同じレジームへの最適遷移領域内であっても、そのスイッチ先で継続状態になるのか、さらに別のレジームへ遷移するのが最適なのかによって領域の性質が異なる。このため、初回の最適スイッチ領域を最終遷移先レジーム別の最終継続領域で分割して、別々に解析しなくてはならない。そこで、各レジーム毎に実数空間全域を最終継続領域で分割して解析を行うためのいくつかの定理を提唱した(補題2.2.1, 補題2.2.2)。スイッチ領域特定のための手掛かりとなる特別な領域(これを本稿では参照領域と呼んでいる)が文献Pham [2009]等にみられるが、この概念は連続同時スイッチがない場合のものであったため、本稿ではそれらの体系の拡張を行った。参照領域と最終継続領域の間の包含関係を示し(補題2.2.2)、スイッチ領域の構造を特定するための補助定理とした。2.2節ではそうした連続同時スイッチ領域を含む、スイッチ領域、継続領域の構造を明らかにするために必要な基本的な性質の確認を行っている。

最適運用戦略を求める上で考慮を要するのは、状態変数空間上の継続・スイッチ領域の特定である。領域がどのように分離されるのかという大域的な構造を把握するための命題群を構築した。まず互いに素な連結参照領域内部に最適連結スイッチ領域を高々1領域しか含まないようにできるための十分条件である、仮定2.2.1を提案した。これにより最適スイッチ領域の構造が参照領域を介して間接的に把握できるようになった。またそのようなことが可能なことを示す系2.2.3とその証明を与えた。

この前提条件のもとで最適スイッチ領域の構造及びそれらの存在範囲が特定され、問題を具体的な代数の問題まで落とし込むことが可能となった。これは本稿の主要な貢献の一つである。連続同時スイッチを意識したスイッチ先の構造解析はSuzuki [2021]で最初に行われたものであり、本稿は同時スイッチが明示的に許容される問題を取り扱う際の研究の基礎を築くという貢献を行った。

1.2.5 取引コスト・モデルと最適戦略

本稿で導入された最適連続同時スイッチの概念を実現するため、市場の取引コストモデルの適切な設定を行った。

本稿では、取引量に取引コストを比例させる比例取引コストモデルを採用することにより、連続同時スイッチを実用化している。これにより取引回数概念を明確化でき、また動的計画原理を連続同時スイッチの各瞬間で成立するようにできる。連続同時スイッチといえども個々のスイッチは独立した取引であり、その順序も明確に決まっている。個々のスイッチ毎に独立したコストを払うことにより、連続同時スイッチによる遷移のうちどの中間レジームにいても同時刻の過去のスイッチ履歴に関わらず、最終継続領域に達したときの経済的結果を同一にするような問題設定とすることができる。この設定の場合、それらの任意の中間レジームにいる状態を初期状態とするような小さな最適化問題に分解でき、それらの個々の問題を解いた最適戦略を連結したものが一連の連続同時スイッチ全体の最適戦略に一致する。それにより動的計画原理を同時スイッチ中の任意の中間レジームを起点として成立させられる。そうすると直接的には連続同時スイッチのうち最初のスイッチの最適化問題までを解くだけでよいことになる。それ以降の最適スイッチ問題は、別途そのスイッチ先の状態を初期状態とするような小さな別の最適スイッチ問題に帰着させることができるからである。

1.2.6 粘性解 (viscosity solution)

本稿では最適スイッチ問題の値関数の求解手段として粘性解法を用いている。これにより求めようとする値関数を一意に求めることができ、効率的に数値計算を行える。

最適スイッチ問題の値関数を求めるには、確率的アプローチ (probabilistic approach) (Djehiche, Hamadene & Popier [2009], Hamadene & Jeanblanc [2007], Hu & Tang [2010]) と、偏微分不等式を用いたアプローチ (Bayraktar & Egami [2010], Brekke & Oksendal [1994], Duckworth & Zervos [2001], Pham & Vath [2007], Tang & Yong [1993], Zervos [2003], El Asri & Hamadene [2009], El Asri [2013], El Asri [2010]) があり、本稿は後者を用いている。

最適スイッチ問題の値関数は、動的計画原理 (定理 2.1.1) により継続領域上で満たすべき二階線形微分方程式と、スイッチ領域上で満たすべきスイッチ前後の値関数の関係式を組み合わせた Hamilton–Jacobi–Bellman–変分不等式 (HJB-variational inequality) (2.1.68) を導出し、値関数とその粘性解となることを示したうえで (定理 2.1.4)、状態変数空間上の実数全域で C^1 -級かつ線形成長的な変分不等式の粘性解の一意性 (定理 2.1.6) を利用して値関数を求める。

偏微分方程式を用いた値関数の求め方には古典解による方法と粘性解による方法があるが、古典解は解が滑らかとなる継続領域上での値関数の必要条件を示しているだけであり、スイッチ領域も含めた定義域全体で候補となる関数が値関数に一致することを検証定理により示さなくてはならない。また古典解は一般に、継続領域境界で解の定義域が途切れてしまうが、粘性解は考察対象としている領域全体を 1 連結の定義域とすることができ、領域全体で 1 連続の解として表現できる。既存の文献では、Zhang & Zhang [2008], Guo & Zhang [2005], Zervos [2003] で検証定理を用いている。

この古典的アプローチの煩雑さを避けるために、Crandall and Lions らによって粘性解の概念が導入された。このアプローチにより確率制御問題に汎用性を持った強力な解析手段がもたらされ、局所有界条件を満たすだけの関数を形式的なベルマン方程式の解とするための厳密な数学的解釈を与えることが可能となった。

粘性解自体に関してはCrandall, Ishii & Lions [1992] やFleming & Soner [1993] などの文献がある。粘性解アプローチによる最適売却問題、最適スイッチ問題の研究としては、Pemy & Zhang [2006], Pham et al. [2009], Pham & Vath [2007] などが挙げられる。

本稿でも粘性解アプローチを用いており、解の一意性を示せれば古典的な検証定理を示す必要はない。求めようとする値関数が実数空間全域にわたる一意の粘性解で表されることは数値計算上も決定的に重要である。非線形方程式を取り扱うような数値計算では予め解の個数が特定されていないと先に進むことができない。

1.2.7 比較原理 (comparison principle) 構築のための解析手段の提供

粘性解の一意性を示すために比較原理が用いられるが、本稿の枠組みにおいてそれを構築するために必要となる定理を提唱し、それを証明した。これらの定理により解析環境が整備され、比較原理を効率よく構築することが可能となる。

比較原理 (定理2.1.5) は粘性解の一意性、連続性を示すために必要である。これは粘性優解が粘性劣解以上になるという単純な命題であるが、粘性解が粘性優解かつ粘性劣解であることを考え併せると、この比較原理のおかげで全ての粘性解が一意になる。また値関数の連続性も同時に導かれる。ただし比較原理は汎用的な前提のもとで成立する原理ではない。個々の最適化問題に応じたアレンジが必要である。Suzuki [2016] を研究する時点で、実数空間全体を定義域とし、かつ投資期間が有限でない同様の問題に対する比較原理の証明は既存文献では取扱われていなかったため独自の証明を行った。Suzuki [2021] でモデルの評価関数を線型から二次関数へと拡張する際に、更にこの比較原理の拡張も行った。本稿中ではこの二次関数の場合の比較原理を示しているが、評価関数中のリスク回避係数を0とおいたものが線形の場合に相当するため、本稿の比較原理は評価関数が一次、二次両者にわたり有効なものとなっている。

比較原理の証明では不等式の証明を行うが、典型的な手順は、0 以上を示したいとき、0 の代わりに微小な正の摂動項を挿入して、まず易しい仮の問題に直して証明し、その後その摂動項を0に近付ける (極限操作する) ことにより間接的に0以上となることを示すというやり方である。技巧を要するのは適切な摂動項となる関数を探すことである。摂動項は元の関数に加算される微小な項という建て付けであるため、元の関数の性質を踏襲してなおかつ後の極限操作においてもその性質が保たれるような適切な関数形を探さなくてはならない。

本稿の問題の場合、この元の関数の性質というのは粘性優解性である。粘性優解性を摂動化された関数に伝搬させるためには、2つの別々の微分方程式のそれぞれの粘性優解の線形結合が、同じ線形結合により、元の2つの微分方程式どうしを合成してできた新しい微分方程式の粘性優解になっていると都合がよい (定理2.1.2)。同様の考え方にに基づき、2個の別々の変分不等式の粘性優解どうしの正值線形結合が、同様にしてそれら2個の変分不等式を正值線形結合してできた新しい変分不等式の粘性優解となるための十分条件を定理として導いた (定理2.1.3)。この定理は比較原理を摂動法を用いて証明する際、摂動関数を効率よく発見するためには有効な定理である。この定理もこの分野の研究を行う上での礎となると考えられる。実際、本稿で取り扱った問題においても、二次の項を持つ評価関数を最適化してできた値関数に対して (粘性解に対して線形成長条件を要件としている) 比較原理を見通しよく適用できたのも、この基礎的な定理の貢献に負うところが大きい。この定理2.1.3に示す計算は、無条件で行えるわけではなく、定理に示す計算を可能とするために必要な前提条件を示している。またそれらの手順を正当化させるために必要な一連の定理を証明した。

副次的貢献として次のような点がある。粘性優 (劣) 解の判定には、通常、試験関数 (test function) の概念が用いられるが、この試験関数には優/劣の向きがある。これまで、どちらの方向を使うかは暗黙的であったが、今回2.1.3節で試験関数の向きを優 (劣) 試験関数と明示的に定義し、両者を区別して議論ができるよ

うにした。変分不等式を取り扱う際には、特に複数の条件の交わり (intersection) や結び (union) という集合演算を考えることが多いが、粘性解の判定にも元来、粘性優解、粘性劣解の交わりの概念を用いる。そこで、これら粘性優 (劣) 解を集合でとらえて解析できるようにし、またそのための表記法 (表記2.1.1) も工夫した。実際、変分不等式の優解に関しては $\min\{F, G\} \geq 0 \iff F \geq 0 \wedge G \geq 0$ であるが、劣解に関しては $\min\{F, G\} \leq 0 \iff F \leq 0 \vee G \leq 0$ となり、条件としては非対称であり両者の明確な区別は必要である。

これらの結果を用いることにより、本稿で取扱う問題の比較原理を効率的に示すことができた。このような解析手段の提供という環境整備も本稿による貢献の一つである。

1.2.8 評価関数の次数の拡張

Suzuki [2016]、Suzuki [2018] の評価関数は線型であったが、Suzuki [2021] では投資家の評価関数を、期待リターンのみでなく、ポジション保有に伴うリスクも考慮したものと拡張した。本稿では初めから両モデルを包含した形式の評価関数を2.1.1節、式 (2.1.10) に示している。

最適継続・スイッチ領域の構造を研究したいいくつかの文献、Ngo & Pham [2016]、Pham et al. [2009]、Pham [2009]、Suzuki [2016]、Suzuki [2018] では準線型関数 (正斉次性かつ劣加法性) を評価関数に用いている。より特定のには、Pham et al. [2009]、Suzuki [2016] では線形関数を、Ngo & Pham [2016] では定数を用いている。多くの研究の評価関数は二次関数より低成長率のものであるが、El Asri & Hamadene [2009]、El Asri [2010]、El Asri [2013] では任意の多項式関数を評価関数として解の存在と一意性について論じている。

評価関数の成長速度は最適継続・スイッチ領域の形状に大きな影響を与える。本稿で取り扱う評価関数には投資リスクを評価する二次関数を取り入れている。ファイナンスではリスク評価に二次関数を取り入れるのは自然である。すなわち典型的な評価関数は資産価格 (或はリターン)、或はコストの期待値という一次関数と、リターンの分散や標準偏差、ベンチマーク等へのトラッキングエラーという二次関数の組合せで構成される。

平均回帰型資産をリターンの一次の評価関数で評価するとき、典型的な最適戦略は、価格乖離が長期平均がある程度上回ったときにポジションを売持ちに、そしてある程度下回った時にポジションを買持ちに遷移するという戦略である。ファイナンスの分野ではポートフォリオの高期待リターンを一方向的に追求するだけが目的ではない。実務上は適切なリスク管理がなされなくてはならない。

経緯としてはSuzuki [2016]、Suzuki [2018] のモデルにおける最適化問題の評価関数の拡張をSuzuki [2021]で行ったが、本稿ではリスク回避係数を導入することにより、最初から両者を包含した評価関数として2.1.1節、式2.1.10に記述している。Suzuki [2016]、Suzuki [2018] は累積期待リターンの線形関数を評価関数としていた。従来、比較原理 (comparison principle) を適用する上で非線形化は難しいと考えられていたが、本稿では二次のリスクペナルティ項を追加しても比較原理が適用できるように拡張した。本稿のモデルでリスク評価関数として設定したのは、平均回帰過程のライフサイクルにおける価格乖離変数の現在位置の、長期平均からの乖離の平方である。評価関数に対するこの拡張によって、リスク回避的な投資家向けのモデルが記述できるようになり、より現実的な最適解が得られるようになった。

リスクペナルティ項を追加した場合について分析した結果、価格乖離変数の空間上の両端には、過度なリスクを回避するための、square 以外のレジームとしては存在できない点による領域が出現することが分かった。すなわち、この領域においては、square 以外のポジションは瞬時に square にスイッチされ、それ以外のポジションを保有することは最適でない。これは最適性の観点からも自然な結果である。即ち、ポジション保有により、過度なリスクを負う領域では投資ポジションをとらない square にするのが最適ということになる。このように問題のクラスを拡張するために、領域構造特定のための命題系2.2.3をはじめとする一連の命題群を提

供し、それらを証明した。

1.2.9 最適解の数値計算

本稿では最適解を数値計算により具体的に求めた。一般に一般解の形が同じでも、与える任意定数や自由境界によって継続・スイッチ領域の構造は変化する。一般解における任意定数と自由境界を特定し、最適化問題の解を数値的に求めた。数値計算においては、特殊関数を取扱う必要があるため、既存の計算機技術を効率的に活用する必要がある。このような困難があるため、本稿のような問題設定で数値解を求めている既存文献は少ない。

最適解を特徴付ける値関数はある種の変分不等式の粘性解であり、ある前提条件のもとでその解は一意的に決定される。解の存在と一意性を証明するまでで一纏まりの研究成果物かもしれないが、具体的にその解を数値的に求めることができなければ、ファイナンス研究としての実用性は乏しい。本稿で用いている粘性解の概念は抽象度の高い数学を用いて記述されており、計算機を使い、定義に従って直接粘性解を求めることはできない。問題を構成する概念は精緻に構築されているがそれを導出するための道具はデジタルであり、実数空間上の \forall, \exists といった解析的演算には向いておらず、具体的に数値解を算出するためには工夫が必要である。

今回本編では解を数値的に求めるための研究を新たに行った(4章)。粘性解自体は独自の定義を持ち、そこには古典的な一般解のような表現は現れないが、自由境界問題における継続領域上で古典的な一般解表現を用いることにより、一般解が粘性解になるための条件と手順を研究した。一般に各レジーム毎に、解くべき自由境界問題は、実数空間上に存在する連結した継続領域の個数毎に存在するため、定義域上の区分ごとに解を求めることになる。こうして各レジーム毎に、古典的一般解による区分的自由境界問題系の解として実数全域上の粘性解が導出される。そのような区分的古典解の組合せで構成された関数が、実数空間全域を定義域とする元の変分不等式の粘性解に一致することを定理4.2.1に示した。この結果を用いると計算処理手順の上では、一般解の任意定数と自由境界という未定係数を求めることにより粘性解を求めることが可能となる。すなわち、実質的な数値計算は非線形連立方程式の求解処理だけで済むことになり、いわゆる微分方程式の数値解法のような汎用的で大掛かりな手法を用いる必要がない。数値計算を行う場合、予め存在する解の個数が分かれば、存在しないものを探すリスクを回避できる。数値計算では存在しないことを示すことは難しい。そのため数値計算上も一意性は重要である。一意性によると、得られた粘性解がそのまま値関数になるが、数値計算においては、この定理4.2.1の手順に従えば、条件を満たすような最初に計算された結果が自動的に求める粘性解となることが保証され、それが値関数になる。

本稿で取扱う微分方程式は、Hermite 関数を基底関数とする一般解を持つ。ただし、Hermite 関数は級数で定義される特殊関数であり、引数の値の絶対値が大きくなるとその関数の値は計算機で表現可能な実数の最大値を越してしまうため、パラメータの範囲を限定的に制限することにより解の性質を探った。

また、本稿で取り扱う粘性解は複数の区分的自由境界問題の古典解の合成として構成されるものであり、特定のスイッチ権利数毎に、かつ特定のレジーム毎に複数の連結部分継続領域が現れ、それら個々の連結領域毎に独立した自由境界問題を解かなくてはならない。価格乖離を表す変数の実数全域の解の関数形を決定するには、未知数を決定するための非線型連立方程式を繰り返し解かなくてはならない。非線型方程式を解くには、一般的にはシステムに入力すべき初期値の推定が重要である。解に近い初期値を効率よく設定できれば計算効率が上がる。解と係数の連続性によりパラメータが近い連立方程式どうしの解はお互いの解の近傍に表われ易い。幸い本稿の問題は漸化式に基づく繰り返し計算を主体とするため、繰り返し計算突入後は過去の求解履歴の中から類似のパラメータに対する解を抽出することによって効率的に、求めるべき解に近い初期値を設定で

きる。本稿ではそのような過去の計算履歴をデータベース化することにより、その効率的な仕組みを実装することに成功した。

また、複雑な関数計算を見通し良く行うためには、関数や解の可視化が不可欠である。これは数値計算プログラムをデバッグする上では欠かせない。理論的に導かれた関数の正当性を確認するには、解析幾何学的な観点からの関数やアルゴリズムの検証作業(計算機上のデバッグ作業)が必要である。自由境界や微分可能性の検証などは可視化が有効であるが、そのためには高精度のプロッターが必要である。本稿では matplotlib パッケージを用いることにより関数を可視化し、計算処理の正当性を画面で検証しながらアルゴリズム構築を行うことができた。

今回、一般解の計算、ニュートン法による連立方程式の求解、データベースの実装、プロッターの実装等は全て Python プラグラムをインターフェイスとしてパッケージ呼び出しにより実装した。全てのパッケージを単一のプログラミング言語から呼び出すことにより計算全体の効率化に寄与している。

1.2.10 シミュレーションと実証研究

本稿では解析的アプローチのみならず最適戦略の正当性を適宜シミュレーションで確認している。その結果、最適戦略からは、想定されていた良好な結果が得られた。また、解析的に求められた最適戦略の実用可能性を検討するため、市場のデータを用いて実証分析による最適戦略の検証を行った。結果は実務に耐え得るものであった。

5.1節では典型的なパラメータ設定のもと、モンテカルロ・シミュレーションにより運用パフォーマンスを測定したところ、100回の試行による日次シャープ・レシオの平均は2.3であった。一方、類似の最適化問題に対して Gatev et al. [2006] では、 2σ 戦略が提唱されていた。この戦略は、どのようなペアに対しても一律、各時点における過去一定の観測期間の状態変数の値の実績標準偏差の2倍の閾値を、長期平均から現状の状態変数の水準が上回って乖離するときに、スイッチを発動させるような戦略であるが、この戦略によるモンテカルロ・シミュレーションによる日次シャープ・レシオの平均は-0.083であった。こうして既存の戦略とのパフォーマンス比較においても、本論文の最適戦略の良好な結果が示された。

また、モデルに現実の市場データを適用しシミュレーションを行い実用性の検証も行った。数理的なアプローチから導き出された複数レジーム問題の具体的な最適解に市場データを適用するような実証研究はまだない。というのもそもそもこのような問題の最適戦略の具体的な解を導き出した例自体が少ないからである。

ファイナンスの分野では pair-trading 戦略実行のためのアプローチとして、大別してファンダメンタルズに基づくアプローチとテクニカル・アプローチがある。前者は伝統的な手法で、構成銘柄のファンダメンタルズを判断基準として両者の価格乖離の行方を判断する手法であり、後者は乖離を何らかの確率過程にモデル化しライフサイクルとみなすようなやり方である。特定のペアのモデル化に関しては本稿の手法は後者である。

しかしながら、モデルを実証データに適用するにあたって、実務上は無数に可能性のある2銘柄の組合せの中から適切なペアを選択するという課題がある。そこに関しては伝統的なファンダメンタルズに基づく判断を取り入れた。つまりファンダメンタルズに共通点を持つような銘柄群からペアを選択、構成するというものである。基礎的な収益構造が類似している銘柄同士のリターン格差は市場や業界全体の要因(factor)に影響され難くなり、個別企業要因を反映した平均回帰過程に当て嵌まり易いと考えられる。典型的には有効なペアは同業種から抽出したり、親子上場企業や、合併が予定されている銘柄どうしが用いられる。親子上場によるペアは比較的共和分関係を持ちやすく、かつ長期観測可能である。世界全体では多数の親子上場銘柄が存在する。その中から適切な82のグローバル・ペアを選択して本稿が導き出した最適スイッチ戦略を適用させ、ヒスト

リカル・シミュレーションを行った。

具体的には、5.2.1節で平均回帰確率過程のパラメータを推定し、有効なペアの探索法を示した。すなわち 2 銘柄の株式のペアの価格乖離が単位根を持たないような組み合わせを探索するため、拡張 Dickey-Fuller の単位根検定 (Dickey & Fuller [1979]) を有意水準 0.01 で行った。ここでは世界の株式市場に親子上場している銘柄の中から、2010 年初から 2015 年末までの日次株価を用いて単位根の存在という帰無仮説を棄却する 82 のペア (表5.2) を抽出している。

5.2.3節では、抽出されたペアに対して実証データを用いて本稿の最適戦略を適用させたシミュレーションを行った。対象観測期間に 1 回以上のスイッチが発生した 66 ペアの平均日次シャープ・レシオは 0.69 であった。本論文のモデルは数理モデルから生まれた最適解であるものの、この結果より実務的にも十分利用可能であると考えられる。

1.2.11 モデルの可視化・再現性

本稿では解析的に求められた最適戦略に人間による解釈・理解を与えるための可視化を行った。結果は一般的にも理解可能なものとなった。

一般的に、厳格な数理モデルは抽象的過ぎて最適運用戦略の基本的な動作は理解し難い。その上、本稿の最適戦略は確率モデルであるためより説明し難いが、最適解の基本的な動作の理解の助けとなるよう、3.1節に最適運用モデルにシナリオを適用させた例を図示した。これにより値関数と最適戦略の動き、継続・スイッチ領域、取引コストやスイッチ権利数の関係を理解できるようにした。

また、最適スイッチ領域の特定、候補ペア選択や、想定される確率過程のパラメータの推定、最適運用戦略の適用手順のアルゴリズムの遂行、検定の手順、シミュレーション遂行等の一連の手順の再現性を高めるため、多くの疑似的なプログラムを掲載した (5.1節, 5.2節)。ここでは Microsoft Excel VBA でプログラミングを行っている。4.3節では Python を用いている。

また2.3節では、特定の問題設定のものとして具体的な最適戦略の数値計算も行い、結果をグラフに図示し、解の構造を可視化した。すなわち、スイッチ発生に伴い、スイッチ権利数が減少し、曲線が別のものに切り替わる様子は理論的に理解できるものとなった。

1.3 本稿の構成

本稿の構成は以下の通りである。2章では主にSuzuki [2016], Suzuki [2018], Suzuki [2021] の 3 論文共通の数理モデル部分を論じている。3章では2章で導出された最適戦略の解釈、リスク回避度の解釈、感応度分析等を行う。特に3.2節では数理的に導き出された最適戦略の、主要なパラメータに関する感応度分析を行った。変化させるパラメータは取引コスト、平均回帰資産の回帰強度、資産のボラティリティなどである。そして結果に対して最適性と、感応した動きを説明できるような解釈を与えた。4章では抽象的に求められた最適戦略や継続領域・スイッチ領域を具体的に求めるための研究を行う。5章ではSuzuki [2016] の数理モデルに対し現実のデータを用いた実証分析を行う。

第2章

数理モデル

第2章では数理モデル構築を行う。既存モデルにない独自の部分に関しては、基礎的な部分からその理論的根拠を示す必要があるため、定理とその証明を積み上げることにより、最終的に実用的で纏まった定理を構築することになる。

この章で提示する定理は次のようなものである。定理2.1.1は動的計画原理であり、この原理は最適化問題の根幹を成している。定理2.1.2, 2.1.3は、偏微分方程式どうしや、変分不等式どうしの正值線型結合による方程式の粘性優解と、対する粘性優解どうしの正值線形結合に関する重要な定理である。また、定理2.1.4, 2.1.5, 2.1.6, 2.2.1は、HJB-変分不等式の粘性解に関する定理や、比較原理、あるいは連続性・一意性定理であるが、粘性解アプローチをとる場合に示すべき普遍的な定理である。また、定理2.2.2, 2.3.1は、連結スイッチ領域やその構造に関する本稿の主要研究結果である。

2.1 定式化、値関数、粘性解

この節で、本稿で取扱う最適化問題の定式化、値関数の定義、値関数を粘性解とするような変分不等式、解の一意性について説明する。

2.1.1 最適化問題定式化

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ を一次元標準ブラウン運動 $\{W_t : t \in \mathbb{T}\}$ により生成された、フィルター $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \in \mathbb{T}}$ 付き完備確率空間とする。ただし、 $\mathbb{T} \equiv [t_0, \infty)$, $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$. また、初期時刻を t_0 とする。

A, B 2 銘柄ペアの価格 S_A, S_B の対数価格乖離による確率過程 $X \equiv \log \frac{S_A}{S_B}$ が平均回帰過程 (2.1.1)

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)dt + \sigma dW_t \quad (2.1.1)$$

に従うとする。この確率過程はSchwartz [1997], Elliott, Hoek & Malcolm [2005], Mudchanatongsuk et al. [2008] 等に登場する Ornstein–Uhlenbeck stochastic process (O–U process) である。株価 S の時刻 0 から t までの期間トータル・リターンを R とすると、 $S_t(t) = S_t(0)(1 + R)$ と表されるが、このとき対数価格の増分は、 $\log S_t(t) - \log S_t(0) = \log(1 + R) \simeq R - R^2/2 + \dots$ と近似されるため、対数価格の増分はリターンと見做せる。すなわち 2 銘柄の対数価格乖離の増分は両者のリターン格差と見做せる。 dX はこのペアの価格乖離から生ずるリターンと考えられ、 $t \in \mathbb{T}$ におけるこの価格乖離 X_t によるリターンが確率微分方程式 (2.1.1) に従うようモデル化される。定数 μ は過程 X の長期的平均水準、定数 $\theta > 0$ は平均回帰強度、定数 $\sigma > 0$ は X のボラティリティである。

X から Z への変数変換、

$$X - \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}} Z \quad (2.1.2)$$

を用いると、方程式 (2.1.1) は

$$dZ_t = -\theta Z_t dt + \sqrt{\theta} dW_t \quad (2.1.3)$$

と変換され、 $s \geq t$ に対して次のような解を持つ。

$$Z_s = Z_t e^{-\theta(s-t)} + \sqrt{\theta} \int_t^s e^{-\theta(s-u)} dW_u. \quad (2.1.4)$$

レジーム集合 \mathbb{I} を $\mathbb{I} = \{-1, 0, 1\}$ として、投資家が選択すべき次の 3 種類 ($N = 3$) のペアのポジション (レジーム) を次の意味とする。

$$\begin{cases} 1 & \cdots (\text{long A/ short B}), \\ -1 & \cdots (\text{long B/ short A}), \\ 0 & \cdots (\text{square}) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

すなわち、レジーム 1 は、株 A を long、株 B を short するポジションを、逆にレジーム -1 は、株 B を long、株 A を short するポジションを取る状態を、また、レジーム 0 は、ポジションをとらない状態を表しており、それぞれペアの long, short, square と呼ぶことにする。 $\mathcal{A}(\xi)$ は現在のレジーム ξ から遷移可能なレジーム集合を指す。

$$\mathcal{A}(\xi) \equiv \{\hat{\xi} | \hat{\xi} \in \mathbb{I}, |\hat{\xi} - \xi| = 1\}, \quad \xi \in \mathbb{I} \quad (2.1.6)$$

本稿の問題設定では、

$$\mathcal{A}(\xi) = \begin{cases} \{0\} & \cdots (\xi \in \{\pm 1\}), \\ \{\pm 1\} & \cdots (\xi = 0). \end{cases} \quad (2.1.7)$$

期間 $[t_0, \infty)$ に値をとる、特定のスイッチ戦略による停止時列 $\{\tau_i\}$, ($\tau_0 = t_0 \leq \tau_i \leq \tau_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$); $\tau_i \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow +\infty$) *a.s.*) を \mathcal{T}_{t_0} とおく。その停止時 τ_i はフィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \in \mathbb{T}}$ に基づく。つまり、 $\{\omega \in \Omega | t_0 \leq \tau_i(\omega) \leq s\} \in \mathcal{F}_s$, $s \in \mathbb{T}$. 各時点 τ_i にてレジーム (ポジション) は $\xi_{\tau_{i-1}}$ から ξ_{τ_i} へと変化する。つまり $\xi_{\tau_i} \in \mathcal{A}(\xi_{\tau_{i-1}})$ ($i = 1, 2, \dots$) は \mathcal{F}_{τ_i} -可測な確率変数である。スイッチ過程 ξ_s ($s \in \mathbb{T}$) は以下の区分定数過程として表現される。

$$\xi_s = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_{\tau_i} \mathbf{1}_{\{[\tau_i, \tau_{i+1})\}}(s), \quad s \in \mathbb{T}. \quad (2.1.8)$$

特定の戦略は $\{\xi_{\tau_i}, \tau_i\}$, ($\tau_i \in \mathcal{T}_{t_0}$) の形式で表現される。

また、スイッチ権利数 $n \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ と初期状態 $\xi \in \mathbb{I}$ を用いて実行可能戦略集合 (制御空間) は、

$$\mathbb{A}_n(\xi) \equiv \{ \{\xi_{\tau_i}, \tau_i\} | \xi_{\tau_i} \in \mathcal{A}(\xi_{\tau_{i-1}}) \subset \mathbb{I}, \tau_i \in \mathcal{T}_{t_0}, \xi_{\tau_0} = \xi, \tau_0 = t_0, i = 1, \dots, n \} \quad (2.1.9)$$

と表される。

本稿の評価関数の構成要素のうち、期待リターン部分は、平均回帰過程に従う資産価値変動によるリターンからスイッチに伴う取引コストを控除したものであり、初期のモデルとして [Suzuki \[2016\]](#) で取扱われたが、その後 [Suzuki \[2021\]](#) においてポジション保有に伴うリスクを評価する項が評価関数に付け加えられた。これはポジションを保有しているペアの価格乖離変数が回帰平均から乖離していることに伴うリスクである。スイッチ権利数 n ($0 \leq n \leq +\infty$)、初期状態変数が $Z_{t_0}^- = z$, $\xi_{t_0}^- = \xi$ のとき、各々の $\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)$, $\xi \in \mathbb{I}$ に対する評価関数は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} J(z, \xi, n, \alpha) \equiv & \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} \xi_s dX_s - \lambda \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} \{\xi_s (X_s - \mu)\}^2 ds \right. \\ & \left. - \sum_{\tau_i \geq t_0}^{\tau_n} e^{-\delta(\tau_i-t_0)} |\xi_{\tau_i} - \xi_{\tau_{i-1}}| K \middle| Z_{t_0}^- = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right], \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

ただし、評価関数の表記上は上式で $\lambda = 0$ としたものが初期のSuzuki [2016] の線型モデルに相当する。その他の既存研究に対する評価関数の拡張の議論は、1.2.8節で示しているとおりである。

時間割引率を $\delta > 0$ とし、便宜上 $\tau_{n+1} \equiv \infty$ とおく。式 (2.1.10) の期待値演算子内の第一項は、スイッチ戦略 $\{\xi_{\tau_i}, \tau_i\}$ を実践することにより平均回帰資産から発生する時間割引リターンの期間合計である。このリターンは取引やキャッシュフローの発生とは無関係に保有ポジションの価値変化に応じて発生し、評価益に相当する。スイッチ問題の場合、スイッチが発生するまではキャッシュフローは発生しない。文献によってはキャッシュフローの発生を評価の基準とするものもみられるが、その場合にはスイッチが発生しない間は市場が変化しても評価関数に反映されないものになってしまう。

第 2 項は、ポジションを保有し続けることに伴い発生するリスクを表現する二次関数である。定数 $\lambda \geq 0$ は投資家のリスク感応度を表すパラメータで、特に $\lambda = 0$ のとき初期モデルSuzuki [2016] に戻る。現在のペアの спреッド (ペアの価格乖離変数 X の、長期的回帰平均 μ からの乖離) $X - \mu$ が幅広の時、ポジション保有に伴うリスクが高くなるような設定であり、これは平均回帰資産価値 (ペアの価格乖離) の二次関数とすることによって実現されている。ポジションを保有しないことに相当するレジーム $\xi = 0$ (square) はリスクなしに相当する。

第 3 項は時間割引された取引コストである。これはブローカーへの手数料や市場で売買することに伴う各種コストを含む。スイッチ取引の頻度が高くなれば取引コストも無視できない。取引コストはレジーム $\xi_{\tau_{i-1}}$ からレジーム ξ_{τ_i} へのスイッチに伴う取引量に比例する。といってもスイッチ問題の場合、1 回あたりの売買取引量は常に 1 単位とカウントしている。

値関数は実行可能戦略集合 $\mathbb{A}_n(\xi)$ にわたる評価関数 J の戦略 $\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)$ に関する上限 (最小上界) と定義される。

$$v(z, \xi, n) \equiv \sup_{\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)} J(z, \xi, n, \alpha) \quad (2.1.11)$$

この値関数はパラメータ ξ, n を持っている。本稿が取り扱う問題群全体にはいくつかの重要な問題が含まれており、これを初期レジーム ξ とスイッチ権利数 n で分類する。

$n = 0, \xi = 1$ の場合は買持ち戦略 (buy-and-hold strategy) で取引は行われぬ。 $n = 0, \xi = -1$ という逆の売り持ち戦略もある。次に $n = 1, \xi = 1(-1)$ はそれぞれ最適ポジション解消問題、すなわち最適売却 (買戻し) 戦略である。同様に $n = 1, \xi = 0$ は最適ポジション構築問題、或は最適買入れまたは空売り問題などである。また n が有限のとき、有限繰返しスイッチ問題、無限 ($n = \infty$) のとき無限繰返しスイッチ問題となる。

最適化問題の分類と対応する値関数は以下の通りである。 $\xi \in \mathbb{I}, n = 0, 1, \dots, \infty$ 各々について、

$$v(z, \xi, n) = \begin{cases} v(z, \xi, 0) : & \text{buy-and-hold strategy,} \\ v(z, \xi, 1) : & \text{optimal entry problem } (\xi = 0), \\ & \text{optimal exit (unwinding) problem } (\xi = \pm 1), \\ & \text{optimal purchase or short-sales } (\xi = 0), \\ & \text{optimal sell } (\xi = 1)/\text{buy-back } (\xi = -1), \\ v(z, \xi, 2) : & \text{optimal exit problem with an option to entry } (\xi = \pm 1), \\ & \text{optimal entry problem with an option to exit } (\xi = 0), \\ v(z, \xi, n) : & \text{optimal finite iterative switching problem,} \\ v(z, \xi, \infty) : & \text{optimal infinite switching problem.} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

二次関数 f を

$$f(z, \xi) \equiv - \left(\xi \sqrt{\theta} \sigma z + \lambda |\xi| \frac{\sigma^2}{\theta} z^2 \right), \quad (2.1.13)$$

と定義すると Suzuki [2016] と同様に次の補題が成立する。

補題 2.1.1 (一様可積分マルチンゲール: Suzuki [2021], Lemma 2.1).

フィルトレーション \mathbb{F} に基づく任意の停止時 $\tau (\tau \geq t)$ に対して、

$$\mathbb{E}_x \left[\int_t^\tau e^{-\delta(s-t)} \left(\xi_s dX_s - \lambda (\xi_s (X_s - \mu))^2 ds \right) \right] = \mathbb{E}_z \left[\int_t^\tau e^{-\delta(s-t)} f(Z_s, \xi) ds \right] \quad (2.1.14)$$

証明. 確率過程 $M_u \equiv \int_t^u e^{-\delta(s-t)} dW_s$ に対し、

$$\mathbb{E} \left[|M_u|^2 \mid M_t = 0 \right] = \int_t^u e^{-2\delta(s-t)} ds = \frac{1}{2\delta} (1 - e^{-2\delta(u-t)}) < \frac{1}{2\delta} < \infty$$

となり、 $M_u (u \geq t)$ が二乗可積分マルチンゲール、つまり一様可積分マルチンゲールとなる。Doob's optional sampling theorem により、任意の停止時 $\tau (\tau \geq t)$ に対して、 $\mathbb{E} [M_\tau \mid M_t = 0] = 0$ である。式 (2.1.2), (2.1.3) により式 (2.1.14) が満たされる。□

補題 2.1.1 と式 (2.1.6), (2.1.9) を用いて、 $\tau_{n+1} = \infty$ として評価関数 (2.1.10) は次のように表される。

$$J(z, \xi, n, \alpha) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^n \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{-\delta(s-t)} f(Z_s, \xi_{\tau_i}) ds - \sum_{\tau_i \geq t_0}^{\tau_n} e^{-\delta(\tau_i - t_0)} K \mid Z_{t_0}^- = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \quad (2.1.15)$$

式 (2.1.4) より $s \geq t$ に対して、 $\mathbb{E} [Z_s \mid t] = Z_t e^{-\theta(s-t)}$ が成立。また、

$$Z_s^2 = Z_t^2 e^{-2\theta(s-t)} + 2\sqrt{\theta} Z_t e^{-\theta(s-t)} \int_t^s e^{-\theta(s-u)} dW_u + \theta \left(\int_t^s e^{-\theta(s-u)} dW_u \right)^2$$

より、

$$\mathbb{E} [Z_s^2 \mid t] = Z_t^2 e^{-2\theta(s-t)} + \theta \int_t^s e^{-2\theta(s-u)} du = (Z_t^2 - 1/2) e^{-2\theta(s-t)} + 1/2. \quad (2.1.16)$$

2.1.1.1 買(売)持ち戦略 ($n = 0$)

買(売)持ち戦略は本稿で取扱う問題群のうち $n = 0$ のケースでありスイッチ権利を持たないものの、以下で定式化される繰返しスイッチ問題群に関する再帰的表現形式の初期値に相当するため重要である。実行可能制御空間が空集合 ($\mathbb{A}_0(\xi) = \phi$) であるため、 $\xi \in \mathbb{I}$, $n = 0$ に対する値関数 (2.1.11) は以下のように計算される。式 (2.1.16) より、

$$\begin{aligned} \hat{v}(z, \xi) \equiv v(z, \xi, 0) &= J(z, \xi, 0, \phi) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} \mathbb{E}_z [f(Z_s, \xi)] ds = -(k_2 |\xi| z^2 + k_1 \xi z + k_0 |\xi|), \\ \text{ただし、} \quad k_2 &\equiv \frac{\lambda \sigma^2}{\theta(2\theta + \delta)} = \frac{\delta}{\theta} k_0 > 0, \quad k_1 \equiv \frac{\sqrt{\theta} \sigma}{\delta + \theta} > 0, \quad k_0 \equiv \frac{\lambda \sigma^2}{\delta(2\theta + \delta)} > 0. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

2.1.1.2 動的計画原理

定理 2.1.1 (動的計画原理: Suzuki [2016], Theorem 3.1).

$\{\tau_i\}$ を最適スイッチによる停止時刻として、任意の $z \in \mathbb{R}, n \geq 0$ 及び $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_m \leq \tau < \tau_{m+1} \leq \tau_n$, ($0 \leq m \leq n$) を満たす任意の停止時 τ に対して、

$$v(z, \xi, n) = \sup_{\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{t_0 \leq \tau_i \leq \tau} e^{-\delta(\tau_i-t_0)} K + e^{-\delta(\tau-t_0)} v(Z_\tau, \xi_\tau, n-m) \middle| Z_{t_0}^- = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right]. \quad (2.1.18)$$

証明.

(i). 式 (2.1.18) の右辺を $\omega(z, \xi, n)$ とおき、任意の戦略 $\alpha = (\xi_s, \tau_i) \in \mathbb{A}_n(\xi)$ に対し、

$$J(z, \xi, n, \alpha) = \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{t_0 \leq \tau_i \leq \tau} e^{-\delta(\tau_i-t_0)} K + \int_{\tau}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{\tau < \tau_i \leq \tau_n} e^{-\delta(\tau_i-t_0)} K \middle| Z_{t_0}^- = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right]. \quad (2.1.19)$$

変数 $\tilde{s} \equiv s - \tau + t_0$ ($\tilde{s} \geq t_0$), $\tilde{i} \equiv i - m$, $\tilde{\xi}_{\tilde{s}} \equiv \xi_s$, $\tilde{\tau}_{\tilde{i}} \equiv \tau_i - \tau + t_0$, を用いて式 (2.1.19) の第 3, 4 項は次のように表現できる。

$$e^{-\delta(\tau-t_0)} \left(\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(\tilde{s}-t_0)} f(Z_{\tilde{s}+\tau-t_0}, \tilde{\xi}_{\tilde{s}}) d\tilde{s} - \sum_{0 < \tilde{i} \leq n-m} e^{-\delta(\tilde{\tau}_{\tilde{i}}-t_0)} K \right) = e^{-\delta(\tau-t_0)} J(Z_\tau, \xi_\tau, n-m, \tilde{\alpha}),$$

ただし $\tilde{\alpha}(\tilde{s}) \equiv \{(\tilde{\xi}_{\tilde{s}}, \tilde{\tau}_{\tilde{i}}) | \tilde{s} > t_0, 0 < \tilde{i} \leq n-m\}$ 。よって、

$$J(z, \xi, n, \alpha) \leq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{t_0 \leq \tau_i \leq \tau} e^{-\delta(\tau_i-t_0)} K + e^{-\delta(\tau-t_0)} v(Z_\tau, \xi_\tau, n-m) \middle| Z_{t_0}^- = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right].$$

戦略 α に関して、戦略集合 $\mathbb{A}_n(\xi)$ 上で両辺の上限をとることにより、不等式 $v(z, \xi, n) \leq \omega(z, \xi, n)$ が成立。一方、逆向き不等式も成立することが次のように示される。

(ii). 任意の戦略 $\alpha = (\xi_s, \tau_i) \in \mathbb{A}_n(\xi)$ を固定し、 $y \equiv Z_\tau(\alpha)$ 、 $\eta \equiv \xi_\tau(\alpha)$ とおく。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、戦略 $\tilde{\alpha}(\tilde{s}) \equiv \{(\tilde{\xi}_{\tilde{s}}, \tilde{\tau}_{\tilde{i}}) | \tilde{s} > t_0, 0 < \tilde{i} \leq n-m\} \in \mathbb{A}_{n-m}(\eta)$ を

$$v(y, \eta, n-m) \leq J(y, \eta, n-m, \tilde{\alpha}) + \varepsilon \quad (2.1.20)$$

とすることができる。別途次のような制御 $\bar{\alpha}(s) \equiv (\bar{\xi}_s, \bar{\tau}_i)$ を考える。ただし、

$$\bar{\xi}_s \equiv \begin{cases} \xi_s, & (t_0 \leq s \leq \tau), \\ \tilde{\xi}_{s-\tau+t_0} = \tilde{\xi}_{\tilde{s}}, & (s > \tau, \text{ i.e. } \tilde{s} > t_0), \end{cases}$$

$$\bar{\tau}_i \equiv \begin{cases} \tau_i, & (1 \leq i \leq m), \\ \tilde{\tau}_{i-m} + \tau - t_0 = \tilde{\tau}_{\tilde{i}} + \tau - t_0, & (m < i \leq n \text{ i.e. } 0 < \tilde{i} \leq n-m). \end{cases}$$

すると、

$$\begin{aligned} v(z, \xi, n) &\geq J(z, \xi, n, \bar{\alpha}) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{t_0 \leq \tau_i \leq \tau} e^{-\delta(\tau_i - t_0)} K + \int_{\tau}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \bar{\xi}_s) ds - \sum_{m < i \leq n} e^{-\delta(\bar{\tau}_i - t_0)} K \right. \\ &\quad \left. \middle| Z_{t_0}^- = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right]. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

式 (2.1.21) の期待値演算子内の第 3, 4 項は次のように変形できる。

$$e^{-\delta(s-t_0)} \left(\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(\bar{s}-t_0)} f(Z_{\bar{s}+\tau-t_0}, \bar{\xi}_{\bar{s}}) d\bar{s} - \sum_{0 < \bar{i} \leq n-m} e^{-\delta(\bar{\tau}_i - t_0)} K \right) = e^{-\delta(\tau-t_0)} J(Z_{\tau}, \xi_{\tau}, n-m, \bar{\alpha})$$

これにより式 (2.1.20) より、

$$v(z, \xi, n) \geq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{t_0 \leq \tau_i \leq \tau} e^{-\delta(\tau_i - t_0)} K + e^{-\delta(\tau-t_0)} \{v(Z_{\tau}, \xi_{\tau}, n-m) - \varepsilon\} \middle| Z_{t_0}^- = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right]. \quad (2.1.22)$$

$\alpha = (\xi_s, \tau_i) \in \mathbb{A}_n(\xi)$ 及び $\varepsilon > 0$ は任意に取れるため、 $v(z, \xi, n) \geq \omega(z, \xi, n)$.

(iii). (i)、(ii) より、 $v(z, \xi, n) = \omega(z, \xi, n)$. □

定理 2.1.1 より、任意の $z \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{I}$ 及び $n(1 \leq n \leq +\infty)$ に対して、任意の停止時 $\tau \geq t_0$ に対して次の不等式 (i)、(ii) がともに成立する。さらに、 $\tau \neq t_0$ か $\tau = t_0$ かに応じて、そのうちどちらかは等式として成立する。 τ_1 を t_0 以降最初の最適スイッチ停止時として、 $m = 0$ とおくことにより以下が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i). 任意の停止時 } \tau \geq t_0 \text{ に対して次の不等式が成立。特に } t_0 < \tau < \tau_1 \text{ のとき等号が成立する。} \\ v(z, \xi, n) \geq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds + e^{-\delta(\tau-t_0)} v(Z_{\tau}, \xi_{\tau}, n) \middle| Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ \text{(ii). 任意の停止時 } \tau \geq t_0 \text{ に対して次の不等式が成立。特に } t_0 = \tau = t_1 \text{ のとき等号が成立する。} \\ v(z, \xi, n) \geq \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\} \end{array} \right. \quad (2.1.23)$$

(ii) の主張はさらに、停止時 τ の最適スイッチ停止時 $\tau_1 \geq t_0$ との関係に依存して、次の (A) と (B) の 2 ケースに場合分けされる。

(A). 停止時 τ が最適スイッチ時のとき ($t_0 = \tau = \tau_1$)、

式 (2.1.18) より、

$$v(z, \xi, n) = \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}. \quad (2.1.24)$$

(B). 停止時 τ が最適スイッチ時でないとき ($t_0 = \tau < \tau_1$)、

$$v(z, \xi, n) > \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}.$$

このとき、次のように最適継続領域と最適スイッチ領域を定義できる。すなわち個々のレジーム $\xi, \hat{\xi} \in \mathbb{I}$ 毎、スイッチ権利数 $n (1 \leq n \leq +\infty)$ 毎に、時刻 t_0 において τ_1 との関係に依存して、

$$\begin{cases} \mathcal{C}_n^\xi \equiv \{z \in \mathbb{R} | v(z, \xi, n) > \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\} \cdots (\tau_1 > t_0), \\ \mathcal{S}_n^\xi \equiv \{z \in \mathbb{R} | v(z, \xi, n) = \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\} \cdots (\tau_1 = t_0). \end{cases} \quad (2.1.25)$$

こうして状態変数 $z \in \mathbb{R}$ の定義域全域は、継続領域 \mathcal{C}_n^ξ とスイッチ領域 \mathcal{S}_n^ξ に分けられる。なお便宜の上、次のような領域を定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}} &\equiv \{z \in \mathbb{R} | v(z, \xi, n) = v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}, & n \geq 1 \\ \mathcal{S}_0^{\xi\hat{\xi}} &\equiv \phi, & n = 0 \\ \mathcal{C}_0^\xi &\equiv \mathbb{R}, & n = 0 \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

各々の集合 $\mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}$ ($\xi \in \mathbb{I}$) は互いに素である。ただし Pham et al. [2009] にあるような $\mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}} \cap \mathcal{S}_n^{\bar{\xi}\hat{\xi}}, \hat{\xi} \neq \bar{\xi}, \hat{\xi}, \bar{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$ 上の孤立点や交差境界点 (crossing boundary intersection points) を除く。こうして上記の例外を除けば、 $\mathcal{S}_n^\xi = \bigoplus_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}, n \geq 0$ が成立する。但し ' \oplus ' は直和演算子 (互いに素な和集合)。このとき、それぞれの $\xi \in \mathbb{I}, n \geq 0$ に対して上記例外を除いて次が成立する。

$$\mathbb{R} = \left(\bigoplus_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}} \right) \oplus \mathcal{C}_n^\xi \quad (2.1.27)$$

時刻 t の現在のレジームを $\xi \in \mathbb{I}$ 、スイッチ権利数を n とするとき、もし $Z_t \in \mathcal{S}_n^\xi$ であるとすると、プロセス Z_t は最適スイッチ領域上において、現レジーム ξ は直ちに別のレジームに遷移されなくてはならない。もしその最適スイッチ先が $\hat{\xi}$ であるとき $Z_t \in \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}$ と表される。また $Z_t \in \mathcal{C}_n^\xi$ であるとき、プロセス Z_t は継続領域にあり、最適戦略は t 時点でレジーム ξ を継続することである。よって $\xi_{\tau_i} = \xi (i \geq 0)$ のとき、 τ_i 以降の最適スイッチ時 τ_{i+1} は形式的に以下のように表現される。

$$\tau_{i+1} = \inf\{s \geq \tau_i | Z_s \in \mathcal{S}_{n-i}^\xi\} \quad (0 \leq i \leq n, n \geq 1) \quad (2.1.28)$$

スイッチ問題の値関数は式 (2.1.25) の下式のような n に関する再帰的表現で表され、スイッチ権利数 n のとき、一回最適スイッチが発生した後は、残された問題はスイッチ権利数 $n-1$ の同様の問題になる。

2.1.2 値関数の性質

この節では、値関数の基本的な性質を明らかにするためのいくつかの補題等を提供する。これらは後の重要な主張を証明するための根幹を形成するものとなっている。以下の値関数の線形成長性、下方有界性に関する補題 2.1.2, 2.1.3 は、値関数の有界性と収束性や、微分方程式の解の一意性を示す際的前提条件として後に用いられる。次の補題は評価関数中の関数 f が z の二次関数であっても値関数は高々 z の線形成長であるというものである。

補題 2.1.2 (値関数の線形成長性: Suzuki [2021], Lemma 2.2).

任意の $z \in \mathbb{R}, n \geq 0$ に対して次の不等式を満たす定数 $D > 0$ が存在する。

$$v(z, \xi, n) \leq D(1 + |z|) \quad (2.1.29)$$

証明. 式 (2.1.16) より、

$$\mathbb{E}_z |Z_s| \leq \{\mathbb{E}_z |Z_s|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{|z|^2 - 1/2} \cdot e^{-\theta(s-t_0)} + 1/\sqrt{2} \leq |z|e^{-\theta(s-t_0)} + 1/\sqrt{2}. \quad (2.1.30)$$

式 (2.1.13) より、

$$f(z, \xi) \leq -\xi\sqrt{\theta}\sigma z \leq \sqrt{\theta}\sigma |z|, \quad (2.1.31)$$

$$\begin{aligned} J(z, \xi, n, \alpha) &= \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{\tau_i > t_0} e^{-\delta(\tau_i - t_0)} |\xi_{\tau_i} - \xi_{\tau_{i-1}}| K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ &\leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} \mathbb{E}_z [\sqrt{\theta}\sigma |Z_s|] ds \quad (\text{式 (2.1.31) より}) \\ &\leq \sqrt{\theta}\sigma \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} \left(|z|e^{-\theta(s-t_0)} + 1/\sqrt{2} \right) ds \quad (\text{式 (2.1.30) より}) \\ &= \sqrt{\theta}\sigma \left(|z|/(\delta + \theta) + 1/(\sqrt{2}\delta) \right) \\ &\leq D(1 + |z|) < \infty \quad (\exists D > 0, \forall z \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{A}_n, 0 \leq \forall n \leq \infty). \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

□

これより $K, \sigma, \theta > 0$ のとき、値関数が z の線形成長であるためには δ は正であればよいことがわかる。また式 (2.1.29) の D は n によらない値を選べる。

補題 2.1.3 (値関数の下方有界性: Suzuki [2021], Lemma 2.3).

任意の $z \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{cases} v(z, \xi, n) \geq 0, & \xi = 0, \\ v(z, \xi, n) \geq -K, & \xi \in \{\pm 1\}. \end{cases}$$

証明. $\xi = 0$ のとき $\tau_1 \rightarrow \infty$ を考えると、 $J(z, \xi, n, \{\xi_t, \tau_i\}) = 0$. $\xi \in \{\pm 1\}$ のとき、 $\tau_1 = t_0, \tau_2 \rightarrow \infty$ のときを考えると、 $J(z, \xi, n, \{\xi_t, \tau_i\}) = -K$. □

次の値関数の単調非減少性に関する補題は、値関数列の収束性を示す際の前提条件として後に用いられる。

補題 2.1.4 (n に関する単調非減少性: Suzuki [2021], Lemma 2.4).

任意の $\xi \in \mathbb{I}$, $n \geq 1$, $z \in \mathbb{R}$ に対して、

$$v(z, \xi, n) \geq v(z, \xi, n-1). \quad (2.1.33)$$

証明. 評価関数中の関数 f が z の二次関数の場合でも 証明は線形の場合 (Suzuki [2016]) と同様。

$$v(z, \xi, n)$$

$$\begin{aligned} &\geq \sup_{\{\tau, \xi\} \in \mathbb{A}_{n-1}} \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^n \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{\tau_i > t_0} e^{-\delta(\tau_i - t_0)} |\xi_{\tau_i} - \xi_{\tau_{i-1}}| K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \\ &= \sup_{\{\tau, \xi\} \in \mathbb{A}_{n-1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi_s) ds - \sum_{\tau_i > t_0} e^{-\delta(\tau_i - t_0)} |\xi_{\tau_i} - \xi_{\tau_{i-1}}| K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \\ &= v(z, \xi, n-1) \end{aligned}$$

□

これまでの結果から値関数の有界性が次の系から得られる。本稿では以降、主に有限の値関数を前提とする解析を行うが、その際の変数の定義域を規定するものとして重要である。

系 2.1.1 (値関数の有界性と収束性: Suzuki [2016], Corollary 3.1).

任意の有限な $z \in \mathbb{R}$ ($|z| < \infty$) に対して以下が成立する。

(i). 任意の整数 $n \leq \infty$ に対して、

$$|v(z, \xi, n)| \leq C_z \quad (2.1.34)$$

を満たす定数 $C_z < \infty$ を z に応じて決めることができる。

(ii). $\lim_{n \rightarrow \infty} v(z, \xi, n)$ が有限値に収束する。

証明. 補題 2.1.2, 補題 2.1.3 より不等式 (2.1.34) が成立。式 (2.1.34) 及び補題 2.1.4 より単調収束定理により題意の収束は示される。 □

本稿の解析の主目的は、最適戦略を求めることであるため、本質的でないパラメータを捨象するため、値関数が対称になるように工夫して問題を設定している。これにより最適化問題としては重要でないパラメータを減らし計算負荷を低減している。値関数の対称性は、直感的には理解できるが、確率過程の対称性と、最適化処理を経由するため、証明はやや煩雑になる。値関数の対称性は、後の最適戦略の対称性につながる。

補題 2.1.5 (値関数の対称性: Suzuki [2021], Lemma 2.5).

任意の $\xi \in \mathbb{I}$ に対して、

$$v(z, \xi, n) = v(-z, -\xi, n), \quad n \geq 0. \quad (2.1.35)$$

証明.

ブラウン運動 $\{W_t\}$ と初期値 $Z_{t_0} = z$ を持つ確率微分方程式 (2.1.3) を $SDE\{z, W\}$ と表現する。

確率過程 $\{Z_t\}$ を $SDE\{z, W\}$ の一意の強解

とすると、これを原点に関して反転させた過程を考え、

確率過程 $\{-Z_t\}$ は $SDE\{-z, -W\}$ の強解

となる。ブラウン運動の原点対称性により、任意の $-z \in \mathbb{R}$ に対して $SDE\{-z, -W\}$ と $SDE\{-z, W\}$ の弱解は一致するため、

$$\text{確率過程 } \{-Z_t\} \text{ は } SDE\{-z, W\} \text{ の弱解} \quad (2.1.36)$$

となる。これは、初期値 $-z$ で確率微分方程式 (2.1.3) に従う過程である。

$f(z, \xi) = f(-z, -\xi)$ より、確率過程 $\{Z_t\}$ ($Z_{t_0}^- = z$) に対して、実行可能戦略集合 (制御空間) $\mathbb{A}_n(\xi)$ に属する任意の戦略を $\alpha : \{\xi_t\} (\xi_{t_0} = \xi)$ とおくと、対応する評価関数 (2.1.15): $J(z, \xi, n; \alpha)$ は、それぞれ反転させて、確率過程を $\{-Z_t\}$ ($Z_{t_0}^- = -z$)、戦略を $-(\alpha) : \{-\xi_t\} (\xi_{t_0} = -\xi)$ ($\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)$) とする場合と等しくなるが、関係 (2.1.36) より、その新しい評価関数中の $\{-Z_t\}$ は $SDE\{-z, W\}$ の弱解すなわち、初期値 $-z$ で確率微

分方程式 (2.1.3) に従う過程と置換えても期待値は不変となり、このときの評価関数は $J(-z, -\xi, n, -(\alpha))$ に一致する。まとめると、任意の $\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)$ について、

$$\begin{aligned} \text{確率過程} : \{Z_t\} (Z_{t_0}^- = z), & \quad \text{戦略} : \alpha : \{\xi_t\} (\xi_{t_0} = \xi) & \rightarrow J(z, \xi, n, \alpha), \\ \text{確率過程} : \{-Z_t\} (Z_{t_0}^- = -z), & \quad \text{戦略} : -(\alpha) : \{-\xi_t\} (\xi_{t_0} = -\xi) & \rightarrow J(-z, -\xi, n, -(\alpha)), \end{aligned}$$

となり、

$$J(z, \xi, n, \alpha) = J(-z, -\xi, n, -(\alpha)), \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}_n(\xi) \quad (2.1.37)$$

が成立する。また、実行可能戦略集合 $\mathbb{A}_n(\xi)$ の任意の要素戦略 α を原点に関して反転させた戦略 $-(\alpha)$ による集合は $\mathbb{A}_n(-\xi)$ に一致する、すなわち、

$$\{-(\alpha) | \alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)\} = \{(-\alpha) | (-\alpha) \in \mathbb{A}_n(-\xi)\} \quad (2.1.38)$$

であるため、式 (2.1.37) の両辺の上限 $\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)$ をとると、式 (2.1.38) より、

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)} J(z, \xi, n, \alpha) = \sup_{\alpha \in \mathbb{A}_n(\xi)} J(-z, -\xi, n, -(\alpha)) = \sup_{-\alpha \in \mathbb{A}_n(-\xi)} J(-z, -\xi, n, -\alpha). \quad (2.1.39)$$

よって定義式 (2.1.11) により、式 (2.1.35) が成立する。 \square

2.1.3 試験関数

ここで粘性解アプローチを拡張するために粘性解の試験関数の理論の再構築を行う。

定義 2.1.1 (試験関数).

集合 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ に対して \mathcal{O} の適当な開近傍 $\tilde{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}$ をとるとき、 $\tilde{\mathcal{O}}$ 上で定義される任意の関数 $v : x \mapsto \mathbb{R}$ に対して、滑らかな関数 $\varphi \in C^2(\tilde{\mathcal{O}})$ で $v(x) - \varphi(x)$ を $\tilde{\mathcal{O}}$ 内 $\bar{x} \in \mathcal{O}$ で最小化し、 $v(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$ とする関数が存在するとき、つまり、

$$\min_{x \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}} \{v(x) - \varphi(x)\} = v(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}) = 0$$

であるとき、関数 φ を、 \bar{x} で最小化される、関数 v に対する優試験関数と呼び、

$$\{\varphi \in C^2(\tilde{\mathcal{O}}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \sim v \text{ on } \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$$

と記す。或は短縮形として、以下のように記す。

$$\{\varphi, \bar{x}\} \sim v$$

反対に、滑らかな関数 $\varphi \in C^2(\tilde{\mathcal{O}})$ で $v(x) - \varphi(x)$ を $\tilde{\mathcal{O}}$ 内 $\bar{x} \in \mathcal{O}$ で最大化し、 $v(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$ とする関数が存在するとき、つまり、

$$\max_{x \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}} \{v(x) - \varphi(x)\} = v(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}) = 0$$

であるとき、関数 φ を、 \bar{x} で最大化される、関数 v に対する劣試験関数と呼び、

$$\{\varphi \in C^2(\tilde{\mathcal{O}}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \frown v \text{ on } \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$$

と記す。或は短縮形として、以下のように記す。

$$\{\varphi, \bar{x}\} \frown v$$

なお \mathcal{O} が開集合のとき、 $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ にとれるため、以降主に \mathcal{O} が開集合のときを示す。

直接計算により以下のような優試験関数の性質が示される。劣試験関数も同様に示すことができる。

補題 2.1.6 (優試験関数の性質: Suzuki [2021], Lemma 2.6).

開集合 \mathcal{O} 上の局所有界関数 V, V_i と優試験関数 $\varphi, \varphi_i \in C^2(\mathcal{O})$ と定数 $k_0 \in \mathbb{R}, \lambda, \lambda_i > 0, i = 1, 2$ について以下が成立する。

$$\{\varphi, \bar{x}\} \frown V \iff \{\varphi - V, \bar{x}\} \frown 0 \implies \varphi - V \leq 0, \quad (2.1.40)$$

$$\{\varphi, \bar{x}\} \frown V \iff \{\varphi + k_0, \bar{x}\} \frown V + k_0, \quad (2.1.41)$$

$$\{\varphi, \bar{x}\} \frown V \iff \{\lambda\varphi, \bar{x}\} \frown \lambda V, \quad (2.1.41)$$

$$\{\varphi_i, \bar{x}\} \frown V_i, i = 1, 2 \implies \{\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2, \bar{x}\} \frown \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2. \quad (2.1.42)$$

$V \in C^2$ のとき、 \bar{x} での停留条件を考えると、

$$\{\varphi, \bar{x}\} \frown V \iff \begin{cases} V(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}) = 0 & (0 \text{ 階条件}) \\ V'(\bar{x}) - \varphi'(\bar{x}) = 0 & (1 \text{ 階条件}) \\ V''(\bar{x}) - \varphi''(\bar{x}) \geq 0 & (2 \text{ 階条件}) \end{cases}. \quad (2.1.43)$$

式 (2.1.42) の逆命題が補題 2.1.9 で提供される。

補題 2.1.7 (試験関数のアフィン変換: Suzuki [2021], Lemma 2.7).

W を \mathcal{O} 上の従属変数 ($W : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}$) とし、 W の任意のアフィン変換 $l : W \mapsto aW + b, a > 0$ を考える。ただし係数 a は定数、 b は独立変数 $x \in \mathcal{O}$ を持つ任意関数とする。すると \mathcal{O} 上の任意の局所有界関数 V に対して、

$$\{\varphi, \bar{x}\} \frown V \iff \{l(\varphi), \bar{x}\} \frown l(V) \text{ on } \mathcal{O}, \quad (2.1.44)$$

$$\{\varphi, \bar{x}\} \frown V \iff \{l(\varphi), \bar{x}\} \frown l(V) \text{ on } \mathcal{O}. \quad (2.1.45)$$

証明. 補題 2.1.6 より、式 (2.1.44) に関しては、

$$\begin{aligned} \{\varphi, \bar{x}\} \frown V &\iff \{\varphi - V, \bar{x}\} \frown 0 \iff \{a(\varphi - V), \bar{x}\} \frown 0 \quad (a > 0) \\ &\iff \{a((\varphi + b/a) - (V + b/a)), \bar{x}\} \frown 0 \\ &\iff \{a\varphi + b, \bar{x}\} \frown aV + b. \end{aligned}$$

式 (2.1.45) も同様。 □

定義 2.1.2 (退化楕円型、単調、proper).

関数 $F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}$, を用いて、時間斉次 (*time-homogeneous*) な二階偏微分方程式: $F(x, w(x), Dw(x), D^2w(x)) = 0, x \in \mathcal{O}$ を考えるとき、次が成立するとき関数 F は退化楕円型 (*degenerate elliptic*) であるという。

$$\forall x \in \mathcal{O}, r \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^1, M, \hat{M} \in \mathbb{R}^1, M \leq \hat{M} \implies F(x, r, p, M) \geq F(x, r, p, \hat{M}) \quad (2.1.46)$$

これは、 $M < \hat{M} \implies F(x, r, p, M) = F(x, r, p, \hat{M})$ も許容するという意味である。また、

$$\forall x \in \mathcal{O}, r, s \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^1, M \in \mathbb{R}^1, r \leq s \implies F(x, r, p, M) \leq F(x, s, p, M) \quad (2.1.47)$$

のとき関数 F は単調であるという。上記 2 条件を満たす関数 F の条件は Crandall et al. [1992] で *proper* と呼ばれている。

連続関数 $F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}$ を用いて、proper な時間斉次一変数二階微分方程式 $F(x, w(x), Dw(x), D^2w(x)) = 0, x \in \mathcal{O}$ を考える。‘ F ’ に関して、混乱なき限り独立変数 x を含む微分形式 $F(x, w(x), Dw(x), D^2w(x))$ は x の関数と見做して領域 \mathcal{O} を定義域とするが、関数 $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 自体の定義域は $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ である。

粘性解を定義する前に表記法を導入する。

表記 2.1.1 (粘性解、粘性優解、粘性劣解).

\mathcal{O} 上の偏微分方程式 $F = 0$ の粘性解、粘性優解、粘性劣解の集合をそれぞれ以下のように表記する:

$$\left[F = 0 \right], \left[F = 0 \right], \left[F = 0 \right] \text{ on } \mathcal{O}$$

上記表記法を用いて、(不連続)粘性優解、粘性劣解は次の表現で定義される。

定義 2.1.3 (粘性優解、粘性劣解).

定義 2.1.2 による proper 関数 F に対し、局所有界関数 $V : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}$ は \mathcal{O} 上で次のようにそれぞれ $F = 0$ の粘性優解、粘性劣解と定義付けられる。

$$\begin{aligned} V &\in \left[F(x, W(x), DW(x), D^2W(x)) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{O} \\ \Leftrightarrow^{def} &\forall \{\varphi \in C^2(\tilde{\mathcal{O}}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \cup V, F(\bar{x}, V_*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \geq 0, \\ V &\in \left[F(x, W(x), DW(x), D^2W(x)) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{O} \\ \Leftrightarrow^{def} &\forall \{\varphi \in C^2(\tilde{\mathcal{O}}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \cap V, F(\bar{x}, V^*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \leq 0, \end{aligned}$$

ただし $V^*(V_*)$ は関数 V のそれぞれ上 (下) 半連続 (upper-semicontinuous (lower-semicontinuous) 或は u.s.c. (l.s.c.)) 包絡関数である (定義 2.1.4, 2.1.5 参照)。さらに任意の方程式 ‘ \cdot ’ に対して、

$$\left[\cdot \right] = \left[\cdot \right] \cap \left[\cdot \right]. \quad (2.1.48)$$

定義 2.1.4 (半連続包絡線).

関数 $w : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}$ の上 (下) 半連続包絡線 $w^*(w_*)$ とは、

$$\begin{cases} w^*(x) \equiv \limsup_{y \rightarrow x} w(y), \\ w_*(x) \equiv \liminf_{y \rightarrow x} w(y). \end{cases} \quad (2.1.49)$$

定義 2.1.5 (半連続関数集合).

上 (下) 半連続 (或は u.s.c. (l.s.c.)) 関数 $w : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ の集合を次のように定義する。

$$\begin{cases} USC(\mathcal{O}) \equiv \{w | w(x) \geq w^*(x), \quad \forall x \in \mathcal{O}\}, \\ LSC(\mathcal{O}) \equiv \{w | w(x) \leq w_*(x), \quad \forall x \in \mathcal{O}\} \end{cases} \quad (2.1.50)$$

実際には本稿では連続粘性解しか取り扱わない。特に v は定理 2.1.6 で連続関数であることが示される。また F が微分形式でない通常方程式 (0 階微分方程式) の場合、定義 2.1.3 より試験関数とは無関係となり、その古典 (優、劣) 解が同様の表記となる。つまりその場合、 $\left[F = 0 \right] (\left[F = 0 \right], \left[F = 0 \right])$ は $F = 0 (F \geq 0, F \leq 0)$ を満たす古典解集合をそれぞれ表す。

補題 2.1.8 (古典解と粘性解).

古典解は粘性解である。

証明. 開集合 $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ 上で古典解 $V \in C^2(\tilde{\mathcal{O}})$ が $x \in \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}$ 上において、proper な関数 F を用いて偏微分方程式 $F(x, V_*(x), DV(x), D^2V(x)) = 0$ を満たしている場合、 $\{\varphi \in C^2(\tilde{\mathcal{O}}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \cup V$ を満たす V の任意の優試験関数 φ はその定義より、 $\min_{x \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}} \{V(x) - \varphi(x)\} = V(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}) = 0$ を満たしているが、極小値の停留条件式 (2.1.43) より、 $x = \bar{x}$ にて $V'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x}), V''(\bar{x}) \geq \varphi''(\bar{x})$ であるため、properness 条件定義 2.1.2 より、

$$F(\bar{x}, V_*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, V_*(\bar{x}), DV(\bar{x}), D^2V(\bar{x})) = 0$$

これより、

$$V \in \left[F(x, W(x), DW(x), D^2W(x)) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{O}$$

極大値に関する粘性劣解も同様。よって古典解 V は同微分方程式に関する粘性解である。 \square

2.1.4 粘性優解の線形結合

粘性解を用いる一つの理由は、比較原理による解の一意性を利用できることである。定理 2.1.5 の比較原理では、特定の微分方程式 (2.1.68) に対しその粘性優解が粘性劣解以上になることを示さなくてはならない。ただ、

$$m_\xi^0 \equiv \sup_{z \in \mathbb{R}} \{U_\xi(z) - V_\xi(z)\} \leq 0$$

を直接示すことが難しいため、 V_ξ に摂動項 $\psi(z) > 0$ on \mathbb{R} , $\psi(z) \in C^2$ を加えた摂動関数

$$V_\xi^\lambda(z) \equiv V_\xi(z) + \lambda\psi(z), \quad \lambda > 0 \quad (2.1.51)$$

を用いてより易しい問題を考え、その対偶

$$m_\xi^\lambda \equiv \sup_{z \in \mathbb{R}} \{U_\xi(z) - V_\xi^\lambda(z)\} > 0, \quad \exists \lambda > 0 \quad (2.1.52)$$

を前提条件として仮定し、その矛盾を示すことにより、最終的に次を示すことにする。

$$m_\xi^\lambda \leq 0, \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.1.53)$$

ただし、この関数 m_ξ^λ は摂動化されているため、最終的に元の関数に戻すときにこの摂動関数 (2.1.51) の λ に関する連続性より次を導く。

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} m_\xi^\lambda = m_\xi^{+0} = m_\xi^0 \leq 0$$

この手法を用いる場合、摂動化された関数 $V_\xi^\lambda(z)$ が大まかな性質としては摂動化前の関数 $V_\xi(z)$ とほぼ同様の性質を持ち、なおかつ非同次項のみ望ましい性質を持たせられるように工夫できるのが望ましい。

本稿の問題の場合では、摂動化することにより元と同じ変分不等式の strict な粘性優解になっていればよい。これを実現するための一つの方法は、式 (2.1.51) の摂動関数を元の関数と摂動項の線形結合とみなし、線形結合により粘性優解性が伝搬するような仕組みを作ることである。目標は、同次部分を共有する 2 個の線型

微分方程式のそれぞれの粘性優解どうしの正值線形結合が、元の線形微分方程式どうしを同じ正值線形結合で合成した微分方程式の粘性優解になるような仕組みを作ることである。

式 (2.1.42) にその手掛かりがある。この式が示すのは、

命題 (P): 『関数 V_1, V_2 に対する優試験関数 φ_1, φ_2 の任意の正值線形結合 $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ は、両関数による線形結合 $\lambda_1V_1 + \lambda_2V_2$ に対する優試験関数である。』

というものである。試験関数を合成する方の命題 (P) は易しいが、逆に分解する方の命題を成立させるのは難易度が高い。それは次の命題 (P') である。粘性優解候補となる関数に対する特定の点における優試験関数は一般に無数に存在するが、粘性優解であることを証明するためには、それら全ての優試験関数に対して一定の条件を満たすことを示さなくてはならないことに注意する。

命題 (P'): 『関数 V_1, V_2 の正值線形結合 $\lambda_1V_1 + \lambda_2V_2$ に対する任意の優試験関数 $\hat{\varphi}$ を、それぞれの関数 V_1, V_2 に対する適当な優試験関数 φ_1, φ_2 の正值線形結合 $\hat{\varphi} = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ に分解できる。』

この命題 (P') は無条件では成立しない。問題はこれを成立させるための前提条件を探すことである。これは補題 2.1.9 で取り扱われる。これらが整備されれば上記命題 (P), (P') の組合せにより、線形微分方程式であれば与えられた線形結合に対して

$$\{\varphi_i, \} \sim V_i, F_i \geq 0 \ (i = 1, 2) \implies \{\hat{\varphi}, \} \sim V^\lambda \equiv \lambda_1V_1 + \lambda_2V_2, F^\lambda \geq 0$$

がいえ。注意点としては、 \implies の右辺を満たすには、与えられた λ_1, λ_2 に対して、(P) で与えられた特定の φ_1, φ_2 に対する $\hat{\varphi} = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ のみが V^λ の優試験関数になるだけではだめで、任意の $\hat{\varphi}$ がそうならなくてはならない。これにより『2 個の微分方程式 $F_i = 0$ の粘性優解 V_i の正值線形結合 V^λ を、正值線形結合された微分方程式 $F^\lambda = 0$ の粘性優解』とすることができ、斉次部分を共有するような微分方程式を考え、 V_i の一方を摂動項として適切なものを選択することにより、適切な摂動関数 V^λ を構成し易くなる。

より具体的には、任意の線形同次微分形式 F に対して本稿で示したいのは、粘性優解どうしの正係数線形結合に関する次のような基本的な性質である。

任意のパラメータ $\lambda_i > 0, \ i = 1, 2$, に対して、適当な非同次項 c, c_1, c_2 が存在して、

$$V_i \in \left[F = c_i \right], i = 1, 2 \implies \lambda_1V_1 + \lambda_2V_2 \in \left[F = c \right]. \quad (2.1.54)$$

条件 (2.1.54) の十分条件としては、 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ による正值線形結合が与えられたとき、

$$\{\hat{\varphi} \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \sim V^\lambda \equiv \lambda_1V_1 + \lambda_2V_2$$

を満たす任意の試験関数 $\hat{\varphi}$ に対して、次のような 2 個の試験関数

$$\{\varphi_i \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x}\} \sim V_i, i = 1, 2, \text{ s.t., } \hat{\varphi} = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$$

を見つけ出せることであるが、次の反例が示すように、これは無条件では見つからない場合もある。

例 2.1.1 (任意の試験関数の正值線形結合分解: Suzuki [2021], Example 2.1).

従属変数を $V_1 \equiv 2|x|, V_2 \equiv -|x|, \bar{x} = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ とおくと、 $V^\lambda = \lambda_1V_1 + \lambda_2V_2 = |x|, \mathcal{O} \equiv \mathbb{R}$ であるが、このとき、 V^λ に対する優試験関数 $\{\hat{\varphi} \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \sim V^\lambda$ は存在するものの、 V_2 に対する優試験関数 $\{\varphi_2 \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x} \in \mathcal{O}\} \sim V_2$ は存在しない。そのため、 $\hat{\varphi}$ は上記による思惑通りには分解できない。

このため、本稿の目指す命題の前提条件に、以下のような制約を加える。この命題は式 (2.1.42) の逆命題に相当する。

補題 2.1.9 (試験関数の正係数による線型分解: Suzuki [2021], Lemma 2.8).

\mathcal{O} 上で定義された従属変数 V_1, V_2 、及びそれらの正值線形結合 $V^\lambda \equiv \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ に対し、もしも $V_1 \in C^2(\mathcal{O})$ または $V_2 \in C^2(\mathcal{O})$ が成り立ち、また $\bar{x} \in \mathcal{O}$ のとき、両従属変数の正值線形結合に対する任意の優試験関数は、それぞれの従属変数の優試験関数の同じ正值線形結合に分解できる。すなわち、

$$\begin{aligned} \forall \hat{\varphi} \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x} \} \cup V^\lambda \equiv \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, \exists \varphi_i \in C^2(\mathcal{O}), i = 1, 2, s.t. \\ \hat{\varphi} = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2, \{\varphi_i, \bar{x}\} \cup V_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1.55)$$

証明. $V_2 \in C^2(\mathcal{O})$ のときを考えるが、 $V_1 \in C^2(\mathcal{O})$ でも同様。 V^λ の任意の試験関数 $\{\hat{\varphi} \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x}\} \cup V^\lambda$ に対し、

$$\begin{cases} \varphi_1 & \equiv V_1 + (\hat{\varphi} - V^\lambda)/\lambda_1 = (\hat{\varphi} - \lambda_2 V_2)/\lambda_1 \in C^2(\mathcal{O}), \\ \varphi_2 & \equiv V_2 \in C^2(\mathcal{O}) \end{cases}$$

とおくと、

$$\begin{cases} \hat{\varphi} = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2, \\ \{\varphi_2, \bar{x}\} \cup \varphi_2 = V_2 \end{cases} \quad (2.1.56)$$

が成立する。また $\{\hat{\varphi}, \bar{x}\} \cup V^\lambda$ 及び、式 (2.1.40), (2.1.41) より、

$$\begin{cases} \varphi_1 - V_1 & = (\hat{\varphi} - V^\lambda)/\lambda_1 \leq 0, \\ \varphi_1(\bar{x}) - V_1(\bar{x}) & = (\hat{\varphi}(\bar{x}) - V^\lambda(\bar{x}))/\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

また、 $\varphi_1 \leq V_1$, $\varphi_1(\bar{x}) = V_1(\bar{x})$, $\varphi_1 \in C^2(\mathcal{O})$ より、

$$\{\varphi_1, \bar{x}\} \cup V_1 \quad (2.1.57)$$

が成立する。式 (2.1.57), (2.1.56) より式 (2.1.55) は満たされた。 \square

式 (2.1.55) を成立させるためには、 $V_i, i = 1, 2$ のうちのどちらかは $V_i \notin C^2(\mathcal{O})$ でよい。次に示すのは別の例である。例 2.1.1 では $V_2 \equiv -|x|$ は優試験関数を $x = 0$ で持たなかった。しかしもし $V_1 \in C^2(\mathcal{O})$ のとき、条件式 (2.1.55) を次のようにして実現できる。

例 2.1.2 (どちらかの値関数が滑らかでない場合).

$V_1 \equiv x^2, V_2 \equiv -|x|, \bar{x} = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \mathcal{O} \equiv \mathbb{R}$ とそれぞれおく。この場合、式 (2.1.55) が満たされる。なぜなら命題 (2.1.55) の前提が成立しないからである。つまり、 $\{\hat{\varphi} \in C^2(\mathcal{O}), 0\} \cup V^\lambda = x^2 - |x|$ を満たす試験関数 $\hat{\varphi}$ が存在しないからである。これは任意の $V_1 \in C^2$ に対して同様に成立する。

後に定理 2.1.3、及び 2.1.6 節の冒頭で使われる定理をここで示す。

定理 2.1.2 (粘性優解どうしの正值線型結合: Suzuki [2021], Theorem 2.1).

任意の二階線形同次微分形式 $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ および任意の下半連続 (*l.s.c.*) 関数 $\phi_i(x) \in LSC(\mathcal{O})$ (非同次項として \mathcal{O} 上で定義された x の関数) に対して、もし $i = 1$ または 2 に対して $V_i \in C^2(\mathcal{O})$ のとき、 $\forall \lambda_i > 0, i = 1, 2$, に対して以下が成立する。すなわち、同次部分 F を共有する 2 個の二階線形微分方程式 $F + \phi_i = 0$ の粘性

優解 V_i どちらの任意の正值線形結合 $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$ は、同じ同次部分 F を共有し、非同次部分 ϕ^λ をそれぞれの微分法方程式の非同次部分 ϕ_i , $i = 1, 2$ の同様の正值線形結合 $\phi^\lambda = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$ とする非同次微分方程式 $F + \phi^\lambda = 0$ の粘性優解になる。すなわち、

$$V_i \in \left[F + \phi_i(x) = 0 \right], i = 1, 2 \implies V^\lambda \equiv \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \in \left[F + \phi^\lambda(x) = 0 \right],$$

ただし $\phi^\lambda(x) \equiv \lambda_1 \phi_1(x) + \lambda_2 \phi_2(x)$.

証明. 前提、 $V_i \in \left[F + \phi_i(x) = 0 \right], i = 1, 2$ が成り立つとき、補題 2.1.9 より任意の $\lambda_i > 0$ に対して、

$$\forall \{\hat{\varphi} \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x}\} \sim V^\lambda, \exists \varphi_i \in C^2(\mathcal{O}), i = 1, 2, \hat{\varphi} = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2, \{\varphi_i, \bar{x}\} \sim V_i, i = 1, 2, \quad (2.1.58)$$

またその φ_i を用いて、前提が成立するとき、

$$F(\bar{x}, V_i(\bar{x}), D\varphi_i(\bar{x}), D^2\varphi_i(\bar{x})) + \phi_i(\bar{x}) \geq 0, i = 1, 2.$$

F が斉次線形であるため、 λ_1, λ_2 を係数とする上記 2 不等式 $i = 1, 2$ の正值線形結合を考え、

$$\{\hat{\varphi} \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x}\} \sim V^\lambda, F(\bar{x}, V^\lambda(\bar{x}), D\hat{\varphi}(\bar{x}), D^2\hat{\varphi}(\bar{x})) + \phi^\lambda(\bar{x}) \geq 0.$$

□

補題 2.1.10 (粘性解と変分不等式: Suzuki [2021], Lemma 2.9).

$F = 0$ を開集合 \mathcal{O} 上の二階偏微分方程式、 $G = 0$ を 0 階微分方程式とするととき、

$$\left[\min\{F, G\} = 0 \right] = \left[F = 0 \right] \cap \left[G = 0 \right], \quad (2.1.59)$$

$$\left[\min\{F, G\} = 0 \right] \supset \left[F = 0 \right], \quad (2.1.60)$$

$$\left[\min\{F, G\} = 0 \right] \supset \left[G = 0 \right]. \quad (2.1.61)$$

よって、

$$\left[\min\{F, G\} = 0 \right] \supset \left[F = 0 \right] \cap \left[G = 0 \right], \quad (2.1.62)$$

$$\left[\min\{F, G\} = 0 \right] \supset \left[F = 0 \right] \cap \left[G = 0 \right]. \quad (2.1.63)$$

証明. $V \in \left[F = 0 \right] \cap \left[G = 0 \right]$ は次と同値である。

$$\forall \{\varphi \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x}\} \sim V, F(\bar{x}, V(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \geq 0 \wedge G(V(\bar{x})) \geq 0 \quad (2.1.64)$$

$F \geq 0 \wedge G \geq 0 \Leftrightarrow \min\{F, G\} \geq 0$ より、式 (2.1.64) は次式と同値である。

$$\forall \{\varphi \in C^2(\mathcal{O}), \bar{x}\} \sim V, \min\{F(\bar{x}, V(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})), G(V(\bar{x}))\} \geq 0$$

よって式 (2.1.59) が成立する (実際、 G が微分形式でも成立する)。関係式 $\forall\{\varphi \in C^2, \bar{x}\} \cap V, F(\bar{x}, V(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \leq 0$ が成立するとき、 $\forall\{\varphi \in C^2, \bar{x}\} \cap V, \min\{F, G\} \leq 0$ は G に関わらず成立する。よって $V \in \left[\min\{F, G\} = 0 \right]$ であり、式 (2.1.60) は証明された。同様に、 $G \leq 0$ が古典的に成立するとき、 $\min\{F, G\} \leq 0$ が F に関わらず成立するため式 (2.1.61) も成立する。式 (2.1.62) 及び (2.1.63) は以上より満たされた。 \square

この補題によって、本稿の目標の一つである、評価関数が二次関数の場合の比較原理の証明に用いるための、摂動に関する定理を示すための準備が整った。

定理 2.1.3 (変分不等式の正值線型結合: Suzuki [2021], Theorem 2.2).

従属変数 V の型を $\mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}$ とし、 $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 、 $G(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ をそれぞれ 2 次、0 次の齊次線型微分形式 (つまり $G = V$) とする。 $i = 1, 2$ に対して $\phi_i, \psi_i \in LSC(\mathcal{O})$ を以下の微分方程式の非同次項とする。 $i = 1, 2$ のいずれかについて $V_i \in C^2(\mathcal{O})$ であれば、以下が成立する。

$$V_i \in \left[\min\{F + \phi_i, G + \psi_i\} = 0 \right], i = 1, 2 \implies V^\lambda \in \left[\min\{F + \phi^\lambda, G + \psi^\lambda\} = 0 \right], \quad (2.1.65)$$

ただし $V^\lambda \equiv \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$, $\phi^\lambda \equiv \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$, $\psi^\lambda \equiv \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

証明. 式 (2.1.59) より $V_i \in \left[F + \phi_i = 0 \right]$, 及び $V_i \in \left[G + \psi_i = 0 \right]$, $i = 1, 2$.

V_i , $i = 1, 2$ のうちいずれかが $C^2(\mathcal{O})$ に属するとき、定理 2.1.2 より、 $V^\lambda \in \left[F + \phi^\lambda = 0 \right]$, $V^\lambda \in \left[G + \psi^\lambda = 0 \right]$ が成立する。 $G + \psi^\lambda$ は 0 階で、式 (2.1.59) より、

$$V^\lambda \in \left[F + \phi^\lambda = 0 \right] \cap \left[G + \psi^\lambda = 0 \right] = \left[\min\{F + \phi^\lambda, G + \psi^\lambda\} = 0 \right].$$

\square

2.1.5 値関数と HJB-変分不等式

粘性解を規定するのは通常、微分方程式であるが、ここで取り扱うのは微分形式を含む変分不等式で規定される粘性解である。定義 2.1.3 によると、粘性解を規定する方程式を構成する関数は proper 条件を満たさなくてはならない。まずは本稿で取り扱う、微分形式を含む変分不等式を構成する関数がこの proper 条件を満たすことを以下の補題で確認する。

補題 2.1.11 (Proper 関数の min 演算子による properness).

Proper 関数 (定義 2.1.2) F_1, F_2 に対し $F = \min\{F_1, F_2\} \in \mathbb{R}$ は proper 関数である。

証明. F の単調性、退化楕円性を示す。まず任意のスカラー $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) に対して、

$$r_i \leq s_i \ (i = 1, 2) \implies r \equiv \min\{r_1, r_2\} \leq s \equiv \min\{s_1, s_2\} \quad (2.1.66)$$

は自明である。よって、 $r_i = F_i(R), s_i = F_i(S)$ によると、 $r = F(R), s = F(S)$ (或は、 $r_i = F_i(S), s_i = F_i(R)$ によると、 $r = F(S), s = F(R)$) などにより、スカラー或は対称行列 R, S いずれの場合でも、式 (2.1.46) の

$M \leq \hat{M}$ 、あるいは式 (2.1.47) の $r \leq s$ などの前提の不等式を念頭に置いて、任意の $R \leq S$ に対して、

$$F_i(R) \leq F_i(S) (i = 1, 2) \Rightarrow F(R) \leq F(S).$$

すなわち、 \min 演算子を用いた合成関数の大小関係はそれを構成する個々の関数の大小関係を変えない。□

次に本稿の問題に戻り、確率過程 Z の無限小生成作用素 (infinitesimal generator) を

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\theta}{2} \frac{d^2}{dz^2} - \theta z \frac{d}{dz} \quad (2.1.67)$$

とおく。

定理 2.1.4 (HJB-変分不等式の粘性解: Suzuki [2021], Theorem 2.3).

任意の $n \geq 1$, $\xi \in \mathbb{I}$ に対して、

$$v(z, \xi, n) \in \left[\min \left\{ \delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi), V - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\} \right\} = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R} \quad (2.1.68)$$

ただし、 $v(z, \xi, 0)$ は式 (2.1.17) で与えられる。

証明. まず補題 2.1.11 より、式 (2.1.68) 中の変分不等式の左辺は粘性解理論の観点からは *properness* 条件を満たしている。

(i). 粘性優解性:

$\bar{z} \in \mathbb{R}$ に対し、 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ を以下を満たす優試験関数とする。

$$0 = v(\bar{z}, \xi, n) - \varphi(\bar{z}) = \min_{z \in \mathbb{R}} \{v(z, \xi, n) - \varphi(z)\}$$

式 (2.1.23) より次の式 (2.1.69) が成立する。特に式 (2.1.23)(i) より $t_0 < t_0 + h < \tau_1$ を満たす任意の $h > 0$ 、任意の $\xi \in \mathbb{I}$ 、任意の整数 $n \geq 1$ に対して次の第一式が成立する。 $Z_{t_0} = \bar{z}$ とおくと、

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\bar{z}, \xi, n) \geq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t_0+h} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi) ds + e^{-\delta h} v(Z_{t_0+h}, \xi, n) \mid Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \\ \quad \dots (\bar{z} \in \mathcal{C}_n^\xi \text{ のとき等号}), \\ v(\bar{z}, \xi, n) \geq \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(\bar{z}, \hat{\xi}, n-1) - K\} \dots (\bar{z} \in \mathcal{S}_n^\xi \text{ のとき等号}), \end{array} \right. \quad (2.1.69)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{z}) &= v(\bar{z}, \xi, n) \geq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t_0+h} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi) ds + e^{-\delta h} \varphi(Z_{t_0+h}) \mid Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right], \\ 0 &\geq \mathbb{E} \left[\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} e^{-\delta(s-t_0)} \{-\delta \varphi(Z_s) + \mathcal{L} \varphi(Z_s) + f(Z_s, \xi)\} ds \mid Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right]. \end{aligned}$$

ここで $h \rightarrow +0$ とすると $Z_s \rightarrow Z_{t_0} = \bar{z}$ となり平均値の定理より、

$$\delta v(\bar{z}, \xi, n) - \mathcal{L} \varphi(\bar{z}) - f(\bar{z}, \xi) \geq 0. \quad (2.1.70)$$

式 (2.1.70), (2.1.69) の最後の式、及び式 (2.1.59) より、式 (2.1.68) の性質のうちの粘性優解性が示された。

(ii). 粘性劣解性

$\bar{z} \in \mathbb{R}$ とし、 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ を次の条件を満たす劣試験関数とする。

$$0 = v(\bar{z}, \xi, n) - \varphi(\bar{z}) = \max_{z \in \mathbb{R}} \{v(z, \xi, n) - \varphi(z)\} \quad (2.1.71)$$

背理法を用いるため、式 (2.1.71) を満たす $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ および $\bar{z} \in \mathbb{R}$ で以下の条件を満たすものが存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \delta v(\bar{z}, \xi, n) - \mathcal{L}\varphi(\bar{z}) - f(\bar{z}, \xi) > 0, \\ v(\bar{z}, \xi, n) - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(\bar{z}, \hat{\xi}, n-1) - K\} > 0. \end{cases} \quad (2.1.72)$$

式 (2.1.72) が正しいとき、 $Z_{t_0} = \bar{z}$ とすると、任意の $s(t_0 \leq \forall s \leq \theta)$ に対して以下の条件を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する。

$$\begin{cases} \delta v(Z_s, \xi, n) - \mathcal{L}\varphi Z_s - f(Z_s, \xi) \geq \varepsilon, \\ v(Z_s, \xi, n) - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(Z_s, \hat{\xi}, n-1) - K\} \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.1.73)$$

ただし $\theta \equiv \inf\{s \geq t_0 | Z_s \notin B(\bar{z}, \varepsilon)\}$,
 $B(\bar{z}, \varepsilon) \equiv \{y \in \mathbb{R} | |y - \bar{z}| < \varepsilon\}$.

τ を t_0 以降の次の最適スイッチ時とすると、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} v(\bar{z}, \xi, n) &= \varphi(\bar{z}) = \mathbb{E} \left[e^{-\delta((\tau \wedge \theta) - t_0)} \varphi(Z_{\tau \wedge \theta}) - \int_{t_0}^{\tau \wedge \theta} e^{-\delta(s-t_0)} \{-\delta\varphi(Z_s) + \mathcal{L}\varphi(Z_s)\} ds \middle| Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[e^{-\delta((\tau \wedge \theta) - t_0)} v(Z_{\tau \wedge \theta}, \xi, n) - \int_{t_0}^{\tau \wedge \theta} e^{-\delta(s-t_0)} \{-\delta v(Z_s, \xi, n) + \mathcal{L}\varphi(Z_s)\} ds \middle| Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \end{aligned}$$

(式 (2.1.73) および式 (2.1.18) を用いると)

$$\begin{aligned} &\geq \mathbb{E} \left[e^{-\delta((\tau \wedge \theta) - t_0)} \left(\left(\max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(Z_{\tau \wedge \theta}, \hat{\xi}, n-1) - K\} + \varepsilon \right) \mathbf{1}_{\{\tau < \theta\}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + v(Z_{\tau \wedge \theta}, \xi, n) \mathbf{1}_{\{\tau \geq \theta\}} \right) + \int_{t_0}^{\tau \wedge \theta} e^{-\delta(s-t_0)} \{f(Z_s, \xi) + \varepsilon\} ds \middle| Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau \wedge \theta} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s, \xi) ds + e^{-\delta((\tau \wedge \theta) - t_0)} \left(\max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(Z_{\tau \wedge \theta}, \hat{\xi}, n-1) - K\} \right) \mathbf{1}_{\{\tau < \theta\}} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\delta((\tau \wedge \theta) - t_0)} v(Z_{\tau \wedge \theta}, \xi, n) \mathbf{1}_{\{\tau \geq \theta\}} \middle| Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right] \quad (2.1.74) \\ &+ \varepsilon \mathbb{E} \left[e^{-\delta((\tau \wedge \theta) - t_0)} \mathbf{1}_{\{\tau < \theta\}} + \int_{t_0}^{\tau \wedge \theta} e^{-\delta(s-t_0)} ds \middle| Z_{t_0} = \bar{z}, \xi_{t_0}^- = \xi \right] = v(\bar{z}, \xi, n) + \varepsilon C_\theta, \end{aligned}$$

ここで $C_\theta > 0$ は期待値演算式内の最終項目に相当する。これは式 (2.1.72) に対する矛盾である。これにより式 (2.1.71) を満たす任意の $\forall \varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\forall \bar{z} \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\min[\delta v(\bar{z}, \xi, n) - \mathcal{L}\varphi(\bar{z}) - f(\bar{z}, \xi), v(\bar{z}, \xi, n) - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(\bar{z}, \hat{\xi}, n-1) - K\}] \leq 0.$$

すなわち、 $v(z, \xi, n)$ の、式 (2.1.68) に対する粘性劣解性が示された。

(iii). 粘性解性

(i), (ii) より式 (2.1.68) が示された。 □

2.1.6 摂動関数と比較原理

定理2.1.5で f が二次関数のときの比較原理を証明するために、摂動関数を構成するための手順として、元の関数 V に対する次のような凸結合を考える。

$$V^\lambda \equiv (1 - \lambda)V + \lambda\psi, \lambda \in (0, 1) \quad (\lambda_1 = 1 - \lambda, \lambda_2 = \lambda \text{ in 定理2.1.2}) \quad (2.1.75)$$

V^λ は摂動項 ψ による摂動関数と見做せる。 \mathbb{R} 上の従属変数としての関数 $V(z)$ による二階線型微分形式 $F := \delta V - \mathcal{L}V - f(z)$ を考え、定理2.1.2を用いると、もしも仮に

$$\delta\psi - \mathcal{L}\psi - f(z) > \varepsilon \text{ on } \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \quad (2.1.76)$$

を満たすような関数 $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ が存在すれば、定理2.1.2の線形結合係数 $\lambda_1 = 1 - \lambda, \lambda_2 = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$) 及び、 $F = \delta - \mathcal{L}, \phi_1 = -f, \phi_2 = -f - \varepsilon, V_1 = V, V_2 = \psi \in C^2, \mathcal{O} = \mathbb{R}$ を用いることによって次が成立する。

$$V \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R} \implies V^\lambda \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f = \lambda\varepsilon \right] \text{ on } \mathbb{R} \quad (2.1.77)$$

すなわち右辺が $\lambda\varepsilon > 0$ なので、 V^λ は元の右辺が 0 の微分方程式の狭義 (strict) 粘性優解となる。この狭義粘性優解が次の比較原理、定理2.1.5では摂動関数として利用されることになる。ただし $f(z)$ が線型のときは式 (2.1.76) を満たす $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ を発見するのは容易だが、本稿の二次関数 f の場合には、 ψ の発見が難しいため式 (2.1.75) の方式の摂動関数は使えない。

f が非線型関数の場合に対応するため、式 (2.1.75) とは別の摂動関数 V^λ を考える。それは摂動項 $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ を用いて、

$$V^\lambda \equiv V + \lambda\psi, \lambda > 0, (V_1 = V, V_2 = \psi, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda, \mathcal{O} = \mathbb{R} \text{ in 定理2.1.2}) \quad (2.1.78)$$

とするやり方である。ただし、 ψ は次を満たすことを前提としている。

$$\delta\psi - \mathcal{L}\psi > \varepsilon \text{ on } \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0. (\text{定理2.1.2で } \phi_1 = -f, \phi_2 = -\varepsilon) \quad (2.1.79)$$

これにより式 (2.1.77) は満たされる。このとき式 (2.1.79) は f によらないため、 f が二次関数のときでも、この式を満たすような適当な $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ を見つけるのは比較的簡単であり、それは関数 f の性質に依存しない。この手法は次の定理2.1.5で用いられる。定理2.1.5の証明における関数 ψ は先天的に出現しているが、これは試行錯誤の結果得られたものである。

以上により二次関数 f に対する比較原理を証明するための準備が整った。

定理 2.1.5 (比較原理: Suzuki [2021], Theorem 2.4).

$U_\xi (V_\xi), \xi \in \mathbb{I}$ を線型成長性を持つ、変分不等式 (2.1.68) の *u.s.c* 粘性劣解族 (*l.s.c.* 粘性優解族) とすると、 $U_\xi \leq V_\xi$ on \mathbb{R} である。

証明. 2.1.6節冒頭での議論に基づき、従属変数 V に関する変分不等式 (2.1.68) を考える。ここで $v(z, \hat{\xi}, n - 1) - K \in LSC(\mathbb{R})$ は既知関数である。前述の試行錯誤の上で得られた摂動項 $\psi(z) \equiv z^2 + \frac{\theta + 1}{\delta} \geq \frac{\theta + 1}{\delta} > 0$ on \mathbb{R} を用いると $\delta\psi(z) - \mathcal{L}\psi(z) = (\delta + 2\theta)z^2 + 1 \geq 1$ により次の不等式が成立する。

$$\min[\delta\psi(z) - \mathcal{L}\psi(z), \psi(z)] \geq \varepsilon_\delta > 0 \text{ on } \mathbb{R}, \quad (2.1.80)$$

ただし $\varepsilon_\delta \equiv 1 \wedge \frac{\theta + 1}{\delta} > 0$. 定理2.1.3で $F = \delta V - \mathcal{L}V, G = V$ とおき、 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda > 0, V_1 = V_\xi, V_2 = \psi, \phi_1 = -f, \phi_2 = -\varepsilon_\delta, \psi_1 = -\max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}, \psi_2 = -\varepsilon_\delta$ による正值線型結合 (2.1.78)、及び2.1.6節冒頭の議論を用いて、 \mathbb{R} 上全域において以下が成立する。

$$\begin{aligned} V_\xi(z) &\in \left[\min[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi), V - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}] = 0 \right] \\ \implies V_\xi^\lambda(z) &\equiv V_\xi(z) + \lambda \psi(z) \in \left[\min[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi), V - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}] = \lambda \varepsilon_\delta \right] \end{aligned}$$

よって $V_\xi^\lambda(z)$ が微分方程式 (2.1.68) の strict な (狭義) 粘性優解であることが示された。

U_ξ, V_ξ は線型成長であるため以降の証明はSuzuki [2018] の Theorem 2.2 と同様で、そこでは非同次項 f は表われない。 □

以上により、本稿の問題の変分不等式の粘性解の一意性を証明することが可能となった。

定理 2.1.6 (連続性・一意性: Suzuki [2021], Theorem 2.5).

$v(z, \xi, n), n \geq 1$ は \mathbb{R} 上で z に関して連続で、 $v(z, \xi, n)$ は変分不等式 (2.1.68) の \mathbb{R} 上で一意の粘性解である。

証明. 定理2.1.4より v は微分方程式 (2.1.68) の粘性解であるが、粘性解の定義により v^* は上半連続 (u.s.c.) 粘性劣解、 v_* は下半連続 (l.s.c.) 粘性優解である。 v は線型成長性を持ち、定理2.1.5より $v^* \leq v_*$ である。ところが上 (下) 半連続包絡線の定義により不等式 $v^* \geq v_*$ が成立する。このことは $v^* = v_* = v \in C(\mathbb{R})$ を意味する。

また、 v, u を微分方程式 (2.1.68) の線型成長連続粘性解とすると定理2.1.5より、 v は u.s.c. 粘性劣解、 u は l.s.c. 粘性優解であり、これは $v \leq u$ を意味する一方で、 v は l.s.c. 粘性優解、 u は u.s.c. 粘性劣解であり、 $v \geq u$ を意味する。すなわち $v = u$ が成立。 □

補題 2.1.12 ($v(z, \xi, n)$ が $\delta V - \mathcal{L}V - f = 0$ の C_n^ξ 上粘性解: Suzuki [2021], Lemma 2.10).

$$v(z, \xi, n) \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi) = 0 \right] \text{ on } C_n^\xi, n \geq 1$$

証明. (i): 式 (2.1.68), (2.1.48), (2.1.59) より $v(z, \xi, n) \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi) = 0 \right]$ on \mathbb{R} .

(ii): 式 (2.1.25) の C_n^ξ 上の式より、 $v(z, \xi, n) > \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}$ が成立。よって式 (2.1.68), (2.1.48) より、 C_n^ξ 上で以下が成立する。

$$\begin{aligned} v(z, \xi, n) &\in \left[\min\{\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi), V - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}\} = 0 \right], \\ v(z, \xi, n) &\in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi) = 0 \right]. \end{aligned}$$

(iii) (i), (ii), 式 (2.1.48) より補題は示された。 □

補題 2.1.13 ($v(z, \xi, n)$ が $\delta V - \mathcal{L}V - f = 0$ の C_n^ξ 上古典解: Suzuki [2021], Lemma 2.11).

$v(z, \xi, n)$, $n \geq 1$ は \mathcal{C}_n^ξ 上で次の境界条件付き微分方程式の一意的古典解である。

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}V + \delta V &= f \text{ on } \mathcal{C}_n^\xi \\ V &= v \text{ in } \partial\mathcal{C}_n^\xi \end{aligned} \quad (2.1.81)$$

更に

$$v(z, \xi, n) \in C^2(\mathcal{C}_n^\xi). \quad (2.1.82)$$

証明. 以下の任意の有界開集合 $\mathcal{O} \subset \mathcal{C}_n^\xi$ 上の Dirichlet 境界問題は一樣楕円性条件を満たす。実際 $(\sqrt{\theta})^2 > 0$ は定数である。

$$\begin{cases} -\mathcal{L}w(z) + \delta w(z) = f(z), & \text{on } \mathcal{O} \\ w(z) = v(z, \xi, n). & \text{in } \partial\mathcal{O} \end{cases} \quad (2.1.83)$$

偏微分方程式の古典的結果より (Friedman [1975] 等参照)、Dirichlet 境界問題 (2.1.83) の古典解 $w \in C^2(\mathcal{O})$ が一意に存在する。

一方で補題 2.1.12 より $v(z, \xi, n)$ は \mathcal{O} 上で同じ微分方程式を満たし、かつ境界 $\partial\mathcal{O}$ 上でその古典解 w に一致する粘性解である。同一境界条件の粘性解の標準的な一意性と、古典解が粘性解であるという性質により、その一意の粘性解は上記一意の古典解 w に一致する。すなわち、

$$w(z) = v(z, \xi, n) \text{ on 任意の有界開集合 } \mathcal{O} \subset \mathcal{C}_n^\xi,$$

\mathcal{C}_n^ξ が複数の連結領域から成る場合でも同様であり、

$$\implies w(z) = v(z, \xi, n) \text{ on } \mathcal{C}_n^\xi \implies v(z, \xi, n) \in C^2(\mathcal{C}_n^\xi).$$

□

補題 2.1.13 と式 (2.1.25) により次の系が成立する。

系 2.1.2. $n \geq 1$ のとき値関数 v は $z \in \mathbb{R} = \mathcal{C}_n^\xi \oplus \mathcal{S}_n^\xi$ の位置に応じて次のいずれかの方程式の古典解になる。

$$\begin{cases} \delta V - \mathcal{L}V - f = 0, & z \in \mathcal{C}_n^\xi, \\ V - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\} = 0, & z \in \mathcal{S}_n^\xi \end{cases} \quad (2.1.84)$$

2.2 同時スイッチと継続・スイッチ領域の構造

本稿の問題設定による最適スイッチ問題の研究を進めるには、既存の枠組にはない連続同時スイッチ理論を深めなくてはならない。この節では基本的な事実から同時スイッチ理論を積み上げる。レジーム数が 3 以上の最適スイッチ問題では 2 回以上の連続同時スイッチ発生の可能性がある。一方、レジーム数 2 の問題で最適連続同時スイッチは発生しない。というのは通常は 2 回連続スイッチして元のレジームに瞬時に戻ることインセンティブのあるような評価関数を問題として設定することがないからである。例えば取引コストを含む評価関数の場合には、連続同時スイッチすることにより、元の状態に戻り、状態変数が同じで、値関数のみ劣化するような状態が発生すればそれは最適戦略ではない。最適連続同時スイッチは初期の研究 Suzuki [2016] でも現象としては結果には表われていたが、明示的な考察は Suzuki [2021] で行われた。

連続同時スイッチは単独スイッチに比べるとその理論は煩雑であるが、連続時間の設定で連続スイッチを禁止するような問題設定にすると、もし実態として連続同時スイッチが最適であるような状況下では、問題の最適解が存在しないという状態が簡単に発生してしまう。その場合、2 個の連続したスイッチの間隔を無限小まで狭くしたものが形式上は値関数の上限となるが、それを実現する最適戦略が存在しない状態になってしまう。このとき値関数の有限の上限値は存在するが最大値が存在しない。従って連続同時スイッチを禁止するような問題設定は得策でない。連続同時スイッチの問題は、レジーム数の拡大に伴い避けて通れない研究分野であると考えられる。

2.2.1 連続同時スイッチ領域の基本

連続同時スイッチの必然性や数理的な構造は理解され難いため、ここで連続同時スイッチ領域の基本的な考え方と重要性を再確認したい。例として本稿のモデルで、特に $\xi = 1, n = 2$ の場合の値関数 $v(z, \xi = 1, n = 2)$ を作図した図 2.1 の例で考える。すなわちこの図は、スイッチ権利数 $n = 2$ でレジーム $\xi = 1$ (long position)

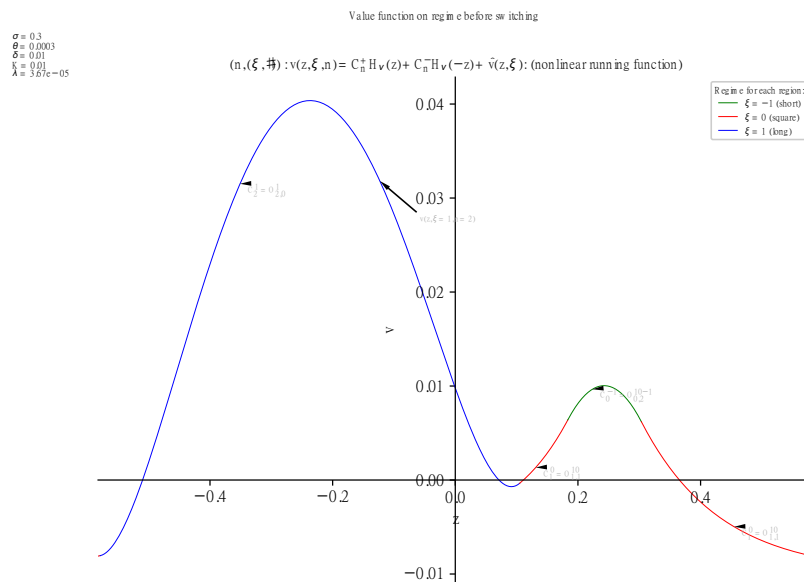


図 2.1 値関数 $v(z, \xi = 1, n = 2)$ の例

の値関数の水準である。本稿の取り扱っている問題の資産価値 Z の存在範囲は実数空間 \mathbb{R} 全域で可動可能領域には境界がない。もしもこの可動可能領域全域が一連の継続領域であったとすると、もし二階微分方程式のみが与えられただけでは領域全域にわたる解の水準と傾きが決まらない。発射台となる境界条件が入れられないからである。

実際には境界条件が入り、継続領域境界の外側も Z の可動範囲である以上、値関数を求めなくてはならない。つまり、スイッチ前後の値関数の漸化式的関係 (2.3.5) により、 $n - 1$ の引数を持つ下位の既知の値関数が自由境界問題による接続先となっていて、そのスイッチ先を発射台として定義域上の継続領域内部にわたる値関数の水準と傾きが決定されている。順序としてはそのスイッチ領域内の $n - 1$ の引数を持つ値関数の関数

形の方が先に決定され、そこを境界条件による起点として n の引数を持つ値関数が決定される。

図2.1の青線がスイッチ権利数 $n = 2$ でレジーム $\xi = 1$ の場合の継続領域の値関数 $v(z, \xi = 1, n = 2)$ の水準を表している。平均回帰資産を扱っており、評価関数の一次の項部分は期待リターンの最大化を目指すため、最適戦略は z が負の領域では $\xi = 1$ を継続するポジションをとりがちになる。逆にその正の領域は蓄積してきた収益の利食いの機会を探る領域であり、スイッチが発生し易くなる。図の赤線は $\xi = 0$ (square) ポジションに対応する。すなわち値関数が青から赤に変化する境界部分で最適戦略により、 $\xi = 1$ から $\xi = 0$ へのレジームスイッチの指示が出る。こうして $z = 0.1$ を超えるあたりから最適レジームは $\xi = 0$ にスイッチされる。赤い値関数水準はスイッチ先の継続領域の関数 $v(z, \xi = 0, n = 1)$ から取引コスト K を引いた値となる。すなわちこのスイッチ領域上では、

$$v(z, \xi = 1, n = 2) = v(z, \xi = 0, n = 1) - K$$

が成立する。

ただし z 軸上を更に右側に進むとその継続領域も長くは継続せず、 $z = 0.2$ 付近で更に緑線で示す $\xi = -1$ (short) ポジションにスイッチされる。すなわち運用資産の平均回帰の影響力が強まれば、 z の正の領域では更にポジションを売りにするインセンティブが働く。この緑線の値関数水準は、値関数 $v(z, \xi = 0, n = 1)$ からみて、同様にスイッチ先の継続領域の関数形 $v(z, \xi = -1, n = 0)$ から取引コスト K を引いた値となるため、

$$v(z, \xi = 0, n = 1) = v(z, \xi = -1, n = 0) - K.$$

結局、値関数 $v(z, \xi = 1, n = 2)$ は、 $v(z, \xi = -1, n = 0)$ の継続領域の関数形から取引コスト $2K$ を引いた値となり、

$$v(z, \xi = 1, n = 2) = v(z, \xi = -1, n = 0) - 2K$$

になる。すなわち $n = 2, \xi = 1$ で z の初期状態を緑線付近から始める場合、即座に 2 回連続スイッチが発生して同時刻に $n = 0, \xi = -1$ までスイッチされ、その後、継続状態に入る。3 レジーム問題の場合これ以上の同時スイッチは発生しない。またこの図で z の値が更に大きくなるとまた線の色が赤に戻るが、これは評価関数のリスク項の影響で、状態変数 Z_t の位置が平均回帰中心から外れるとリスクペナルティ項が大きくなることによりポジションを閉じようとするインセンティブが働くからである。

この問題では、連続同時スイッチ領域は、グラフ全体の水準と傾き具合を境界条件として特徴付けている。境界条件は n の値の低い方から漸化式により順繰りに決定される。漸化式の初期条件がなければ全体が決まらない。また、スイッチ権利数が n の値関数は、スイッチ権利数が n より大きい値関数を求める際の初期条件として後に利用されるため、継続・スイッチ領域問わず、定義域である実数全域上で値関数を求めなくてはならない。このように連続同時スイッチ領域は、漸化式の初期条件と同様になくってはならない重要性を持つ。

また後程明らかになるが、最初に $\xi : 1 \rightarrow 0$ の最適スイッチが発生する領域全域、すなわち連続同時スイッチを意識せず、 $\xi = 1$ から $\xi = 0$ へ最初にスイッチするのが最適となる領域、つまり (緑線で示す連続同時スイッチ領域を含む) 赤線の領域 ($z = 0.1$ 付近より右側の全領域) を一括して 1 領域として取扱うのは解析的には無理がある。この領域内部は全域で C^1 -級ではあるが、殆ど全域 (a.e.) で C^2 -級でしかない。つまり赤線と緑線の境界上で C^2 -級とならない。従って以降の解析では連続同時スイッチ領域の境界で分割してそれぞれ別々の領域として取り扱っている。いずれにしても、この最適連続同時スイッチ領域は無視できず、単なる最初の最適スイッチ先による領域全域とは区別して取扱うべき領域である。

2.2.2 最終継続領域

今、丁度 m 回の再帰のない連続同時スイッチ $\xi^{(0)} \mapsto \dots \mapsto \xi^{(m)}$ により継続領域 $\mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}} (0 \leq m \leq \min\{N-1, n\}, n \geq 1)$ に遷移することが最適であるとする。この n を連続同時スイッチ回数と呼ぶ。ただし N は総レジーム数である。最終的に継続領域に至るまでの m 回の連続同時スイッチ列のうちの $p \leq m$ 回目までの暫定的連続同時スイッチ列 $\xi^{(0)} \mapsto \dots \mapsto \xi^{(p)} (p = 1, \dots, m (1 \leq m \leq \min\{N-1, n\}, n \geq 1))$ に対して、暫定的最適連続同時スイッチ領域 $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(p)}}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(p)}} \equiv \bigcap_{\substack{\xi^{(q+1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(q)}) \\ q=0, \dots, p-1}} \mathcal{S}_{n-q}^{\xi^{(q)} \xi^{(q+1)}} \quad (1 \leq p \leq m) \quad (2.2.1)$$

便宜上、 $p=0$ に対しては $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(p)}} = \mathbb{R}$ と定義する。これは式 (2.1.25) で用いた $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}}$ ではない。

丁度 m 回の再帰のない連続同時スイッチ $\xi^{(0)} \mapsto \xi^{(1)} \mapsto \dots \mapsto \xi^{(m)}$, $\xi^{(p)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p-1)}), p = 1, \dots, m$ によって継続領域 $\mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}}$ へ最終的にスイッチするのが $z \in \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}}$ において最適であるとき、 z -軸上の排他的最終継続領域 $\mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} \subset \mathbb{R}$ を次のように定義する。 $\xi^{(p)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p-1)}), p = 1, \dots, m, 0 \leq m \leq \min\{N-1, n\}, n \geq 1$ に対して、継続領域に遷移するまでの連続同時スイッチ数 m が $m \geq 1$ のとき、

$$\mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} \equiv \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} \cap \mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}} \quad \dots (m \geq 1). \quad (2.2.2)$$

ここで本稿の表記法に従うと、もし連続同時スイッチ $\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}$ が空集合のとき (つまり $m=0$)、対応する同時スイッチ領域 $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}}$ も空集合となり $m=0$ のとき、

$$\mathcal{O}_{n,0}^{\xi^{(0)}} \equiv \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}} \quad \dots (m=0) \quad (2.2.3)$$

とする。

以上の表記法を用いると、最適スイッチ領域は以下のように最終継続領域 $\mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}}$ 別に分解できる。各 $n \geq 1$ に対して、

$$\mathbb{R} = \bigoplus_{\substack{\xi^{(p)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p-1)}) \\ p=1, \dots, m \\ m=0, 1, \dots}} \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} \quad \text{for } \forall \xi^{(0)} \in \mathbb{I}, \quad (2.2.4)$$

$$\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}} = \bigoplus_{\substack{\xi^{(p)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p-1)}) \\ p=1, \dots, m \\ m=1, 2, \dots}} \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} \quad \text{for } \xi^{(0)} \in \mathbb{I}, \quad (2.2.5)$$

$$\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}} = \bigoplus_{\substack{\xi^{(p)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p-1)}) \\ p=2, \dots, m \\ m=1, 2, \dots}} \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \dots \xi^{(m)}} \quad \text{for } \xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)}), \xi^{(0)} \in \mathbb{I}. \quad (2.2.6)$$

ここで、式 (2.2.6) の右辺の項目のうち、 $m=1$ の項、つまり連続同時スイッチ回数が 1 回の場合は、 $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}$ は与えられているので、右辺の直和演算子内部の繰り返しを表している表記のうち、 $p=2$ 回以上の場合の連続同時スイッチ列を表すインデックス表記 $p=2, \dots, m$ 部分は空集合と考え、集合 $\mathcal{O}_{n,1}^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}}$ のみが残ると考えて $m=1$ の部分は、

$$\bigoplus_{\substack{p \in \{1\} \\ m=1}} \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} = \mathcal{O}_{n,1}^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}}, \quad (2.2.7)$$

となる。また、式 (2.2.4) の右辺の項目のうち、 $m = 0$ の項は式 (2.2.3) により、 $\mathcal{O}_{n,0}^{\xi^{(0)}} = \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}}$ である。

変分不等式の境界条件を導出するため、次の滑らかさ条件 (smooth fit condition) は重要である。

定理 2.2.1 (Smooth fit condition: $v(z, \xi, n) \in C^1(\mathbb{R})$): Suzuki [2021], Theorem 3.1).

$n \geq 1$, $\xi \in \mathbb{I}$ のとき、 v は \mathbb{R} 上可微分である。つまり次が成立する。

$$v(z, \xi, n) \in C^1(\mathbb{R}) \quad (2.2.8)$$

証明. 本稿のモデルでは高々 2 回の連続同時スイッチまで可能である。そのため式 (2.2.4) より $\xi^{(0)} = \xi$ それぞれに対して、 $\mathbb{R} = \mathcal{O}_{n,0}^{\xi^{(0)}} \oplus \mathcal{O}_{n,1}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \oplus \mathcal{O}_{n,2}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\xi^{(2)}}$ が成立する。そのため確率過程 Z の z -軸上の位置に応じて次の 4 つの場合分けをして考える。 $\xi^{(0)} = \xi$ 対して、

- (i) $z \in \mathbf{Int}(\mathcal{O}_{n,0}^{\xi^{(0)}}) = \mathbf{Int}(\mathcal{C}_n^{\xi})$,
- (ii) $z \in \mathbf{Int}(\mathcal{O}_{n,1}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}})$,
- (iii) $z \in \mathbf{Int}(\mathcal{O}_{n,2}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\xi^{(2)}})$,
- (iv) $z \in \partial\mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}, m = 1, 2$,

ただし $\mathbf{Int}(\cdot)$ は内点を得る演算子である。Pham [2009] の Proposition 5.3.2 をそれぞれのケースに適用できる。 \square

本稿はスイッチ領域において値関数を用いた特別な試験関数を取り扱う。試験関数は $C^2(\mathcal{O})$ -級でなくてはならないため注意が必要である。関連する注意を以下に示す。

注意 2.2.1 (連続同時スイッチ領域上の非 C^2 -級関数)。

まず注意したいのは、点 $\bar{z} = \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \cap \partial\mathcal{S}_{n-1}^{\xi^{(1)}\xi^{(2)}}$ が存在すれば連続同時スイッチ領域上であるため、 $\varphi^{\xi^{(1)}}(z) \equiv v(z, \xi^{(1)}, n-1) - K \notin C^2(\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}})$ となることである。その際、 $\varphi^{\xi^{(1)}}$ は \bar{z} 上で試験関数の条件を満たさない。ただしこれが直ちに \bar{z} における C^2 -級試験関数の存在を否定するものではない。例えば $\varphi^{\xi^{(2)}}(z) \equiv v(z, \xi^{(2)}, n-2) - 2K$ は、もし $\bar{z} \in \mathcal{O}_{n,2}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\xi^{(2)}}$ であれば、 $z = \bar{z}$ における試験関数の候補となる。粘性解アプローチを継ぎ目なく行うためには、これらの C^2 -級関数を次のように縫い目なく張り合わせなくてはならない。

補題 2.2.1 (最適スイッチ領域上の特別試験関数: Suzuki [2021], Lemma 3.1).

継続領域に至るまでの最適連続同時スイッチ総回数 $m = 0, 1, \dots$ それぞれについて、開集合 $\mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}} \supset \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}$ 上で定義された関数

$$\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(z) \equiv v(z, \xi^{(m)}, n-m) - mK \quad (2.2.9)$$

は、値関数 $v(z, \xi, n)$ に対する、任意の $\bar{z} \in \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}} \subset \mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}}$ で最少化される優試験関数である。つまり、

$$\{\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(z) \in C^2(\mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}}), \forall \bar{z} \in \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}\} \curvearrowright v(z, \xi, n) \text{ on } \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}. \quad (2.2.10)$$

さらに、 $\xi^{(p+1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p)})$, $p = 0, \dots, m-1$, $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ に対し、 $\mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}$ 上で

$$\varphi_{n,0}^{\xi^{(0)}}(z) = \varphi_{n,p}^{\xi^{(p)}}(z), \quad p = 0, \dots, m \quad (2.2.11)$$

が成立する。

証明. 式 (2.1.26) より $\xi^{(p+1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p)})$, $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$, $p = 0, \dots, m-1$ に対し $\mathcal{S}_{n-p}^{\xi^{(p)}\xi^{(p+1)}} \supset \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}$ 上で $\varphi_{n,p}^{\xi^{(p)}}(z) = \varphi_{n,p+1}^{\xi^{(p+1)}}(z)$ が成立しこれにより、式 (2.2.11) が示される。よって、

$$\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(z) = \varphi_{n,0}^{\xi^{(0)}}(z) = v(z, \xi^{(0)}, n) \text{ on } \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}. \quad (2.2.12)$$

K が定数により補題2.1.13の式 (2.1.82) より

$$\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(z) \equiv v(z, \xi^{(m)}, n-m) - mK \in C^2(\mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}}) \text{ on } \mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}} \supset \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}. \quad (2.2.13)$$

これにより、式 (2.2.10) が示される。 \square

注意点は、式 (2.2.5) により $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ に対するスイッチ領域 $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}}$ 上の任意の点は、継ぎ目なくいずれかの特別試験関数の最小点となることである。そのためこの補題は、同時スイッチ可能な最適スイッチ問題に対し特別試験関数を提供することに役立っている。

2.2.3 参照領域の導入

具体的な最適解を計算するには、最適化問題の実行可能領域上の継続・スイッチ領域の基本構造を明らかにしなくてはならない。形式的には継続領域、スイッチ領域は式 (2.1.25) で与えられているが、それらを特定するには解析を要する。まずそれぞれの $\xi, \hat{\xi} \in \mathbb{I}$, $m \geq 1$ に対して、実数空間上に次のような参照領域を定義する。

$$\mathcal{Q}_m^{\xi\hat{\xi}} \equiv \{z \mid f(z, \hat{\xi}) - f(z, \xi) \geq m\delta K\} \quad (2.2.14)$$

この $\mathcal{Q}_m^{\xi\hat{\xi}}$ を、レジーム ξ から $\hat{\xi}$ に至る m 回連続同時スイッチに対する参照領域と呼ぶことにする。

補題 2.2.2 (スイッチ用参照領域: Suzuki [2021], Lemma 3.2).

任意のレジーム遷移列 $\xi^{(0)} \mapsto \dots \mapsto \xi^{(m)}$, $\xi^{(p+1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p)})$, $p = 0, \dots, m-1$, $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$, $m \geq 1$ に対して、

$$\mathcal{Q}_m^{\xi^{(0)}\xi^{(m)}} \supset \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}. \quad (2.2.15)$$

証明. 式 (2.1.68), (2.1.59) 及び補題2.2.1より関数 $\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(z)$ が $v(z, \xi^{(0)}, n)$ を $\bar{z} \in \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}$ で最小化する優試験関数であるため、

$$\delta v(\bar{z}, \xi^{(0)}, n) - \mathcal{L}\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(\bar{z}) - f(\bar{z}, \xi^{(0)}) \geq 0 \text{ on } \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}.$$

式 (2.2.12) より

$$\delta\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(z) - \mathcal{L}\varphi_{n,m}^{\xi^{(m)}}(z) - f(z, \xi^{(0)}) \geq 0 \text{ on } \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}} \quad (2.2.16)$$

が成立する。一方で補題2.1.13より $v(z, \xi^{(m)}, n-m) \in C^2(\mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}})$ より

$$\delta v(z, \xi^{(m)}, n-m) - \mathcal{L}v(z, \xi^{(m)}, n-m) - f(z, \xi^{(m)}) = 0 \text{ on } \mathcal{C}_{n-m}^{\xi^{(m)}} \supset \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}} \quad (2.2.17)$$

が成立する。式 (2.2.17) を式 (2.2.16) と比較して式 (2.2.13) より、

$$f(z, \xi^{(m)}) - f(z, \xi^{(0)}) \geq m\delta K \text{ on } \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}}.$$

\square

上記補題が主張するのは、参照領域 $Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$ が包含するのは $O_{n,1}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \subset S_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$ であり、必ずしも集合 $S_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$ 全体ではないということである。連続同時スイッチが許容されない問題設定の場合には、その趣旨より一回のスイッチによる遷移先は必ず継続領域内でなくてはならないため $O_{n,1}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} = S_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$ となる。両環境の差異を埋めるため、次の仮定を導入する。

仮定 2.2.1 (最適スイッチ領域に関する前提).

- (i) レジーム $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ それぞれに対して参照領域系 $Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$, $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$ は互いに素である。特殊な場合として $\mathcal{A}(\xi^{(0)})$ が 1 要素集合のときこの条件は直ちに成立。
- (ii) 任意のレジーム $\forall \xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)}), \forall \xi^{(0)} \in \mathbb{I}, \forall n \geq 1$ に対して、 $Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \supset S_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$.

系 2.2.1 (実数全域 \mathbb{R} の領域分割).

式 (2.1.27) により、仮定 2.2.1 のもとで、次のような実数全域 \mathbb{R} の分解がそれぞれのレジーム $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}, n \geq 1$ について成立する。

$$\mathbb{R} = \left(\bigoplus_{\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})} Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \right) \cup C_n^{\xi^{(0)}} \quad (2.2.18)$$

こうして前提条件、仮定 2.2.1 により $z \notin Q_1^{\xi^{(0)}} \equiv \bigoplus_{\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})} Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \implies z \in C_n^{\xi^{(0)}}, \forall n \geq 1$ が成立する。すなわち、この前提のもとでは、スイッチ前のレジームを $\xi^{(0)}$ とする参照領域外の点はレジーム $\xi^{(0)}$ の継続領域内部にある。同時スイッチのある問題を考える場合、仮定 2.2.1 (ii) のような前提を保証するのは一般的には難しい。次の命題 2.2.1 は、仮定 2.2.1 (ii) が成立するための十分条件を与える。

命題 2.2.1 (仮定 2.2.1 (ii) の十分条件: Suzuki [2021], Proposition 3.1).

それぞれのレジーム $\xi_1 \in \mathcal{A}(\xi_0), \xi_0 \in \mathbb{I}$ に対して、

$$Q_1^{\xi_0\xi_1} \supset \bigcup_{\left\{ \begin{array}{l} \xi_m \in \mathcal{A}(\xi_{m-1}) \\ \xi_{m-1} \in \mathbb{I} \\ \xi_{m-1} \neq \xi_0 \\ \xi_m \neq \xi_0, \xi_1 \end{array} \right\}} Q_1^{\xi_{m-1}\xi_m}$$

のとき、仮定 2.2.1 (ii) が成立する。

証明. 式 (2.2.1), (2.2.2) 及び 補題 2.2.2 により以下が成立する。

$$\begin{aligned} O_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}} &= (S_n^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m-1)}} \cap S_{n-m+1}^{\xi^{(m-1)}\xi^{(m)}}) \cap C_{n-m}^{\xi^{(m)}} \quad \dots (m \geq 1) \\ &= S_n^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m-1)}} \cap O_{n-m+1,1}^{\xi^{(m-1)}\xi^{(m)}} \subset O_{n-m+1,1}^{\xi^{(m-1)}\xi^{(m)}} \subset Q_1^{\xi^{(m-1)}\xi^{(m)}} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

ここで式 (2.2.19) の最後の包含関係式は補題 2.2.2 によるものである。なぜなら最終スイッチ $\xi^{(m-1)} \mapsto \xi^{(m)}$ は継続領域 $\xi^{(m)}$ へのスイッチだからである。よって式 (2.2.6), (2.2.19) により、各レジーム $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)}), \xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ に対して、

$$S_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \subset \bigcup_{\left\{ (\xi^{(m-1)}, \xi^{(m)}) \left| \begin{array}{l} \xi^{(p)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p-1)}) \\ p=2, \dots, m \\ m=1, 2, \dots \end{array} \right. \right\}} Q_1^{\xi^{(m-1)}\xi^{(m)}} \subset Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}.$$

これにて題意は満たされた。 □

2.2.4 複数連結領域への分解と連結性の確認

一般に、レジーム $\xi_1 \in \mathcal{A}(\xi_0)$, $\xi_0 \in \mathbb{I}$ に対する参照領域 $Q_1^{\xi_0 \xi_1}$ は複数連結領域から成る。その場合、その領域は互いに素な連結領域に分解できる。その分解は次の形式で表現できる。

$$Q_1^{\xi_0 \xi_1} = \bigoplus_{\alpha_i \in \Lambda} Q_1^{\xi_0 \xi_1 \{\alpha_i\}}$$

個々の領域 $Q_1^{\xi_0 \xi_1 \{\alpha_i\}}$, $\alpha_i \in \Lambda$ は連結領域である。そこで、そのような一連の連結領域系に次のように索引 (index) $\{\alpha_i\}$ を付与することを考える。すなわち、 $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$, $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ が与えられた場合、それぞれの最適連続同時スイッチ列 $\xi^{(0)} \xi^{(1)} \dots \xi^{(m)}$ ($m \geq 1$) に対して、さらにそれぞれの索引 $\alpha_i \in \Lambda$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}} &\equiv \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}} \cap Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}, \\ \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \dots \xi^{(m)} \{\alpha_i\}} &\equiv \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \dots \xi^{(m)}} \cap Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

式 (2.2.20) の両辺に対して、索引 $\{\alpha_i\}$ にわたり和集合演算を行い、

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\alpha_i \in \Lambda} \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}} &= \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}} \cap \left(\bigoplus_{\alpha_i \in \Lambda} Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}} \right) \\ &= \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}} \cap Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}}. \end{aligned}$$

これにより仮定 2.2.1 (ii) のもとで次の系が成立する。

系 2.2.2 (分離した最適スイッチ領域).

仮定 2.2.1 (ii) のもとで、

$$\bigoplus_{\alpha_i \in \Lambda} \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}} = \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)}}. \quad (2.2.21)$$

命題 2.2.2 (参照領域における連結領域: Suzuki [2021], Proposition 3.2).

連結領域 $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}} \equiv [\inf \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}, \sup \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}]$ に対し、

$$\overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}} \subset Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}.$$

証明.

式 (2.2.20) より $Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}} \supset \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}$. 領域 $Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}$ の定義により、この領域は一次元の連結領域すなわち、凸領域であることから、

$$z_1 \leq z_2, z_1, z_2 \in \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}} \Rightarrow \forall z_3 \in [z_1, z_2], z_3 \in Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}$$

がなりたち、

$$\forall z_3 \in \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}}, z_3 \in Q_1^{\xi^{(0)} \xi^{(1)} \{\alpha_i\}}$$

が成立する。 □

ここで、これまで取り扱ってきた式 (2.1.68) とは若干異なる、次のような別の HJB-型変分不等式を導入する。任意の $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{I}$, および $v(z, \hat{\xi}, n-1)$, $1 \leq n \leq +\infty$ に対して、

$$\min\{\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi), V - \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}\} = 0 \text{ on } \mathbb{R}. \quad (2.2.22)$$

命題 2.2.3 (別の HJB-型変分不等式: Suzuki [2021], Proposition 3.3).

仮定 2.2.1 のもとで、任意のレジーム $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$, $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ 及び与えられた関数 $\varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) = v(z, \xi^{(1)}, n-1)$, $n \geq 1$ に対し、それぞれの $\alpha_i \in \Lambda$ に対して次が成立する。

$$v(z, \xi^{(0)}, n) \in \left[\min\{\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi^{(0)}), V - \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z)\} = 0 \right] \text{ on } \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \quad (2.2.23)$$

証明. 仮定 2.2.1 のもとで、式 (2.1.27) と領域 $\mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$ ($\xi = \xi^{(0)}$, $\hat{\xi} = \xi^{(1)}$, $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{I}$) の交わりをとると次のようになる。

$$\mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} = \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \oplus \left(\mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \cap \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}} \right) \subset \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \cup \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}} \quad (2.2.24)$$

よって命題 2.2.2 により、

$$\overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \subset \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \cup \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}}. \quad (2.2.25)$$

ここで F, G 及び $\tilde{G}^{\xi^{(1)}}$ ($\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$) を次のように定義する。

$$\begin{aligned} F &:= \delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi^{(0)}), \\ G &:= G(V) \equiv V - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}, \\ \tilde{G}^{\xi^{(1)}} &:= \tilde{G}^{\xi^{(1)}}(V) \equiv V - \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z). \end{aligned}$$

すると、

$$v \in \left[\min\{F, G\} = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R} \quad (2.2.26)$$

$$\implies v \in \left[G = 0 \right], v \in \left[F = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R} \quad (\text{式 (2.1.59) より}) \quad (2.2.27)$$

$$\implies v \in \left[\tilde{G}^{\xi^{(1)}} = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R} \quad (G(V) \leq \tilde{G}^{\xi^{(1)}}(V) \text{ より}). \quad (2.2.28)$$

一方で、補題 2.1.13 より、

$$v \in \left[F = 0 \right] \text{ on } \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}}. \quad (2.2.29)$$

式 (2.1.26) より、

$$v \in \left[\tilde{G}^{\xi^{(1)}} = 0 \right] \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \subset \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}. \quad (2.2.30)$$

よって、

$$\begin{aligned} v &\in \left[F = 0 \right] \cap \left[\tilde{G}^{\xi^{(1)}} = 0 \right] \text{ on } \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}} \quad (\text{式 (2.2.28), (2.2.29) より}), \\ v &\in \left[F = 0 \right] \cap \left[\tilde{G}^{\xi^{(1)}} = 0 \right] \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \quad (\text{式 (2.2.27), (2.2.30) より}). \end{aligned}$$

よって式 (2.1.62), (2.1.63) より、

$$v \in \left[\min\{F, \tilde{G}^{\xi^{(1)}}\} = 0 \right] \text{ on } \mathcal{C}_n^{\xi^{(0)}} \cup \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}.$$

よって式 (2.2.25) より上記命題は示された。 \square

命題 2.2.4 (別の HJB-型変分不等式と特別試験関数: Suzuki [2021], Proposition 3.4).

レジーム $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$, $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ 及び関数 $\varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) = v(z, \xi^{(1)}, n-1)$, $1 \leq n \leq +\infty$ に対して、

$$\varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) \in \left[\min\{\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi^{(0)}), V - \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z)\} = 0 \right] \text{ on } \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \quad (2.2.31)$$

がそれぞれの索引 $\alpha_i \in \Lambda$ につき成立する。

証明. 式 (2.1.68) により、任意のレジーム $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$, $n \geq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} v(z, \xi^{(1)}, n-1) &\in \left[\min\{\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi^{(1)}), V - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi^{(1)})} \{v(z, \hat{\xi}, n-2) - K\}\} = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R} \\ \implies v(z, \xi^{(1)}, n-1) &\in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi^{(1)}) = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R} \text{ (式 (2.1.59) より)} \\ \implies \forall \{\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \bar{x} \in \mathbb{R}\} \cup v(z, \xi^{(1)}, n-1), &\delta v(z, \xi^{(1)}, n-1) - \mathcal{L}\varphi - f(z, \xi^{(1)}) \geq 0 \text{ on } \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

参照領域 $\mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$ (式 (2.2.14)) 及び命題 2.2.2 により、 $f(z, \xi^{(1)}) - f(z, \xi^{(0)}) \geq \delta K$ on $\overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$ がそれぞれの $\alpha_i \in \Lambda$ に対して成立する。また、 $\varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) = v(z, \xi^{(1)}, n-1) - K$ on \mathbb{R} であるため、

$$\begin{aligned} \text{式 (2.2.32)} &\implies \forall \{\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \bar{x} \in \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}}\} \cup \{\varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) + K\}, \\ &\delta\{\varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) + K\} - \mathcal{L}\varphi - f(z, \xi^{(0)}) \geq \delta K \text{ on } \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \\ &\implies \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) + K \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi^{(0)}) = \delta K \right] \text{ on } \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \\ &\implies \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi^{(0)}) = 0 \right] \text{ on } \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \end{aligned}$$

となる。 $G(V) := V - \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z)$ とおくと、 $\varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) \in [G(V) = 0]$ on \mathbb{R} となり、式 (2.1.62) により命題は証明された。 \square

定理 2.2.2 (連結スイッチ領域: Suzuki [2021], Theorem 3.2).

仮定 2.2.1 のもとで、それぞれの索引 $\alpha_i \in \Lambda$ に対して、集合 $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$ は連結領域となる。すなわち、

$$\overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} = \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \quad (2.2.33)$$

がそれぞれの索引 $\alpha_i \in \Lambda$ 、レジーム $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$, $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ に対して成立する。

証明. 定理 2.1.5 及び定理 2.1.6 で取り扱われた線型成長性を持つ微分方程式 (2.1.68) の粘性解の一意性と同様に、命題 2.2.1, 命題 2.2.2, 命題 2.2.3, 命題 2.2.4 より、式 (2.2.23) と式 (2.2.31) を合わせて次が成立する。

$$v(z, \xi^{(0)}, n) = \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) \text{ on } \overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \subset \mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$$

一方で、式 (2.1.26) より、 $\mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$ において、

$$v(z, \xi^{(0)}, n) = \varphi_{n,1}^{\xi^{(1)}}(z) \iff z \in \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}.$$

よって、

$$\overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \subset \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}.$$

しかし、 $\overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}}$ の定義より、

$$\overline{\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}} \supset \mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$$

となり、これにより式 (2.2.33) が成立。 \square

この定理と系 2.2.2 を併せて考えると、スイッチ領域を互いに素で連結な部分領域に分離する方法が得られる。式 (2.1.25) の時点では、空間的構造は不明であり、形式的にしか継続領域・スイッチ領域を定義できていなかったが、次の系でその構造は明らかになる。これは本稿の主要な結果の一つである。

系 2.2.3 (スイッチ領域構造).

命題 2.2.2 及び定理 2.2.2 より、仮定 2.2.1 のもとで、それぞれのレジーム $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ に対して、 $\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)})$, $\alpha_i \in \Lambda$ に対して互いに素に分離された部分参照領域 $\mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$ に従って分離されたそれぞれのスイッチ領域 $\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}} \subset \mathcal{Q}_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}\{\alpha_i\}}$ は高々唯一の連結領域である。

スイッチ領域の構造を特定するための有益な基準が非空集合条件である。これは解が線型成長であるとき、非有界領域上の粘性解の一意性に依存している。非有界領域上の解の非空集合条件を、本稿の問題の場合について次に示す。

補題 2.2.3 (非空集合条件: Suzuki [2021], Lemma 3.3). それぞれのレジーム $\xi \in \mathbb{I}$ に対し、

$$\exists z \in \mathbb{R}, \exists \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \hat{v}(z, \xi) \leq \hat{v}(z, \hat{\xi}) - K \implies \forall n \geq 1, \mathcal{S}_n^\xi \neq \emptyset. \quad (2.2.34)$$

証明. 補題 2.1.12 より与えられた $\xi \in \mathbb{I}$ に対して $\mathcal{S}_n^\xi = \emptyset$ となるような $n \geq 1$ が存在すれば、

$$v(z, \xi, n) \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi) = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R}. \quad (2.2.35)$$

Crandall et al. [1992] の Theorem 5.1 より、値関数 $v(z, \xi, n)$ は線型成長性 (補題 2.1.2) より、微分方程式 (2.2.35) の線型成長性を持つ非有界領域 \mathbb{R} 上の一意的粘性解である。一方で、線型成長性 (補題 2.1.2 の意味で) より関数 \hat{v} は \mathbb{R} 上で同一の微分方程式の古典解となっており、同じ定理により一意である。古典解は粘性解であり、解の一意性によりその ξ に対して次が成り立つ。

$$v(z, \xi, n) = \hat{v}(z, \xi) \text{ on } \mathbb{R}, \forall n \geq 0 \quad (2.2.36)$$

一方で式 (2.1.25) により領域が $\mathcal{S}_n^\xi = \emptyset$ を満たすとき、

$$\forall \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), v(z, \xi, n) > v(z, \hat{\xi}, n-1) - K \text{ on } \mathbb{R}, n \geq 1.$$

よって式 (2.2.36) により、与えられた ξ に対し、

$$\forall \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \hat{v}(z, \xi) > \hat{v}(z, \hat{\xi}) - K \text{ on } \mathbb{R}.$$

\square

2.3 HJB-変分不等式の解

定理2.1.6より、求める値関数 $v(z, \xi, n)$ は変分不等式 (2.1.68) の \mathbb{R} 上で一意の粘性解であった。この節では変分不等式を構成する微分方程式の一般解を求め、自由境界問題としての境界条件を考慮することにより、継続領域上のより具体的な解の形を求める。2.3.4節以降で、いくつかの簡単なパラメータの場合を例にとり、具体的な解を計算する。

2.3.1 継続領域上の微分方程式の古典解 (一般解)

求める値関数 $v(z, \xi, n)$ は変分不等式 (2.1.68) の粘性解であったが、その変分不等式に含まれる微分方程式 (2.1.81) の一般解をここで求める。その微分方程式は次のような非斉次微分方程式として表わされる。

$$V'' - 2zV' - \frac{2\delta}{\theta}V - \xi \frac{2\sigma}{\sqrt{\theta}}z = 0 \quad \dots (\xi \in \mathbb{I}) \quad (2.3.1)$$

この非斉次微分方程式に対応する斉次微分方程式は Hermite 微分方程式である。Hermite 微分方程式の解として自由度 ν の Hermite 関数 $H_\nu(z)$ が知られている (Lebedev [1972], Seaborn [1991] 参照。)

この関数 $H_\nu(z)$ の積分表示形式は、

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty e^{-s-2z\sqrt{s}} s^{-\frac{1}{2}\nu-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty e^{-t^2-2tz} t^{-\nu-1} dt > 0, (z \in \mathbb{R}, \nu < 0). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

ただし二階線形微分方程式の一般解を構成するためには、基底解すなわち線形独立な 2 個の基本解の組を特定しなくてはならない。式 (2.3.2) で与えられるエルミート関数は第一種エルミート関数と呼ばれているが、これと対を成す線形独立な関数としては、一般的には第二種エルミート関数が用いられるのが普通である*1。つまり { 第一種エルミート関数, 第二種エルミート関数 } という組による基底解である。この基底解を用いる場合、あらゆる ν の値に対して両基本解は互いに線形独立となる。しかし、本稿ではこの基底解を用いず、代わりに、より単純な基底解を用いる。微分方程式 (2.3.1) の独立変数 z の代わりに $-z$ を独立変数とするような微分方程式が同一の微分方程式になることから、 $H_\nu(-z)$ も同一の微分方程式の解になる。すなわち、第一種エルミート関数のみを用いて、

$$\{H_\nu(z), H_\nu(-z)\} \quad (2.3.3)$$

を基底解とする。本稿ではこちらを用いて一般解を形成している。この場合、両者の線形独立性確認のためのロンスキー行列は、

$$\mathcal{W}\{H_\nu(z), H_\nu(-z)\} = \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} \neq 0, (\nu \neq 0, 1, \dots)$$

であり、 ν が非負整数でなければ式 (2.3.3) が 2 階線形微分法定式 (2.3.1) の斉次方程式の線形独立な基本解を形成しているといえる。本稿の問題では常に $\nu \equiv -\frac{\delta}{\theta} < 0$ であるため線形独立性は担保されている。従っ

*1 第一種エルミート関数は合流型超幾何関数を用いて式 (4.1.1) のように表されるが、第二種エルミート関数も同様に合流型超幾何関数を用いて表現される。

て、本稿はこの基底 (2.3.3) を、微分方程式 (2.3.1) の斉次方程式の一般解として用いる。一般解の基底関数 (2.3.3) は単調増加関数と減少関数の組合せになっている。

特に $n = 0$ のときの値関数 $v(z, \xi, n = 0)$ に相当する、式 (2.1.17) の \hat{v} が微分方程式 (2.3.1) の特殊解となっているため、非同次方程式 (2.3.1) の一般解は、次のように斉次方程式の一般解 + 特殊解のかたちで表される。

各々の n ($0 \leq n \leq \infty$), $\xi \in \mathbb{I}$ に対して、

$$v(z, \xi, n) = C_n^{\xi,+} H_\nu(z) + C_n^{\xi,-} H_\nu(-z) + \hat{v}(z, \xi), \dots z \in C_n^\xi, \quad (2.3.4)$$

ただし任意定数を $\{C_n^{\xi,+}, C_n^{\xi,-}\}$, $\xi \in \mathbb{I}$ とする。継続領域とスイッチ領域に分けて表示した形式の方程式 (2.1.84) にこの微分方程式の一般解をあてはめると、値関数は次のように表される。

それぞれの n ($1 \leq n \leq +\infty$), $\xi \in \mathbb{I}$ に対して、

$$v(z, \xi, n) = \begin{cases} C_n^{\xi,+} H_\nu(z) + C_n^{\xi,-} H_\nu(-z) + \hat{v}(z, \xi), & z \in C_n^\xi, \\ \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}, & z \in S_n^\xi. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

ここで Hermite 関数の基本的性質を示す。 $\nu < 0$ のとき Hermite 関数は以下の性質を持つ。

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &> 0 \quad (z \in \mathbb{R}) \\ H_\nu(z) &\rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty) \\ H_\nu(z) &\rightarrow \infty \quad (z \rightarrow -\infty) \\ H_\nu(z)' &= 2\nu H_{\nu-1}(z) < 0 \dots\dots (\text{単調減少性}) \\ H_\nu(z)'' &= 4\nu(\nu-1)H_{\nu-2}(z) > 0 \dots\dots (\text{凸性}) \\ H_\nu(z) &\in C^\infty(\mathbb{R}) \dots\dots (\text{無限回可微分性}) \\ H_\nu(0) &= \frac{2^\nu \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} \\ H_\nu(z) - H_\nu(-z) &< 0 \quad (z > 0) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

数値計算用に以下の表現が役立つ。

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{m-\nu}{2})}{m!} (2z)^m, |z| < \infty \quad (2.3.8)$$

詳細は Lebedev [1972] 等を参照。

2.3.2 継続領域上の微分方程式の古典解 (境界条件)

値関数を継続領域とスイッチ領域に分けて表示した式 (2.3.5) のうち継続領域 C_n^ξ 上の式を用いて、各部分連結継続領域 $C_n^{\xi\{\cdot\}} \subset C_n^\xi$ ($\xi \in \mathbb{I}, \{\cdot\} \in \Xi$) 上の古典的的非同次一般解は、各 $n, \xi \in \mathbb{I}, \{\cdot\} \in \Xi$ につき、

$$u_n^{\xi\{\cdot\}}(z) \equiv C_n^{\xi,+ \{\cdot\}} H_\nu(z) + C_n^{\xi,- \{\cdot\}} H_\nu(-z) + \hat{v}(z, \xi), \quad z \in C_n^{\xi\{\cdot\}}. \quad (2.3.9)$$

ただし、 $\{\cdot\} \in \Xi$ を、継続領域 C_n^ξ を各部分連結継続領域 $C_n^{\xi\{\cdot\}} \subset C_n^\xi$ ($\xi \in \mathbb{I}, \{\cdot\} \in \Xi$) に分割するための指数として用いている。連結継続領域 $C_n^{\xi\{\cdot\}}$ の両境界点 j, k の位置をそれぞれ $z^{\partial\{j\}}, z^{\partial\{k\}}$ とおくと、両者とも有限値の場合、

$$\begin{cases} z^{\partial\{j\}} &\in \partial C_n^{\xi\{\cdot\}} \cap C_{n-1}^{\xi\{j\}}, \\ z^{\partial\{k\}} &\in \partial C_n^{\xi\{\cdot\}} \cap C_{n-1}^{\xi\{k\}}, \end{cases} \dots \hat{\xi}, \bar{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \xi \in \mathbb{I}, \{\cdot\}, \{j\}, \{k\} \in \Xi,$$

に対して、式 (2.3.5) のスイッチ側の式を用いると、境界条件は、式 (2.2.8) による smooth-pasting condition より両端点が有限のとき、それぞれに対して、

$$z = z^{\partial\{j\}} \text{ に対して、} \begin{cases} u_n^{\xi\{\cdot\}}(z^{\partial\{j\}}) &= u_{n-1}^{\xi\{j\}}(z^{\partial\{j\}}) - K, \\ u_n^{\xi\{\cdot\}'}(z^{\partial\{j\}}) &= u_{n-1}^{\xi\{j\}'}(z^{\partial\{j\}}) \end{cases}, \quad z^{\partial\{j\}} \in \mathcal{C}_{n-1}^{\xi\{j\}}, \quad (2.3.10)$$

$$z = z^{\partial\{k\}} \text{ に対して、} \begin{cases} u_n^{\xi\{\cdot\}}(z^{\partial\{k\}}) &= u_{n-1}^{\xi\{k\}}(z^{\partial\{k\}}) - K, \\ u_n^{\xi\{\cdot\}'}(z^{\partial\{k\}}) &= u_{n-1}^{\xi\{k\}'}(z^{\partial\{k\}}) \end{cases}, \quad z^{\partial\{k\}} \in \mathcal{C}_{n-1}^{\xi\{k\}}. \quad (2.3.11)$$

これら 4 元連立方程式に対する未知係数は、

$$C_n^{\xi, \pm\{\cdot\}}, z^{\partial\{j\}}, z^{\partial\{k\}}$$

である。ただし一方で、端点 $z^{\partial\{j\}}, z^{\partial\{k\}}$ が有限でない場合の境界条件としては、

$$v(z, \xi, n) \rightarrow v(z, \xi, 0) = \hat{v}(z, \xi) \quad (z \rightarrow \pm\infty), \quad \xi \in \mathbb{I}, n = 1, 2, \dots \quad (2.3.12)$$

を用いる。これは、レジーム ξ のまま、 $z \rightarrow \pm\infty$ に至るまでスイッチしないのが最適である場合であり、この条件は n 回分保有しているスイッチ権利数が 0 回の場合と値関数が同値であることを意味する条件である。 $z^{\partial\{j\}}$ or $z^{\partial\{k\}} = \pm\infty$ のとき、 $C_n^{\xi, \mp\{\cdot\}} = 0$ より、各 $\{\cdot\} \in \Xi$ につき、

$$u_n^{\xi\{\cdot\}}(z) = C_n^{\xi, \pm\{\cdot\}} H_\nu(\pm z) + \hat{v}(z, \xi), \quad z \in \mathcal{C}_n^{\xi\{\cdot\}} \text{ (複号同順)} \quad (2.3.13)$$

となり、未知係数は、各 $n, \xi \in \mathbb{I}, \{\cdot\} \in \Xi$ につき、未定係数 $C_n^{\xi, \mp\{\cdot\}}$ (複号いずれか) と自由境界 $z^{\partial\{j\}}$ or $z^{\partial\{k\}}$ の合わせて 2 個減ることになる。ただし、ここで、 $\{\cdot\} \in \Xi$ を、継続領域 \mathcal{C}_n^{ξ} を各部分連結継続領域 $\mathcal{C}_n^{\xi\{\cdot\}} \subset \mathcal{C}_n^{\xi}$ ($\xi \in \mathbb{I}, \{\cdot\} \in \Xi$) に分割するための指数として用いている。

ここまでのアプローチは値関数の必要条件として微分方程式の古典解を利用するというものであるが、必要条件を満たす微分方程式の解は一般的には複数存在し得るため、実際に値関数を特定するためには更なる条件が必要である。微分方程式と値関数との連携を保つために粘性解を導入する。4.2節では古典的一般解を利用して粘性解を特定する手法を研究する。

また、微分方程式の一般解及び境界条件を得ただけでは、最適解に関する状態変数空間上の継続領域・スイッチ領域の構造は明らかにならず、条件を満たす領域を具体的に求めてみる必要がある。本稿では、具体的な問題に対する具体的な解の例として 2 つの最適ペア運用戦略問題を取り上げる。1 つは、Suzuki [2016] で取り上げられている例 2.3.1 で、他方は Suzuki [2021] で取り上げられている例 2.3.2 である。後者は前者の線型評価関数を二次関数に拡張したモデルである。つまりリスク回避係数を $\lambda = 0$ とする前者は、それを $\lambda \geq 0$ とする後者の特別な場合と捉えることができる。それ以外のパラメータは共通である。

2.3.3 線型評価関数 ($\lambda = 0$)

この節ではリスク回避係数が $\lambda = 0$ の場合の具体的な最適解を求める。この場合、評価関数内の二次式の項は剥落し線型評価関数となる。

例 2.3.1 (スイッチ領域の特定 (1)).

本稿の問題で $\lambda = 0$ の場合の具体的な最適解を求めるためには、状態変数空間上の継続・スイッチ領域の構造を明らかにしなくてはならない。式 (2.1.25) で継続領域とスイッチ領域を抽象的に示したが、領域の構造は以下の定理により初めて特定される。

次の定理 2.3.1 は、Suzuki [2016] の Theorem 3.6 でより直接的な証明を行っているが、本稿では仮定 2.2.1 を意識した証明を行う。この手法は評価関数が二次式の拡張された問題でも用いられる、より抽象度の高いアプローチであり、連続同時スイッチを意識した汎用的な手法である。

定理 2.3.1 (スイッチ領域の構造).

パラメータを $z_n^{\xi\hat{\xi}}$, $\xi \in \mathbb{I}$, $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$, n ($1 \leq n \leq +\infty$) とするとき、スイッチ領域 $S_n^{\xi\hat{\xi}}$ は次のように表される。

$$S_n^{\xi\hat{\xi}} = \begin{cases} (-\infty, z_n^{0,1}], & \cdots (\xi, \hat{\xi}) = (0, 1), (-\infty < z_n^{0,1} < 0), \\ [z_n^{0,-1}, +\infty), & \cdots (\xi, \hat{\xi}) = (0, -1), (0 < z_n^{0,-1} < +\infty), \\ [z_n^{1,0}, +\infty), & \cdots (\xi, \hat{\xi}) = (1, 0), (0 < z_n^{1,0} < +\infty), \\ (-\infty, z_n^{-1,0}], & \cdots (\xi, \hat{\xi}) = (-1, 0), (-\infty < z_n^{-1,0} < 0) \end{cases} \quad (2.3.14)$$

さらにパラメータに関して次のような表現が可能である。

$$z_n^1 \equiv -z_n^{-1,0} = z_n^{1,0} > 0, \quad (2.3.15)$$

$$z_n^0 \equiv z_n^{0,-1} = -z_n^{0,1} > 0 \quad (2.3.16)$$

証明.

この問題では式 (2.2.34) がそれぞれのレジーム $\xi \in \mathbb{I}$ 毎に成立しているため、対応するスイッチ領域 S_n^{ξ} , $\xi \in \mathbb{I}$ は各 $\forall n \geq 1$ に対し空集合ではない。またそれぞれのレジーム $\xi^{(p+1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p)})$, $\xi^{(p)} \in \mathbb{I}$, $p = 0, \dots, m-1$, $m = 1, 2$ に対して参照領域は以下で表される。

$$Q_m^{\xi^{(0)}\xi^{(m)}} = \{z | m(\xi^{(0)} - \xi^{(m)})z \geq \frac{\delta m K}{\sqrt{\theta\sigma}} > 0\} \supset \mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)}\dots\xi^{(m)}} \quad m = 1, 2$$

まず仮定 2.2.1 の成立をこの問題の場合について確認する。

(i) $\xi^{(0)} = 0$ のとき

このとき $m = 1$ のみが該当する。すなわち高々 1 回の連続同時スイッチしか発生しない。このとき式 (2.2.6), (2.2.7) より、 $S_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} = \mathcal{O}_{n,1}^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}}$ 。これと補題 2.2.2 より、仮定 2.2.1 (ii) が成立。また $Q_m^{\xi^{(0)}\xi^{(m)}} = Q_1^{0\pm 1}$ と表現され、それぞれ $Q_1^{0-1} = \{z | z \leq -\frac{\delta K}{\sqrt{\theta\sigma}}\}$, $Q_1^{0-1} = \{z | z \geq \frac{\delta K}{\sqrt{\theta\sigma}}\}$ であり、両集合は互いに素なため仮定 2.2.1 (i) が成立し、仮定 2.2.1 全体が成立。

(ii) $\xi^{(0)} = \pm 1$ のとき

この場合 $m = 1, 2$ が該当する。つまり 2 連続同時スイッチの可能性はある。ただ $\xi^{(1)} = 0$ のみが可能であり、 $Q_1^{10} = \{z | z \geq \frac{\delta K}{\sqrt{\theta\sigma}}\}$, $Q_1^{-10} = \{z | z \leq -\frac{\delta K}{\sqrt{\theta\sigma}}\}$ である。よって $Q_1^{\pm 10} = Q_1^{0\mp 1}$ が成立し、これは $Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} \supset Q_1^{\xi^{(1)}\xi^{(2)}}$ を満たすため命題 2.2.1 より仮定 2.2.1 (ii) が成立する。また集合 $\mathcal{A}(\xi^{(0)}) = \{0\}$ は単要素集合であるため仮定 2.2.1 (i) も成立。

(iii) 上記 (i), (ii) より 仮定 2.2.1 が成立。

これにより、定理 2.2.2 の前提は満たされた。またそれぞれの参照領域 $Q_1^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} (\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)}))$ が 1 個の連結領域で構成されているため、定理 2.2.2 よりスイッチ領域 $S_n^{\xi^{(0)}\xi^{(1)}} (\xi^{(1)} \in \mathcal{A}(\xi^{(0)}))$ それぞれが 1 個の連結領域になる。これにより最適継続領域・スイッチ領域の実数空間上の構造が明らかになったため、問題は領域境界という未定係数を求める代数の問題に帰着した。すなわち、未定係数を含む連立方程式をたて、それを解くという計算問題である (Suzuki [2016] 参照)。

それぞれの参照領域及び対応するスイッチ領域の関係は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1^{10} &= \mathcal{Q}_1^{0-1} = \left[\frac{\delta K}{\sqrt{\theta\sigma}}, +\infty \right) \supset \mathcal{S}_n^{10}, \mathcal{S}_n^{0-1}, & \forall n \geq 1 \\ \mathcal{Q}_1^{-10} &= \mathcal{Q}_1^{01} = \left(-\infty, -\frac{\delta K}{\sqrt{\theta\sigma}} \right] \supset \mathcal{S}_n^{-10}, \mathcal{S}_n^{01}, & \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

最終的にはこれらの関係に基づき継続領域 \mathcal{C}_n^ξ 及びスイッチ領域 \mathcal{S}_n^{ξ} を数値計算により特定することになる。それぞれの未定係数 $z_n^0 \geq z_n^1 \geq \frac{\delta K}{\sqrt{\theta\sigma}} > 0$, $n \geq 1$ 及びそれぞれのレジーム $\xi^{(0)}$ に対して、対応する領域の構造を示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \xi^{(0)} = 1 : \mathcal{C}_n^1 &= (-\infty, z_n^1), & \mathcal{S}_n^{10} &= [z_n^1, +\infty), \\ \xi^{(0)} = 0 : \mathcal{C}_n^0 &= (-z_n^0, z_n^0), & \mathcal{S}_n^{0-1} &= [z_n^0, +\infty), \quad \mathcal{S}_n^{01} = (-\infty, -z_n^0], \\ \xi^{(0)} = -1 : \mathcal{C}_n^{-1} &= (-z_n^1, +\infty), & \mathcal{S}_n^{-10} &= (-\infty, -z_n^1] \end{aligned}$$

□

式 (2.2.6) で示したような、スイッチ領域の最終スイッチ先継続領域別分解を $n \geq 1$ に対して行くと、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{10} &= \mathcal{O}_{n,1}^{10} \oplus \mathcal{O}_{n,2}^{10-1} = [z_n^1, z_{n-1}^0] \oplus [z_{n-1}^0, +\infty), \\ \mathcal{S}_n^{-10} &= \mathcal{O}_{n,1}^{-10} \oplus \mathcal{O}_{n,2}^{-101} = (-z_{n-1}^0, -z_n^1] \oplus (-\infty, -z_{n-1}^0], \\ \mathcal{S}_n^{0\pm 1} &= \mathcal{O}_{n,1}^{0\pm 1}. \end{aligned}$$

求められた最適スイッチ戦略を図2.2に示す (出所 Figure 1 in Suzuki [2018])。この図からスイッチ領域の構造は次に示すように確認できる。

取引コストがない場合、期待リターンを最大化する戦略とは、状態変数 Z_t の位置が平均回帰過程の長期平均 μ を下回っている時に long、上回っているときには short のポジションを取る戦略であると考えられる。すなわち $\mu = 0$ とすると、 $\xi_t = -\text{sgn}(Z_t)$ つまり原点 $z = 0$ を横切る度にポジションを反転させる戦略である。この戦略によると、ブラウン運動は原点を横切る際、横切る回数すなわち取引回数が無限回になり現実的でない。またこの戦略は取引コストを考慮に入れると最適でなくなってしまう。

取引コストがある場合の最適投資戦略は、long ポジションと、short ポジションの切り替えの間に緩衝的な状態として、square ポジションが入る (図2.2)。すなわち、long ポジションから直接 short ポジションへのスイッチに比べてコストが半分で済む square ポジションへの推移を間に挟むことにより、細かな往復運動による取引コストの増加を抑制する効果が得られている。中間的なレジームを設けることにより、もし再度 long に戻りするのが最適となるような場合には、コストを半分節約できることになり、これは可能な投資戦略の選択肢に対する制約条件の緩和に相当し、値関数の水準も改善されることになる。これが、2 レジームを、3 レジームに拡張した効果であると考えられる。

また、その square ポジションで居続けるのが最適な領域の外側には、安定的 long(short) ポジション領域が無限遠まで広がっている。この安定的レジーム領域では、現状のポジションにかかわらず瞬時に安定的なレジームのポジションにスイッチするのが最適であり、それ以外のポジションで存在することができないような領域である。

また、連続同時スイッチ領域の具体例は例えば、図2.2の z 軸の両外側の領域のようなケースである。この図で例えば $z \geq z_{n-1}^0$ の領域でレジーム $\xi = 1$ のとき、この領域は $z \in \mathcal{S}_n^{10}$ であるため、一旦は瞬時に (滞在時間 0 で) $\xi = 0$ にスイッチされる。 z の位置は同じ場所である。しかしスイッチ先のレジーム $\xi = 0$ にお

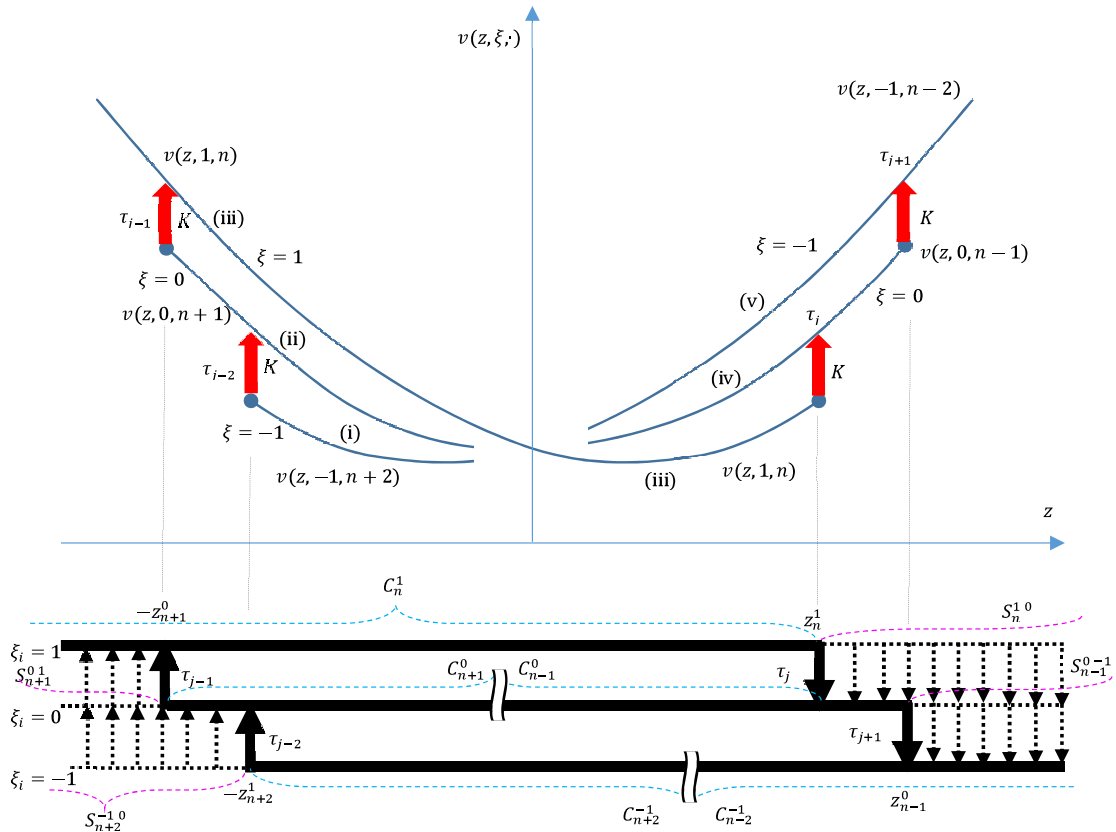


図 2.2 例2.3.1の参照領域：線型評価関数の場合（出所）Suzuki [2018] Figure 1

線型評価関数問題の最適戦略の振る舞いの概要: スイッチ権利回数 $n + 2$ から $n - 2$ までの値関数 $v(z)$ のグラフを上図に示す。下の図では $\{-1, 0, 1\}$ に属する 3 個のレジーム ξ それぞれに対して z 軸上を継続領域とスイッチ領域に分け、さらにスイッチ領域はその最適スイッチ戦略によるレジーム遷移先を矢印で示した。

いて同じ場所で $z \in S_{n-1}^{0,-1}$ であるため更に瞬時に（滞在時間 0 で） $\xi = -1$ に連続スイッチされる。このとき式 (2.2.1)(2.2.2) の表現を用いると、位置 z は $z \in \mathcal{O}_{n,2}^{10,-1} = S_n^{10} \cap S_{n-1}^{0,-1} \cap C_{n-2}^{-1}$ と表現される。つまり領域 $\mathcal{O}_{n,m}^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}}$ で $m \geq 2$ の場合が瞬時連続スイッチ領域である。最適スイッチ問題の具体的な解を一般的な n に対して求めたが、ここでそれらのうちの特徴的な n に関して解の構造を確認する。

2.3.4 個別事例研究 ($n = 1, \lambda = 0$)

まず $n = 1$ のケースである。 $n = 1, \xi = \pm 1$ および $n = 1, \xi = 0$ のケース別に分けて以下に示す。

2.3.4.1 ポジション最適清算問題 ($n = 1, \xi = \pm 1, \lambda = 0$)

この問題は、予め保有しているポジションを清算する最適な戦略を求める問題に相当する。 $\xi = 1$ が買持ちポジションの精算問題で、 $\xi = -1$ が売りポジションの精算問題である。

値関数は式 (2.1.10), (2.1.11) で $n = 1, \xi = \pm 1$ とおいたものであり、さらに $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \equiv +\infty$,

$\mathcal{T}_{t_0} = \{\tau_1\}$, $\xi = \xi_{\tau_0} = \xi_{t_0} \in \{\pm 1\}$, $\tau \equiv \tau_1$, $\xi_{\tau_1} = \hat{\xi} \in \{0\}$ とおくことにより、

$$\begin{aligned} v(z, \xi, 1) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t_0}} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} \xi dX_s - e^{-\delta(\tau-t_0)} K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t_0}} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s; \xi) ds - e^{-\delta(\tau-t_0)} K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau^*} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s; \xi) ds - e^{-\delta(\tau^*-t_0)} K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

と計算される。ただし τ^* は τ の最適スイッチ戦略による取引タイミング (停止時) である。動的計画原理 (2.1.23) により以下が成立する。

$\forall z \in \mathbb{R}, \forall t_1 > t_0$ に対して、

$$\left\{ \begin{array}{l} v(z, \xi, 1) \geq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau^* \wedge t_1} e^{-\delta(s-t_0)} f(Z_s; \xi) ds + e^{-\delta(\tau^* \wedge t_1 - t_0)} v(Z_{\tau^* \wedge t_1}, \xi, 1) \mathbf{1}_{\{t_1 < \tau^*\}} \right. \\ \quad \left. - e^{-\delta(\tau^* \wedge t_1 - t_0)} K \mathbf{1}_{\{t_1 \geq \tau^*\}} \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \cdots (\text{等号は適当な } \tau^* > t \text{ に対して } z \in C_1^\xi \text{ のとき}), \\ v(z, \xi, 1) \geq -K \cdots (\text{等号は } z \in S_1^\xi, \tau^* = t_0 \text{ のとき}). \end{array} \right.$$

定理2.1.4に従い、値関数 v は次の変分不等式を解く。

$$\min[\delta v - \mathcal{L}v - f, v + K] = 0 \quad (2.3.18)$$

式 (2.3.5) 及び定理2.3.1より、

$$v(z, \pm 1, 1) = \begin{cases} C_n^1 H_\nu(\mp z) \mp k_1 z, & \cdots ((-\infty, z_1^1)/(-z_1^1, +\infty); \text{継続}; \xi_t = \pm 1), \\ -K, & \cdots ([z_1^1, +\infty)/(-\infty, -z_1^1]; \text{清算}; \xi_t : \pm 1 \rightarrow 0). \end{cases} \quad (2.3.19)$$

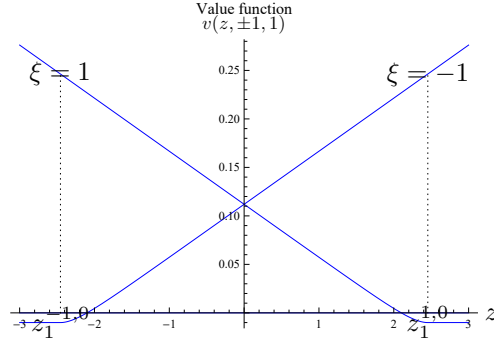
対応する2つの値関数 $v(z, \pm 1, 1)$ のグラフを図2.3に示す。用いたパラメータの値を表2.1に示す。継続領域はそれぞれ $C_1^1 = (-\infty, z_1^1)$, $C_1^{-1} = (-z_1^1, \infty)$ である。継続領域境界は $z_1^{1,0} = -z_1^{-1,0} = z_1^1 \cong 2.42$ となり、 $\xi = 1$ のとき $z = z_1^{1,0}$ が買持ちポジションの最適な売りタイミングになる。つまり $z \geq z_1^{1,0}$ のとき即座に保有ポジションの売りが発生する。

μ	σ	θ	δ	K
0	0.3	30	0.01	0.01

表 2.1 モデルのパラメータ数値例 (出所) Suzuki [2018] Table 1

2.3.4.2 ポジション最適構築問題 ($n = 1, \xi = 0, \lambda = 0$)

この問題は、ポジションを保有していない状態から、ポジションをいつ構築し、ポジションの買持ち・売持ちの選択肢のどちらが最適なのかを求める問題に相当する。評価関数は式 (2.1.10), (2.1.11) で $n = 1, \xi = 0$ とおいたものであり、さらに $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \equiv +\infty$, $\mathcal{T}_{t_0} = \{\tau_1\}$, $\xi = \xi_{\tau_0} = \xi_{t_0} \in \{0\}$, $\tau \equiv \tau_1$,

図 2.3 値関数 $v(z, \pm 1, 1)$ (出所 Suzuki [2016] Figure 3)

値関数 $v(z, \pm 1, 1)$ に対応するスイッチ領域境界は、 $\pm z_1^1 = z_1^{\pm 1, 0}$ (複号同順), $z_1^{1, 0} = -z_1^{-1, 0} = z_1^1 \cong 2.42$.

$\xi_{\tau_1} = \hat{\xi} \in \{\pm 1\}$ とおくと値関数は、

$$\begin{aligned} v(z, 0, 1) &= \sup_{\{\tau, \hat{\xi}\} \in \mathbb{A}_1(\xi)} \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} \hat{\xi} dX_s - e^{-\delta(\tau-t_0)} K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ &= \sup_{\{\tau, \hat{\xi}\} \in \mathbb{A}_1(\xi)} \mathbb{E}_z \left[e^{-\delta(\tau-t_0)} \left(\mathbb{E}_{Z_{\tau}} \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-\delta(s-\tau)} \hat{\xi} dX_s - K \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

式 (2.1.17) より、

$$= \sup_{\{\tau, \hat{\xi}\} \in \mathbb{A}_1(\xi)} \mathbb{E}_z \left[e^{-\delta(\tau-t_0)} \{v(Z_{\tau}, \hat{\xi}, 0) - K\} \right].$$

τ_1 の最適スイッチタイミングを τ^* とおくと、動的計画原理 (2.1.23) により次が成立する。

$\forall z \in \mathbb{R}, \forall t_1 \geq t_0,$

$$\begin{cases} v(z, 0, 1) \geq \mathbb{E}_z \left[e^{-\delta(t_1-t_0)} v(Z_{t_1}, 0, 1) \mathbf{1}_{\{t_1 < \tau^*\}} + e^{-\delta(\tau^*-t_0)} \{v(Z_{\tau^*}, \hat{\xi}_{\tau^*}^*, 0) - K\} \mathbf{1}_{\{t_1 \geq \tau^*\}} \right] \\ \quad \dots (\text{等号は適当な } \tau^* > t_0 \text{ に対して } z \in \mathcal{C}_1^0 \text{ のとき}), \\ v(z, 0, 1) \geq \max_{\hat{\xi} \in \{\pm 1\}} \{v(z, \hat{\xi}, 0) - K\} \dots (\text{等号は } z \in \mathcal{S}_1^0, \tau^* = t_0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2.3.21)$$

定理 2.1.4 に従い、値関数は次の変分不等式を解く。

$$\min \left[\delta v(z, 0, 1) - \mathcal{L}v(z, 0, 1) - f(z, 0), v(z, 0, 1) - \max_{\hat{\xi} \in \mathbb{A}(0)} \{v(z, \hat{\xi}, 0) - K\} \right] = 0 \quad (2.3.22)$$

式 (2.3.5) 及び定理 2.3.1 より、

$$v(z, 0, 1) = \begin{cases} C_n^0 \{H_{\nu}(z) + H_{\nu}(-z)\}, & \dots (|z| < z_1^0; \text{継続: } \xi_t = 0), \\ k_1 z - K, & \dots (z \geq z_1^0; \text{売り } \xi_t : 0 \rightarrow -1), \\ -k_1 z - K, & \dots (z \leq -z_1^0; \text{買い } \xi_t : 0 \rightarrow 1). \end{cases} \quad (2.3.23)$$

値関数 $v(z, 0, 1)$ のグラフを図 2.4 に示す。継続領域は $\mathcal{C}_1^0 = (z_1^{0,1}, z_1^{0,-1})$ である。表 2.1 のデータをあてはめるとスイッチ領域境界は $-z_1^{0,1} = z_1^{0,-1} \cong 2.59$ と計算される。

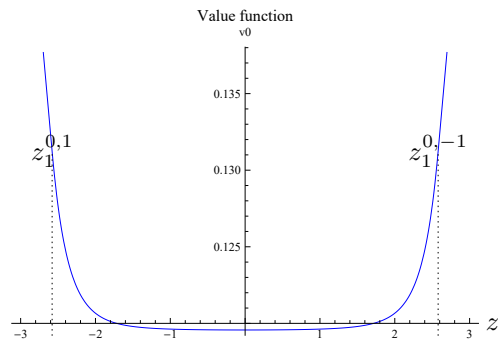


図 2.4 値関数 $v(z, 0, 1)$ (出所) Suzuki [2016] Figure 4

値関数 $v(z, 0, 1)$ に対応するスイッチ領域境界は $z_1^{0,-1} = -z_1^{0,1} \cong 2.584$ であり、これは元の x 座標で $x_1^{0,-1} = -x_1^{0,1} \cong 0.142 \cong 0.47\sigma$ に相当する。

2.3.5 個別事例研究 ($n = 2, \lambda = 0$)

$n = 2$ の問題は、2回スイッチする権利がある問題である。最初にポジションを保有している状態から始める問題 ($\lambda = 0$) か、保有していない状態から始める問題 ($\lambda = 1$) かに分けて以下に示す。

2.3.5.1 ポジション構築権利付きのポジション最適解消問題: ($n = 2, \xi \in \{\pm 1\}, \lambda = 0$)

この問題は、予め保有しているポジション ($\xi \in \{\pm 1\}$) を解消した後、再び構築 ($\hat{\xi} = 1$ または $\hat{\xi} = -1$ を選択可能) する投資戦略を最適化する問題である。

式 (2.1.10), (2.1.11) で $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 = +\infty$, $\mathcal{T}_{t_0} = \{\tau_1\}$, $\xi = \xi_{\tau_0} = \xi_{t_0} \in \{\pm 1\}$, $\xi_{\tau_1} = \hat{\xi}_{\tau_1} \in \{0\}$, $\xi_{\tau_2} \in \{\pm 1\}$ とおくことにより、

$$\begin{aligned} v(z, \xi, 2) &= \sup_{\{t_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \in \mathcal{T}_{t_0}, \hat{\xi}_{\tau_2} \in \{\pm 1\}\}} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau_1} e^{-\delta(s-t_0)} \xi dX_s - e^{-\delta(\tau_1-t_0)} K \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_2}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)} \hat{\xi}_{\tau_2} dX_s - e^{-\delta(\tau_2-t_0)} K \middle| Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ &= \sup_{\{t_0 \leq \tau_1 \in \mathcal{T}_{t_0}\}} \mathbb{E}_z \left[\int_{t_0}^{\tau_1} e^{-\delta(s-t_0)} \xi dX_s + e^{-\delta(\tau_1-t_0)} \left(\right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sup_{\{\tau_2 \geq \tau_1 \in \mathcal{T}_{t_0}, \hat{\xi}_{\tau_2} \in \{\pm 1\}\}} \mathbb{E}_{Z_{\tau_1}} \left[\int_{\tau_2}^{\infty} e^{-\delta(s-\tau_1)} \hat{\xi}_{\tau_2} dX_s - e^{-\delta(\tau_2-\tau_1)} K \right] - K \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

式 (2.3.20) を用いて、

$$= \sup_{\{t_0 \leq \tau_1 \in \mathcal{T}_{t_0}\}} \mathbb{E}_z \left[\int_{t_0}^{\tau_1} e^{-\delta(s-t_0)} \xi dX_s + e^{-\delta(\tau_1-t_0)} \left(v(Z_{\tau_1}, 0, 1) - K \right) \right].$$

τ_1 の最適スイッチタイミングを τ_1^* とおくと動的計画原理より次が成立する。

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{R}, \forall t_1 \geq t_0, \\ \left\{ \begin{array}{l} v(z, \xi, 2) \geq \mathbb{E}_z \left[\int_{t_0}^{\tau_1^* \wedge t_1} e^{-\delta(s-t_0)} \xi dX_s + e^{-\delta(t_1-t_0)} v(Z_{t_1}, \xi, 2) \mathbf{1}_{\{t_1 < \tau_1^*\}} \right. \\ \quad \left. + e^{-\delta(\tau_1^*-t_0)} \{v(Z_{\tau_1^*}, 0, 1) - K\} \mathbf{1}_{\{t_1 \geq \tau_1^*\}} \right] \\ \quad \dots (\text{等号は適当な } \tau_1^* > t_0 \text{ に対して } z \in \mathcal{C}_2^\xi \text{ のとき}), \\ v(z, \xi, 2) \geq v(z, 0, 1) - K \dots (\text{等号は } z \in \mathcal{S}_2^\xi, \tau_1^* = t_0 \text{ のとき}) \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.3.25)$$

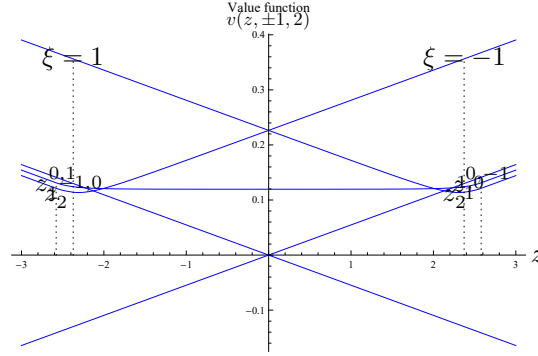
定理2.1.4に従い同様に値関数は次の変分不等式を解く。

$$\min[\delta v(z, \xi, 2) - \mathcal{L}v(z, \xi, 2) - f(z, \xi), v(z, \xi, 2) - \{v(z, 0, 1) - K\}] = 0 \quad (2.3.26)$$

具体的な値関数を図2.5に示す。

2.3.5.2 ポジション解消権利付きのポジション最適構築問題: [$n = 2, \xi \in \{0\}, \lambda = 0$]

この問題は、ポジションを構築 ($\hat{\xi} = 1$ または $\hat{\xi} = -1$ を選択可能) した後、保有しているポジションを再び解消する問題である。

図 2.5 値関数 $v(z, \pm 1, 2)$ (出所 Suzuki [2018] Figure 2)

値関数 $v(z, \pm 1, 1)$ のスイッチ領域境界は $z_1^{1,0} = -z_1^{-1,0} = z_1^1 \cong 2.42$.

式 (2.1.10), (2.1.11) で $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 = +\infty$, $\mathcal{T}_{t_0} = \{\tau_1\}$, $\xi = \xi_{\tau_0} = \xi_{t_0} \in \{0\}$, $\xi_{\tau_1} = \hat{\xi} \in \{\pm 1\}$, $\xi_{\tau_2} = \bar{\xi} \in \{0\}$ とおくことにより、

$$\begin{aligned} v(z, 0, 2) &\equiv \sup_{\{t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \in \mathcal{T}_{t_0}, \xi_{\tau_1} \in \{\pm 1\}\}} \mathbb{E} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\delta(s-t_0)} \hat{\xi}_{\tau_1} dX_s - e^{-\delta(\tau_1-t_0)} K - e^{-\delta(\tau_2-t_0)} K \mid Z_{t_0} = z, \xi_{t_0} = \xi \right] \\ &= \sup_{\{t_0 \leq \tau_1 \in \mathcal{T}_{t_0}, \hat{\xi}_{\tau_1} \in \{\pm 1\}\}} \mathbb{E}_z \left[e^{-\delta(\tau_1-t_0)} \left(\sup_{\{\tau_2 \geq \tau_1 \in \mathcal{T}_{t_0}\}} \mathbb{E}_{Z_{\tau_1}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\delta(s-\tau_1)} \hat{\xi}_{\tau_1} dX_s - e^{-\delta(\tau_2-\tau_1)} K \right] - K \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

式 (2.3.17) より、

$$= \sup_{\{t_0 \leq \tau_1 \in \mathcal{T}_{t_0}, \hat{\xi}_{\tau_1} \in \{\pm 1\}\}} \mathbb{E}_z [e^{-\delta(\tau_1-t_0)} \{v(Z_{\tau_1}, \hat{\xi}_{\tau_1}, 1) - K\}].$$

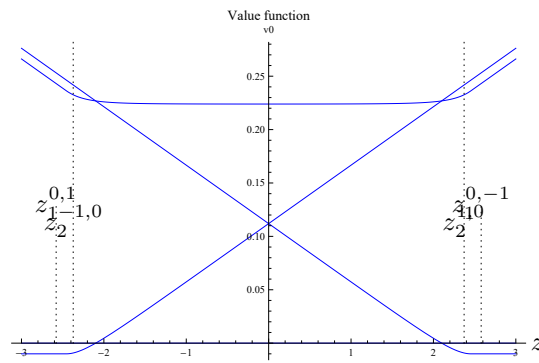
τ_1 の最適スイッチタイミングを τ_1^* 、のそスイッチ先を $\hat{\xi}_{\tau_1^*}$ とおくと動的計画原理より、

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{R}, \forall t_1 \geq t_0, \\ v(z, 0, 2) \geq \mathbb{E}_z [e^{-\delta(t_1-t_0)} v(Z_{t_1}, 0, 2) \mathbf{1}_{\{t_1 < \tau_1^*\}} + e^{-\delta(\tau_1^*-t_0)} \{v(Z_{\tau_1^*}, \hat{\xi}_{\tau_1^*}, 1) - K\} \mathbf{1}_{\{t_1 \geq \tau_1^*\}}] \\ \quad \dots (\text{等号は適当な } \tau_1^* > t_0 \text{ に対して } z \in \mathcal{C}_2^0 \text{ のとき}), \\ v(z, 0, 2) \geq \max_{\hat{\xi} \in \{\pm 1\}} \{v(z, \hat{\xi}, 1) - K\} \dots (\text{等号は } z \in \mathcal{S}_2^0, \tau_1^* = t_0 \text{ のとき}). \end{cases} \quad (2.3.28)$$

定理 2.1.4 に従い同様に値関数は次の変分不等式を解く。

$$\min [\delta v(z, 0, 2) - \mathcal{L}v(z, 0, 2) - f(z, 0), v(z, 0, 2) - \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(0)} \{v(z, \hat{\xi}, 0) - K\}] = 0 \quad (2.3.29)$$

具体的な値関数を図 2.6 に示す。

図 2.6 値関数 $v(z, 0, 2)$

値関数 $v(z, 0, 1)$ のスイッチ領域境界は $z_1^{0,-1} = -z_1^{0,1} \cong 2.584$ であり、元の座標で $x_1^{0,-1} = -x_1^{0,1} \cong 0.142 \cong 0.47\sigma$ に相当。

2.3.6 個別事例研究 (一般の $n < +\infty, \lambda = 0$)

スイッチ権利数が一般の n 個の問題は、最初にポジションを保有している状態から始める問題 ($\xi = 0$) か、保有していない状態から始める問題 ($\xi = \pm 1$) かに分かれる。 n が偶数か奇数かによって初期ポジション、最終ポジションの関係が決まる。式 (2.3.5) に従い、 $\xi \in \{\pm 1\}$ と $\xi = 0, n = 1, 2, \dots, 10$, の場合の有限回繰返しスイッチ問題の値関数 $v(z, \xi, n)$ のグラフをそれぞれ図 2.7, 2.8 に示す。パラメータは表 2.1 を用いている。

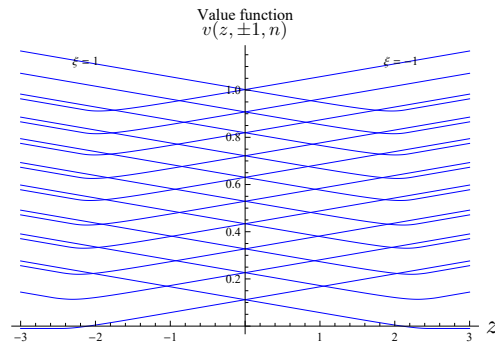


図 2.7 値関数: $v(z, \pm 1, n)$ (出所) Suzuki [2016] Figure 5

20 個の値関数 $v(z, \pm 1, n), n = 1, 2, \dots, 10$ をそれぞれ描画した。縦軸付近で減少しているグラフ群が初期レジーム $\xi = 1$ に相当し、増加しているグラフ群が初期レジーム $\xi = -1$ に相当。パラメータは表 2.1 を用いている。

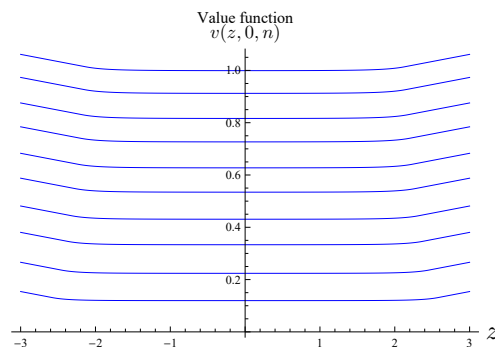


図 2.8 値関数: $v(z, 0, n)$ (出所) Suzuki [2016] Figure 6

初期レジームが $\xi = 0$ の場合の 10 個の値関数 $v(z, 0, n), n = 1, 2, \dots, 10$ をそれぞれ描画している。

補題 2.1.4 より、値関数 v は n に関して非減少になっている。スイッチ権利回数はスイッチオプション数に相当し、その戦略の価値にオプション価値分が加算されているはずである。そのため値関数は n の非減少関数であると考えられる。

2.3.7 個別事例研究 ($n \rightarrow +\infty, \lambda = 0$)

繰返しスイッチ問題の繰返し数 n を無限回に近づける場合 ($n \rightarrow +\infty$) を考える。つまり本稿の問題でスイッチ回数に制約を付けない場合である。Suzuki [2016] Lemma 3.7, Corollary 3.3 では解を決定するための以下のような未定係数の単調収束性を示した。

$$\begin{aligned} z_n^0, z_n^1 &\rightarrow z_\infty^0 = z_\infty^1 > 0 \\ C_n^0 &\rightarrow C_\infty^0 \\ C_n^1 &\rightarrow C_\infty^1 \end{aligned}$$

これにより有限の各点 z 毎に、値関数 v も $n \rightarrow +\infty$ により収束することがわかる。また、この解を収束させたものは、最初からスイッチ回数に制限のない問題 (無限回スイッチ問題) を解いた場合の解に一致することが示される。つまり有限回数スイッチ問題の回数 n を無限に近づけた解は、無限回スイッチ問題の解に等しい。定理2.3.1よりこの問題の解による継続・スイッチ領域は、レジーム別に次のように表現される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 : \\ \xi = 1 : \\ \xi = -1 : \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} z \geq z_\infty^0, \quad \dots (\text{switching: } \xi : 0 \rightarrow -1), \\ -z_\infty^0 < z < z_\infty^0, \quad \dots (\text{continuation}), \\ z \leq -z_\infty^0, \quad \dots (\text{switching: } \xi : 0 \rightarrow 1), \\ z \geq z_\infty^0, \quad \dots (\text{switching: } \xi : 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1), \\ z < z_\infty^0, \quad \dots (\text{continuation}), \\ z \leq -z_\infty^0, \quad \dots (\text{switching: } \xi : -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1), \\ z > -z_\infty^0, \quad \dots (\text{continuation}) \end{array} \right.$$

初期レジーム $\xi \in \mathbb{I}$ 別に、実数全域 \mathbb{R} は次のように継続・スイッチ領域にそれぞれ分割される。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_\infty^1 = [z_\infty^1, +\infty), \\ S_\infty^0 = (-\infty, -z_\infty^1] \cup [z_\infty^1, +\infty), \\ S_\infty^{-1} = (-\infty, -z_\infty^1], \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} C_\infty^1 = (-\infty, z_\infty^1), \\ C_\infty^0 = (-z_\infty^1, z_\infty^1), \\ C_\infty^{-1} = (-z_\infty^1, \infty) \end{array} \right.$$

$S_\infty^0 = S_\infty^1 \cup S_\infty^{-1}$ であるため、 $S_\infty^{\pm 1} \subset S_\infty^0$ つまり $\pm 1 \rightarrow 0$ による遷移先で直ちに $0 \rightarrow \mp 1$ による連続同時スイッチが発生する。初期レジームが $\xi \in \{\pm 1\}$ のとき、それ以降、プロセスがレジーム $\xi = 0$ に正の期間留まることはない。つまり $\mathcal{O}_{\infty,1}^{\pm 1,0} = \phi$ である。ただ、 $C_\infty^0 \neq \phi$ であるため、初期レジームを $\xi = 0$ とし、スタートを $z \in C_\infty^0$ とするときのみ、レジーム $\xi = 0$ に正の期間滞在することができる。

繰返しスイッチ数 n に制約のない Gatev et al. [2006] で研究されていた、実務でよく用いられている pairs-trading 戦略は、価格乖離過程が長期平均に回帰した時点でポジションを解消し、再び乖離過程が長期平均からある程度乖離した時点で、再収束を目論んでポジションを再構築するものであった。この戦略の場合、ポジションを解消するタイミングと、再びポジションを構築するタイミングは異なるものであった。しかし $n = \infty$ のとき本稿のモデルが示す最適ポジション解消タイミングは次の最適ポジション構築のタイミングと同時であった。継続領域境界で同時連続スイッチが発生するのは $n = \infty$ のときのみで、 $n < \infty$ のときは square のポジション ($\xi = 0$) は最適戦略に明示的に表われる。

表2.1のデータを用いて数値計算すると、最適スイッチ発動位置は $z_\infty^0 \cong 0.691$ 、すなわち x 座標で $x_\infty^0 \cong 0.0379 \cong 0.126\sigma$ (式 (2.1.2)) になる。しかし文献 Gatev et al. [2006] では 2σ がポジション構築位置として用いられており、また解消位置は 0σ となっており、本稿の最適戦略とは大きく異なる戦略である。

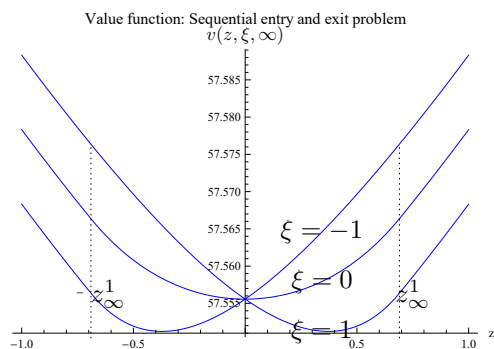


図 2.9 値関数 $v(z, \xi, \infty)$, $\xi = \{-1, 0, 1\}$ (出所) Suzuki [2016] Figure 7

それぞれのレジーム 3 種類に対応する値関数 $v(z, 0, \infty)$, $v(z, \pm 1, \infty)$ を領域境界 $\pm z_\infty^1$ とともに示す。継続領域はそれぞれ、 $C_\infty^0 = (-z_\infty^1, z_\infty^1)$, $C_\infty^1 = (-\infty, z_\infty^1)$, $C_\infty^{-1} = (-z_\infty^1, \infty)$ である。

2.3.8 二次評価関数 ($\lambda > 0$)

ここまで評価関数が、平均回帰する確率過程の状態変数 Z_t の線型関数である場合について、最適解の性質を検証した。この節では、その評価関数に Z_t の二次式が加わった場合 ($\lambda > 0$) について考察する。すなわちリスクを考慮したモデルの最適解である。

例 2.3.2 (スイッチ領域の特定 (2)).

この例では、 $\lambda > 0$ の場合を考える。

(i) 非空集合条件

補題 2.2.3 によると、次の条件 (2.3.30) を満たすような $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{I}$, $z \in \mathbb{R}$ が存在すれば、 $\forall n \geq 1$, $S_n^\xi \neq \phi$ のはずである。

$$\hat{v}(z, \xi) \leq \hat{v}(z, \hat{\xi}) - K \iff k_2(|\hat{\xi}| - |\xi|)z^2 + k_1(\hat{\xi} - \xi)z + \{k_0(|\hat{\xi}| - |\xi|) + K\} \leq 0 \quad (2.3.30)$$

ただし式 (2.1.17) より $\lambda > 0$ のため、 $k_2 > 0$ である。この条件を、 $(\xi, \hat{\xi})$ に基づき以下のように場合分けする。

1. $(\xi, \hat{\xi}) = (\pm 1, 0)$ のとき

関係式 (2.3.30) は次と同値である。

$$-k_2 z^2 \mp k_1 z + (K - k_0) \leq 0$$

$k_2 > 0$ のため、これは $z \in \mathbb{R}$ に必ず解を持つので、補題 2.2.3 より $S_n^{\pm 1} \neq \phi$, $\forall n \geq 1$.

2. $(\xi, \hat{\xi}) = (0, \pm 1)$ のとき

関係式 (2.3.30) は次と同値である。

$$k_2 z^2 \pm k_1 z + (K + k_0) \leq 0 \quad (2.3.31)$$

この二次式の判別式は、

$$D \equiv k_1^2 - 4\delta k_0(K + k_0)/\theta \quad (2.3.32)$$

$D < 0$ のとき、不等式 (2.3.31) の左辺は水平 z 軸と交わらないため、 $S_n^0 \neq \phi$ が $\forall n \geq 1$ について成り立つとは限らない。すなわち、与えられるパラメータによっては、レジーム $\xi = 0$ 上でスイッチ領域を持たない $n \geq 1$ が存在することもあり得る。そのためここでは、

$$D \geq 0 \iff 4\lambda(K + k_0) \leq \theta^2(2\theta + \delta)/(\delta + \theta)^2 \quad (2.3.33)$$

の場合を考える。このとき $S_n^0 \neq \phi, \forall n \geq 1$ 。この D の条件は、より具体的なパラメータの場合について、後に式 (4.3.7) によって検証される。

(ii) 参照領域 $Q_1^{\xi\hat{\xi}}$ について

参照領域 $Q_1^{\xi\hat{\xi}}$ を特定しよう。

$$\begin{aligned} z \in Q_1^{\xi\hat{\xi}} &\iff f(z, \hat{\xi}) - f(z, \xi) \geq \delta K \\ &\iff (|\xi| - |\hat{\xi}|) \frac{\lambda\sigma^2}{\theta} z^2 + (\xi - \hat{\xi})\sqrt{\theta}\sigma z - \delta K \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

ちなみに、 $\lambda = 0$ のときこの問題は線型評価関数の問題 (例 2.3.1) に縮退するため、 $\lambda > 0$ の場合のみを考えている。

1. $(\xi, \hat{\xi}) = (\pm 1, 0)$ のとき

式 (2.3.34) は次と同値 (複号同順)。

$$(z - p(\mp 1 + \sqrt{1+q}))(z - p(\mp 1 - \sqrt{1+q})) \geq 0$$

ここで $q := 4\delta\lambda K/\theta^2 > 0$, $p := \theta^{(3/2)}/(2\lambda\sigma)$ 。よって複号同順により、

$$Q_1^{\pm 10} = (-\infty, p(\mp 1 - \sqrt{1+q})] \cup [p(\mp 1 + \sqrt{1+q}), +\infty). \quad (2.3.35)$$

2. $(\xi, \hat{\xi}) = (0, \pm 1)$ のとき

さらに $q > 1$ のとき、補題 2.2.2 より、 $Q_1^{0\pm 1} = \phi \Rightarrow \mathcal{O}_{n,1}^{0\pm 1} = \phi$ 。また $\xi = 0$ からの連続同時スイッチはないため $\mathcal{O}_{n,1}^{0\pm 1} = S_n^0 = \phi$, $\mathcal{C}_n^0 = \mathbb{R}$ ($n \geq 0$)。つまりコスト K が巨大で $q > 1$ の場合、一旦 $\xi = 0$ に遷移すると、 n に関わらず再度 $\xi = \pm 1$ へとポジション構築されなくなる。

逆に $q \leq 1$ のとき、パラメータの前提としては、

$$\lambda K \leq \theta^2/(4\delta) \iff q \leq 1 \quad (2.3.36)$$

であるが、このとき式 (2.3.34) は次式と同値になる (複号同順)。

$$(z - p(\mp 1 + \sqrt{1-q}))(z - p(\mp 1 - \sqrt{1-q})) \geq 0$$

よって複号同順で、

$$Q_1^{0\pm 1} = [p(\mp 1 - \sqrt{1-q}), p(\mp 1 + \sqrt{1-q})]. \quad (2.3.37)$$

(iii) 仮定 2.2.1 成立の検証

$q \leq 1$ の前提を継続すると、 $\sqrt{1+q} - 1 < 1 - \sqrt{1-q}$, $q \in (0, 1]$ より、関係式

$$Q_1^{10} \supset Q_1^{0-1}, Q_1^{-10} \supset Q_1^{01} \quad (2.3.38)$$

が成立する (図2.10参照)。 $m \geq 1$ に対し、 m -回連続同時スイッチの全組合せは以下のようになる。

$$\begin{aligned} m = 1 : & (\xi^{(0)}, \xi^{(1)}) \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\} \\ m = 2 : & (\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in \{(1, 0, -1), (-1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

1. 仮定2.2.1 (ii) の検証

このため、命題2.2.1及び式 (2.3.38) より、以下のような仮定2.2.1 (ii),

$$Q_1^{\xi \hat{\xi}} \supset S_n^{\xi \hat{\xi}}, \quad \forall \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{I}, \forall n \geq 1$$

が成立する。

2. 仮定2.2.1 (i) の検証

$\xi = 0$ のとき、 $Q_1^{0-1} \cap Q_1^{01} = \phi$ 。 また $\xi = \pm 1$ のとき、 $\{\mathcal{A}(\xi)\}$ はそれぞれ単要素集合となるため仮定2.2.1 (i) が成立する。理解のため図2.10を参照。

以上により仮定2.2.1が成立することが確認された。

(iv) 連結スイッチ領域の特定

式 (2.3.37) より、参照領域 $Q_1^{0\pm 1}$ はそれぞれ単独の連結領域である。また式 (2.3.35) より、参照領域 $Q_1^{\pm 10}$ はそれぞれ2個の別々の連結領域から成るが、それらを次のように定義する。

$$Q_1^{\pm 10\{-\}} \equiv (-\infty, p(\mp 1 - \sqrt{1+q})] \quad (2.3.39)$$

$$Q_1^{\pm 10\{+\}} \equiv [p(\mp 1 + \sqrt{1+q}), +\infty) \quad (2.3.40)$$

ここで $Q_1^{\pm 10} = Q_1^{\pm 10\{+\}} \oplus Q_1^{\pm 10\{-\}}$ (複号同順)。 仮定2.2.1の成立により系2.2.3より、次に示すスイッチ領域は $n \geq 1$ に対しそれぞれ高々単独の連結領域となる。

$$S_n^{0\pm 1} \subset Q_1^{0\pm 1} \quad (2.3.41)$$

$$S_n^{\pm 10\{-\}} \subset Q_1^{\pm 10\{-\}} \quad (2.3.42)$$

$$S_n^{\pm 10\{+\}} \subset Q_1^{\pm 10\{+\}} \quad (2.3.43)$$

全レジーム $\xi \in \{0, \pm 1\}$ にわたり、全部で高々 6 個の連結スイッチ領域が存在することになる。これで各スイッチ領域の構造が特定された。この例の参照領域の構造を図2.10に示す。

補題2.1.5で示した値関数の対称性と同様に、最適戦略も対称となる。式 (2.3.37), (2.3.39), (2.3.40) の参照領域 $Q_1^{0\pm 1}$, $Q_1^{\pm 10}$ はそれぞれ原点を中心として対称である。

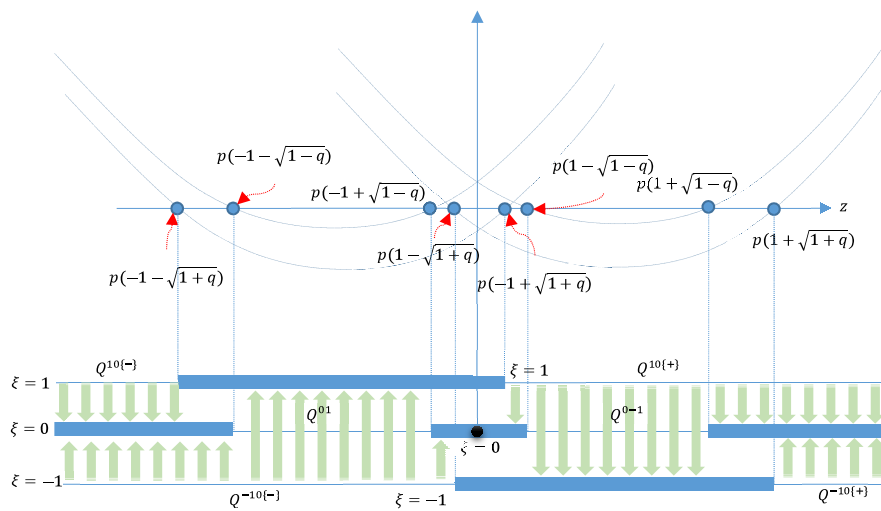


図 2.10 例2.3.2の参照領域の構造: 評価関数が二次式の場合 (出所) Suzuki [2021] Figure 2

式 (2.3.41), (2.3.42), (2.3.43) で示される 6 個の参照領域 $Q_1^{0\pm 1}$, $Q_1^{\pm 10\{\pm\}}$ それぞれには高々 1 個の連結スイッチ領域 $S_n^{0\pm 1}$, $S_n^{\pm 10\{\pm\}}$ しか含まれない。レジーム $\xi = 0$ の z -軸上の 3 個の連結継続領域が左から順に $C_n^{0\{-\}}$, $C_n^{0\{0\}}$, $C_n^{0\{+\}}$ である。補題2.1.5より各領域は左右対称である。この図は条件式 (2.3.33), (2.3.36) の成立を前提としている。

第3章

最適戦略の解釈と感応度分析

3.1 最適戦略の行動様式とリスク回避度の解釈

この節では前節までに取り扱った線型評価関数による最適スイッチ問題の最適戦略を理解しやすいように、確率的な動きの例として次の Scenario 1 を導入する。これは確率空間内の 1 事象に相当する一つの具体例である。\$j\$ を整数として、

$$\text{Scenario 1 : } \quad \xi_{\tau_{j-2}-} = -1, \quad \xi_{\tau_{j-1}-} = 0, \quad \xi_{\tau_j-} = 1, \quad \xi_{\tau_{j+1}-} = 0, \quad \xi_{\tau_{j+2}-} = -1. \quad (3.1.1)$$

この事象による確率過程 \$Z_t\$ の具体的な動きを追うため、図 2.2 の下図を参照する。この図でこのシナリオ例に対する一連のスイッチ履歴を確認する。

Scenario 1 による確率過程 \$Z_t\$ によるスイッチ手順を以下に示す。

1. \$Z_t \in \mathcal{C}_{n+2}^{-1}\$.

最初に確率過程 \$Z_t\$ は継続領域 \$\mathcal{C}_{n+2}^{-1}\$ 上にレジーム \$\xi_t = -1\$ (図 2.2 下図の一番下の水平線上) の状態で存在している。

2. \$\xi_{\tau_{j-2}-} = -1, Z_t \in \mathcal{C}_{n+2}^{-1}, t \in [\tau_{j-3}, \tau_{j-2})\$ から \$\xi_{\tau_{j-2}} = 0\$ へ。

その後、時点 \$t = \tau_{j-2}\$ に確率過程 \$Z_t\$ は継続領域境界 \$-z_{n+2}^1 \in \partial \mathcal{C}_{n+2}^{-1} \cap \mathcal{S}_{n+2}^{-1,0} \cap \mathcal{C}_{n+1}^0\$ に至り、レジーム \$\xi_{\tau_{j-2}} = 0\$ に遷移する。そして過程は下図中段の \$Z_t \in \mathcal{C}_{n+1}^0, t \in [\tau_{j-2}, \tau_{j-1})\$ 上を滞留する。

3. \$\xi_{\tau_{j-1}-} = 0, Z_t \in \mathcal{C}_{n+1}^0, t \in [\tau_{j-2}, \tau_{j-1})\$ から \$\xi_{\tau_{j-1}} = 1\$ へ。

その後、時点 \$t = \tau_{j-1}\$ に過程 \$Z_t\$ は継続領域境界 \$-z_{n+1}^0 \in \partial \mathcal{C}_{n+1}^0 \cap \mathcal{S}_{n+1}^{0,1} \cap \mathcal{C}_n^1\$ に至る。ここでレジーム \$\xi_{\tau_{j-1}} = 1\$ に遷移する。そして過程は \$Z_t \in \mathcal{C}_n^1, t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)\$ 上を滞留する。

4. \$\xi_{\tau_j-} = 1, Z_t \in \mathcal{C}_n^1, t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)\$ から \$\xi_{\tau_j} = 0\$ へ。

さらに時点 \$t = \tau_j\$ に過程 \$Z_t\$ は反対側にある継続領域境界 \$z_n^1 \in \partial \mathcal{C}_n^1 \cap \mathcal{S}_n^{1,0} \cap \mathcal{C}_{n-1}^0\$ まで至る。ここでレジーム \$\xi_{\tau_j} = 0\$ に遷移する。そして過程は \$Z_t \in \mathcal{C}_{n-1}^0, t \in [\tau_j, \tau_{j+1})\$ 上を滞留する。

5. \$\xi_{\tau_{j+1}-} = 0, Z_t \in \mathcal{C}_{n-1}^0, t \in [\tau_j, \tau_{j+1})\$ から \$\xi_{\tau_{j+1}} = -1\$ へ。

その後、時点 \$t = \tau_{j+1}\$ に過程 \$Z_t\$ は継続領域境界 \$z_{n-1}^0 \in \partial \mathcal{C}_{n-1}^0 \cap \mathcal{S}_{n-1}^{0,-1} \cap \mathcal{C}_{n-2}^{-1}\$ に至り、レジーム \$\xi_{\tau_{j+1}} = -1\$ に遷移し、過程は \$Z_t \in \mathcal{C}_{n-2}^{-1}, t \in [\tau_{j+1}, \tau_{j+2})\$ 上を滞留。

6. \$Z_t \in \mathcal{C}_{n-2}^{-1}\$.

\$\xi_{\tau_{j+2}-} = -1\$、つまり過程は、\$Z_t \in \mathcal{C}_{n-2}^{-1}, t \in [\tau_{j+1}, \tau_{j+2})\$ 上を滞留

図 2.2 上図、或は数値計算による実際の作図である図 3.1 より、スイッチ前後のそれぞれのレジームの値関数と、両レジーム間遷移に伴う取引コストとの関係が認識できる。正の \$z\$ 領域上で、square レジーム (\$\xi_{\tau_{j+1}-} = 0\$) の値関数の傾きは、買持ちポジションレジーム (\$\xi_{\tau_j-} = 1\$) のそれよりも急である。同様に、売持ちポジションレジーム (\$\xi_{\tau_{j+1}} = -1\$) の値関数の傾きは、square ポジションレジームのそれよりも急である。過程の値 \$z = Z_t\$ の絶対値が増加するに従い、スイッチ先の値関数との水準乖離幅は増加し、その乖離分が遷移に伴う取引コストに見合えばそこでスイッチが発生する。例えば、\$\xi_t = 1, Z_t \in \mathcal{C}_n^1, Z_t > 0\$ のとき、当初は不等式 \$v(Z_t, 0, n-1) - v(Z_t, 1, n) < K\$ が成立していても、いずれその等式が成立すれば、その状態が最適なスイッチの発動タイミングとなる。この関係は式 (2.1.25) の視覚的説明となっている。

square ポジション (レジーム \$\xi = 0\$) の継続領域 \$\mathcal{C}_n^0\$ は、\$n \to \infty\$ による次のような漸近的な収束性を示す。式 (2.1.28) による最適スイッチタイミング \$\tau_j\$ の表記を用いると、局面が \$\xi_{\tau_{j-1}} = 1, \xi_{\tau_j} = 0, \xi_{\tau_{j+1}} = -1\$ のとき、最初にレジーム \$\xi = 1\$ をとる過程 \$Z_t\$ は時点 \$t = \tau_j\$ のとき、位置 \$Z_t = z_n^1 > 0\$ 上でスイッチ \$1 \to 0\$ が発

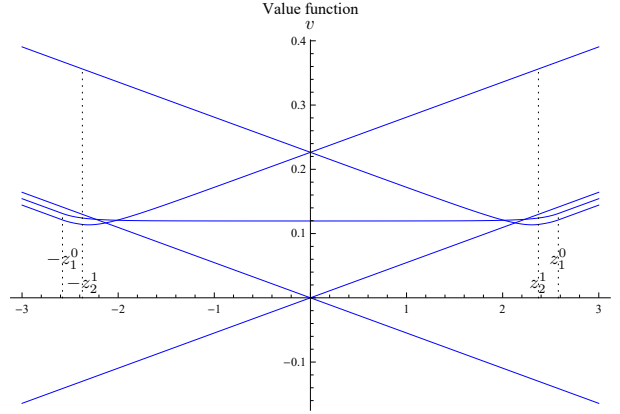


図 3.1 遷移に伴う一連の値関数: $v(z, \mp 1, 2), v(z, 0, 1), v(z, \pm 1, 0)$ (出所) Suzuki [2018] Figure 2

生し、レジーム $\xi = 0$ にスイッチするが、その地点は、 $Z_t \in C_{n-1}^0 = (-z_{n-1}^0, z_{n-1}^0)$ に位置する。このとき、 $-z_{n-1}^0 < z_n^1 < z_{n-1}^0$ であるが、その地点からさらに C_{n-1}^0 の両端の次のスイッチ地点までの距離を考える。このとき、最適戦略による次回スイッチ発生確率に関しては、次のような関係式が成り立っている。

$$\mathbb{P}[\xi_{\tau_{j+1}} = 1] + \mathbb{P}[\xi_{\tau_{j+1}} = -1] = 1 \iff \mathbb{P}[Z_{\tau_{j+1}} = -z_{n-1}^0] + \mathbb{P}[Z_{\tau_{j+1}} = z_{n-1}^0] = 1 \quad (3.1.2)$$

しかし Suzuki [2016] の式 (77), (78) による単調収束性により、 $n \rightarrow \infty$ に伴い、 $(z_n^1, z_{n-1}^0) \rightarrow \phi$ となり、さらに $|\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0$ となるため、式 (3.1.2) より $\mathbb{P}[Z_{\tau_{j+1}} = z_{n-1}^0] \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ。また $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\xi_{\tau_j} = 0$ のスイッチが発生すると殆ど同時に $\xi_{\tau_{j+1}} = -1$ ($Z_{\tau_{j+1}} \in C_{n-1}^{-1}$) となる。このとき、過程 Z_t がレジーム $\xi = 0$ に滞在する期間は 0 に収束する。領域 $[z_n^1, z_{n-1}^0]$ が空集合 ϕ に収束する様子は、図 5.1 のシミュレーション結果からも窺える。

3.1.1 リスク回避度の解釈 (線型関数 例 2.3.1)

まず評価関数がリターンの線型関数の場合を考える。この場合の最適戦略は、戦略から得られる期待リターンのみを勘案した行動となる。

例 2.3.1 と例 2.3.2 を比較すると、前者はより汎用的な後者のモデルで $\lambda = 0$ とおいた特別の場合であるが、状態変数 Z の絶対値 $|Z|$ が小さい間は、評価関数中の二次式 z^2 の影響も小さいため、たとえ $\lambda > 0$ であっても、最適戦略の動きは似ている。これは図 2.2, 2.10 それぞれの原点 $z = 0$ 付近をみても分かる。両チャートの示している最適戦略は単純な平均回帰過程である。 $|Z|$ が小さい間は $\{Z\}$ の平均回帰性に基づき、 $Z > 0$ のとき売りポジションは売りポジションに留まり、 $Z < 0$ のとき買いポジションは買いポジションのままである。図 2.2 (或は図 2.10 でも $|Z|$ が小さければ同様だが) より、安定的な売り ($\xi = -1$) 領域 ($S_n^{1,0} \cap S_{n-1}^{0,-1} \cap C_{n-2}^{-1}$) が z -軸の原点から遠い正の領域に存在する。そこでは買いポジション ($\xi = 1$) も square ポジション ($\xi = 0$) も最適ではなく、その領域は売りポジション ($\xi = -1$) への即座の遷移が最適な領域である。同様に安定的な買いポジション ($\xi = 1$) 領域 ($S_n^{-1,0} \cap S_{n-1}^{0,1} \cap C_{n-2}^1$) が z -軸の遠い負の領域に存在する。そこでは売りポジション ($\xi = -1$) も square ポジション ($\xi = 0$) も最適でなく、その領域は買いポジション ($\xi = 1$) への即座の遷移が最適な領域である。

3.1.2 リスク回避度の解釈 (二次関数 例2.3.2)

$|Z|$ が大きい場合、 $\lambda > 0$ のときは二次の罰則項も大きくなるため、例2.3.2のようにリスク鋭敏的な追加的な効果が表れる。これは例2.3.1では無視されてきた、リスクを避けようとする行動である。このような最適戦略のリスク回避の行動は、図2.10で $|z|$ が大きい z -軸両側にみられる。そこでは最適戦略は過程 Z の符号に関わりなくリスクを回避するために、square ポジション ($\xi = 0$) へ遷移しがちな傾向になる。つまり安定的な square 領域 ($S_n^{10\{\pm\}} \cap S_n^{-10\{\pm\}} \cap C_{n-1}^{0\{\pm\}}$, 複号同順) が z -軸の遠い両側に存在する。その領域では square 以外のいかなるポジション ($\xi = \pm 1$) をとることも最適でなく、即座に square ポジション ($\xi = 0$) へ遷移することが最適戦略となる。square ポジションはリターンがないのと同時に無リスクに相当するため $\xi = -1$ で $z > 0$ の領域、或は $\xi = 1$ で $z < 0$ の領域では、過程の平均回帰の性質を考えると、高期待リターンを追求する ($\xi = \mp 1$) か、リスク回避する ($\xi = 0$) かの二律背反が生ずる。このような非単調な傾向は例2.3.1の例では見られなかった。これは評価関数にリスク回避項を加えた例2.3.2の特有の傾向であるといえる。この拡張されたモデル化によりリスク回避型投資家の最適投資戦略がモデル化されることになった。これは研究における主要な貢献の一つであるといえる。

3.2 最適戦略の感応度分析

ここでは、最適戦略の感応度分析及びその期待スイッチ間隔の分析を行う。最適繰返しスイッチ問題の最適戦略の、継続領域境界の位置の、或はスイッチ取引間隔の各種パラメータに対する感応度分析を行う。

3.2.1 典型的なパラメータ

最適スイッチ位置や期待スイッチ間隔の感応度分析を行うため、表3.1のパラメータを以降の数値計算のための基本ケースとする。

Δt	μ	σ	θ	δ	K	n
1/250	0	0.3	30	0.01	0.01	$+\infty$

表 3.1 基本データ事例 1 (出所) Suzuki [2018] Table 1

表3.1のパラメータのうち、 Δt は年率の 1 営業日間隔で、 μ, σ, θ は式 (2.1.1) のペアの価格乖離の確率過程 X を特徴付けるパラメータであり、実用上は構成銘柄の過去データから推定される。 δ は金利市場から取得される。取引コストパラメータ K の推定は一般的には難しい。パラメータ推定に関しては5.2.2節で議論する。

3.2.2 最適スイッチ位置とスイッチ間隔の期待値 ($\lambda = 0$ の場合)

評価関数式 (2.1.15) に対して $\xi = 0, K = -1, \mathcal{T}_{t_0} = \{\tau_a\}, \tau_a \equiv \inf\{\tau \geq t | Z_t = a \in \mathbb{R}\}$ とおく。 τ_a は過程 Z の a への初期到達時刻である。 τ_a のモーメント母関数は、

$$\begin{aligned} T(z, a) &\equiv \mathbb{E} \left[e^{-\delta(\tau_a - t)} \mid Z_t = z \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\delta(t_1 - t)} T(Z_{t_1}, a) \mid Z_t = z \right] \quad (t \leq \forall t_1 \leq \tau_a) \\ &= \mathbb{E} \left[T(z, a) + \int_t^{t_1} \mathcal{L}_s \{ e^{-\delta(s-t)} T(Z_s, a) \} ds \mid Z_t = z \right], \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

と表され、無限小生成作用素による計算部分は $\mathcal{L}_s \{ e^{-\delta(s-t)} T(Z_s, a) \} = 0$ ($t \leq \forall s \leq t_1$) と表現され、 $T(z, a)$ は過程 Z_t による無限小生成作用素 \mathcal{L} (式 (2.1.67)) を用いた微分方程式 (2.1.81) の斉次方程式の解となる。ただし境界条件は、

$$\begin{cases} T(a, a) = 1, \\ T(\eta \times \infty, a) = 0 \quad (\eta(z - a) > 0; \eta = \pm 1). \end{cases}$$

式 (2.3.5) と同様の一般解を用いると、

$$T(z, a) = \mathbb{E} \left[e^{-\delta(\tau_a - t)} \mid Z_t = z \right] = \begin{cases} \frac{H_\nu(z)}{H_\nu(a)}, & z \geq a, \\ \frac{H_\nu(-z)}{H_\nu(-a)}, & z \leq a. \end{cases}$$

これより、一次モーメントすなわち期待初期到達時間は次のように表現される。

$$\mathbb{E} \left[\tau_a - t \mid Z_t = z \right] = - \frac{\partial T(z, a)}{\partial \delta} \Big|_{\delta \rightarrow +0} \quad (3.2.2)$$

更なる詳細は Ito & McKean [1974], Borodin & Salminen [2002] 参照。

$z_\infty \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^0 > 0$ とおくと、変数変換 (2.1.2) 前の元の座標系において、継続領域境界はそれぞれ $x_\infty^+ \equiv \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}} z_\infty$, $x_\infty^- \equiv \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}} z_\infty$ である。過程 X_t による時点 t 、地点 x_∞^+ 発の x_∞^- への初期到達時刻 $\tau_{x_\infty^-}$ の期待値

$$\tau \equiv \mathbb{E} \left[\tau_{x_\infty^-} - t \mid X_t = x_\infty^+ \right], \quad (3.2.3)$$

(期待一巡時間) を以降の各節で分析する。

以下の各節で、最適スイッチ地点 x_∞ 及び期待一巡時間 τ の、各パラメータに対する感応度を図示する。

3.2.3 主要パラメータの感応度分析 ($\lambda = 0$)

ここでリスクを考慮しない場合 ($\lambda = 0$) の主要パラメータの感応度分析を行う。それぞれのチャート内に基本ケース (表3.1) による水準を垂直点線で示した。

3.2.3.1 スイッチ権利数 n ($\lambda = 0$)

先ず最適戦略のスイッチ権利数 n に対する感応度を考える。値関数、或は継続領域境界の、パラメータ n に対する変化が単調であることは既に確認した。すなわち、補題2.1.4、系2.1.1(ii) により、 $n \geq 1$ に対して $v(z, \xi, n) \geq v(z, \xi, n-1)$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} v(z, \xi, n)$ は有限 z に対して、有限値に収束する。つまり値関数 v は図2.9で示されるものへと収束する。最適戦略による z -軸上の継続領域境界の絶対値は n に関する単調減少関数であり収束する。すなわち、Suzuki [2016] の Corollary 3.3 より $0 < z_n^1 \leq z_n^0$, $0 < z_{n+1}^0 \leq z_n^0$, $0 < z_{n+1}^1 \leq z_n^1$ 。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^0 < \infty$ である。 z_n^0, z_n^1 の具体的数値例は図5.1にみられる。つまり3.1節での分析により、レジーム $\xi = 1$ から $\xi = 0$ へのスイッチ直後の最初の $\xi = -1$ への期待スイッチ時間間隔は、 n が大きくなるにつれて短時間になる。同様に、 $\xi = -1$ から $\xi = 0$ へのスイッチ直後の最初の $\xi = 1$ への期待スイッチ時間間隔も同様である。

3.2.3.2 取引コスト係数 K [図3.2(a), 3.2(b)]

図3.2(a)より、最適スイッチ地点 x_∞^+ は K 上昇に伴い増加する。コスト係数増加に伴い、最適戦略は総コスト抑制のためにスイッチ発生頻度を抑制するよう動作する。こうして K の上昇に伴い最適スイッチ地点 x_∞^+ は長期平均 μ から遠ざかり、期待一巡時間 τ は増加する (図3.2(b))。

図3.2(b)より、基本ケース (表3.1) における期待一巡時間 τ は約 0.09661 年 \cong 1.16 月で、実務的にも受け入れやすい。

3.2.3.3 平均回帰強度 θ [図3.3(a), 3.3(b)]

平均回帰資産を分析対象としており、平均回帰強度はパフォーマンスの手掛かりとなる要因である。式 (2.1.1) より、状態変数 X が長期平均 μ から遠ざかれば、その分ドリフト項 $-\theta(X - \mu)$ の絶対値が大きくなり、平均回帰への影響力が強くなる。従って θ が増加すれば、 X が平均から遠くなくても同様の平均回帰力を得ることができる。そのため θ の増加に伴い、最適スイッチ地点は μ に近づく (図 3.3(a))。また θ が大きいとき、継続領域 C_∞^ξ は狭くなるため連動して期待一巡時間は短くなる (図 3.3(b))。

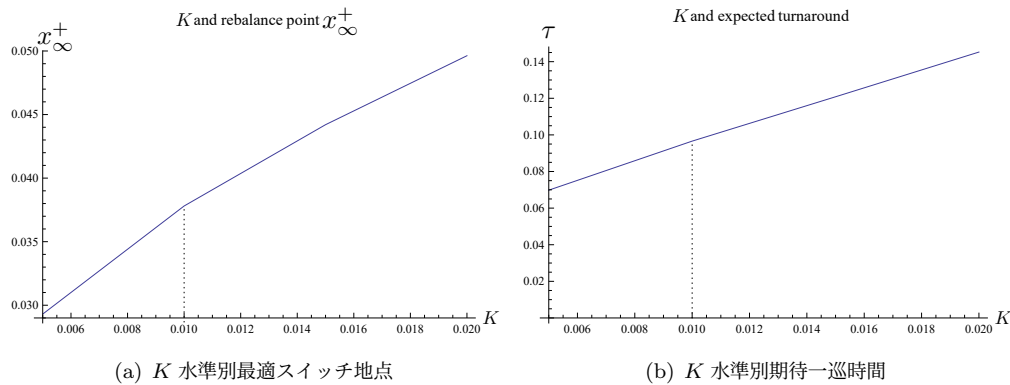
(a) K 水準別最適スイッチ地点(b) K 水準別期待一巡時間

図 3.2 K 水準別最適スイッチ地点と期待一巡時間 (出所) Suzuki [2018] Figure 3
 チャート内に基本ケース (表3.1) による水準を垂直点線で示した。

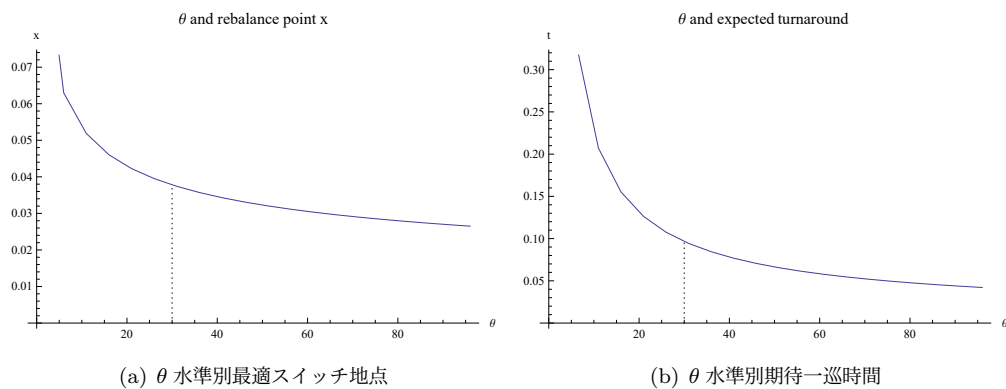
(a) θ 水準別最適スイッチ地点(b) θ 水準別期待一巡時間

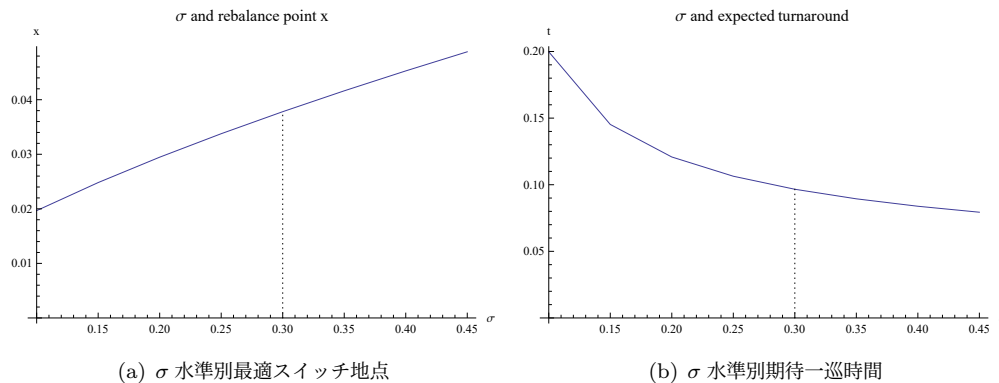
図 3.3 θ 水準別最適スイッチ地点と期待一巡時間 (出所) Suzuki [2018] Figure 4
 チャート内に基本ケース (表3.1) による水準を垂直点線で示した。

3.2.3.4 ボラティリティ σ [図3.4(a), 3.4(b)]

ボラティリティ σ の増加に伴い、最適スイッチ地点 x_{∞}^+ は長期平均 μ から遠ざかる。これは取引コストを伴う頻繁のスイッチを避けるためと考えられる (図 3.4(a))。しかし、 σ の増加に伴い、期待一巡時間 τ は減少している (図 3.4(b))。これはボラティリティ増加効果が継続領域 C_{∞}^{ξ} 増大効果を上回っているためだと考えられる。

文献 Gatev et al. [2006] では、価格差のボラティリティの 2 倍 2σ を長期平均からの乖離によるスイッチ発動の目安としていた。図 3.4(a) をみると、スイッチ発動タイミングの目安としてボラティリティ比例の関数を用いたのはよい推測であった。しかし、彼らのモデルでは取引コストは考慮されていなかったため、3.2.3.2 節で考察してきたように 2σ は必ずしも最適戦略ではない。注意点としては、式 (2.1.3) より Z は σ に依存しておらず、また式 (2.1.2) より実際には $X - \mu$ が σZ に比例している。

この節では線型評価関数による問題 ($\lambda = 0$) の感応度分析を行ってきたが、最後に二次評価関数モデルに含まれるリスク回避係数に対する最適戦略の感応度分析を行う。

(a) σ 水準別最適スイッチ地点(b) σ 水準別期待一巡時間図 3.4 σ 水準別最適スイッチ地点と期待一巡時間 (出所 Suzuki [2018] Figure 5

チャート内に基本ケース (表3.1) による水準を垂直点線で示した。

3.2.4 二次式の評価関数の感応度分析 ($\lambda > 0$)

ここでは、例2.3.2($\lambda > 0$)で取り扱った二次評価関数モデルの感応度分析を行う。ここまで個々の $n \geq 1$ について最適スイッチ領域 $S_n^{\xi, \hat{\xi}}$ を具体的には特定していない。しかし我々が導入した参照領域を用いて、最適スイッチ領域を推測することが可能である。参照領域に対する感応度分析を行うことにより、間接的にスイッチ領域や継続領域の感応度分析を行う。より具体的な領域計算に関しては4章以降で取り扱われるため、後にこの感応度分析を再び取り上げることにする。

3.2.4.1 リスク回避係数 $\lambda > 0$

最適スイッチ領域の代わりに参照領域 $Q_1^{\xi, \hat{\xi}} \supset S_n^{\xi, \hat{\xi}}, \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \xi \in \mathbb{I}, n \geq 1$ の、リスク回避係数 $\lambda > 0$ に対する感応度分析を行う。式 (2.3.41), (2.3.42), (2.3.43) による6連結領域を内包する参照領域 $Q_1^{\xi, \hat{\xi}}$ の8個の有限境界は $\pm p(1 \pm \sqrt{1 \pm q})$ (複号任意) である。ここで $p(q)$ は $\lambda > 0$ の減少 (増加) 関数、積 pq は λ によらないため、

$$p(1 + \sqrt{1 \pm q}) = \frac{pq}{\pm \sqrt{1 \pm q} \mp 1} \text{ (複号同順) はそれぞれ } \lambda \text{ の減少関数}$$

$$p(1 - \sqrt{1 \mp q}) = \frac{pq}{\pm \sqrt{1 \mp q} \pm 1} \text{ (複号同順) はそれぞれ } \lambda \text{ の増加関数}$$

がいえる。8個の領域境界は原点を中心として対称な4個ずつの点による2グループからなる。

λ が増加すると、それぞれのグループの各点はそれぞれ、点 $z = \pm p$ 方向に向かって収縮する (図2.10)。これは評価関数内のリスク項の影響が大きくなるにつれ、それぞれの安定的 square 領域 $S_n^{10\{\pm\}} \cap S_n^{-10\{\pm\}} \cap C_{n-1}^{0\{\pm\}}$ (複号同順) が拡大することを意味している。その領域は z 軸の遠い側で $\pm\infty$ を含む領域であり、 $\xi = \pm 1$ による何らかの資産ポジションを抱えるのは最適ではなく、瞬時に $\xi = 0$ へのスイッチが発動する領域である。ここは最適戦略がリスク回避的な傾向を示す領域である。この結果は後に具体的計算例で示される図4.6による結果とも整合的である。すなわち λ が大きくなるにつれて安定的 square 領域が拡大して、実数のほぼ全域が square レジームの継続領域となるケースも観測されている。反対に λ が0に近づくにつれ安定的 square 領域は縮小し、 $\lambda = 0$ で安定的 square 領域は消滅する。この結論は例2.3.1の結果と一致し整合的である。

3.2.4.2 確率過程 X のボラティリティ σ

式 (2.1.3) より確率過程 $\{Z_t\}$ はボラティリティ σ から独立であるが、式 (2.1.2) より、 $X_t - \mu$ の値はパラメータ σ に比例する。よって式 (2.1.10) より、 $|X_t - \mu|$ が大きく $\lambda > 0$ のとき、パラメータ σ は、主に評価関数の一次の項よりは二次の項 (式 (2.1.10) の右辺期待値演算内第二項) を介して評価関数に影響を及ぼしている。そのため $|X - \mu|$ が大きいとき、対応する最適戦略はリスク鋭敏的になる。すなわち σ が大きくなると最適戦略はよりリスク回避的になる。実際、 p と q の定義よりパラメータ σ が増加すると p は減少するが、 q は独立である。その結果、安定的 square 領域の拡大に繋がることになり、このようなパラメータによる最適戦略への影響はリスク鋭敏な最適解の本来の性質と整合的であると考えられる。

第 4 章

数值計算

ファイナンスの文脈の中で最適戦略を取り扱う以上、具体的な数値として粘性解を求めることが最終目標である。微分方程式: $F(\bar{x}, V_*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) = 0$ の粘性解の定義は定義2.1.3で与えられるが、直接この定義から解を決定するためには、以下のステップを要する。

1. 候補となる方程式の解 $V(x)$ を求める

2. V の粘性優解性を示す

$\varphi \in C^2(\tilde{O})$ 及び $\bar{x} \in O$ を満たすあらゆる V の試験関数 φ ($\{\forall \varphi \in C^2(\tilde{O}), \forall \bar{x} \in O\} \sim V$) に対して、 $F(\bar{x}, V_*(\bar{x}), D\varphi(\bar{x}), D^2\varphi(\bar{x})) \geq 0$ であることを示す

3. 同様に V の粘性劣解性を示す

しかし、計算機を用いて上記ステップ2の全ての試験関数 $\varphi: \{\varphi \in C^2(\tilde{O}), \bar{x} \in O\} \sim V$ に対し、この定義に忠実に検証を行うことは不可能であろう。'∀' という演算を通常の計算機上の数値計算で実行できない。他にできることといえば、補題2.1.13を用いることにより、継続領域 C_n^ξ 上という限定的な定義域において粘性解を古典解として求めることくらいである。

また、系2.1.2を用いて、継続領域 C_n^ξ 上で求めた解とスイッチ領域 S_n^ξ 上の関数との連結部分を定理2.2.1を用いて貼り合わせれば、必要とされる条件のいくつかを満たすような関数は得られるかもしれない。こうして得られた関数は求めるべき値関数 (或は変分不等式の粘性解) であるためのいくつかの必要条件を満たしていることになる。これらの条件の依存関係を図示すると図4.1ようになる。

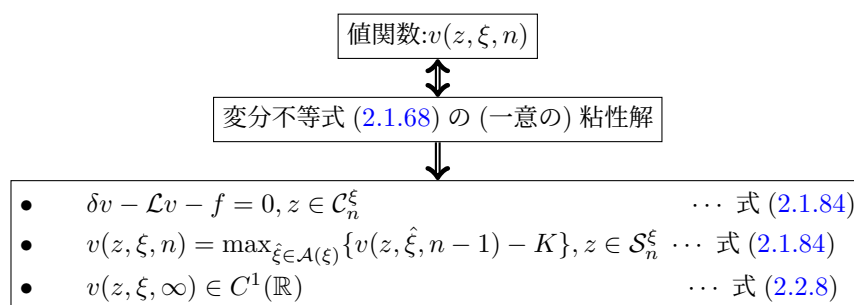


図 4.1 粘性解の条件式の依存関係

しかしこのような手順により求められた関数は、そのままでは求めるべき値関数 v であるための十分条件を満たしていない。つまり一般的には数値計算によりたまたま求められた最初の継続領域上の古典解が、変分不等式 (2.1.68) の粘性解となっているのかどうかは不明である。未定係数を決める際の際の非線型方程式で解が複数ある場合、求めているものがどれなのかは不明である。解析的アプローチなら全ての解を一網打尽に求めることが可能かもしれないが、数値計算の収束計算の場合、一回の処理で求まる解は高々1個だけである。また次の処理でその他の解が求まる保証もないし、そもそもその他の解が存在するかどうか不明である。存在するかどうか不明なものを探さなくてはならないことになり、数々の困難が立ち上がる。

本稿の問題の場合、継続領域 C_n^ξ を支配する二階線形微分方程式 $\delta v - \mathcal{L}v - f = 0$ の (継続領域上の) 古典解はある種の一般解を持つ。これは二次元の線形独立な基底関数 (例えば式 (2.3.3), $\{H_\nu(z), H_\nu(-z)\}$) の線形結合の形式に特殊解を加えた形式の一般解である。従っていわゆる微分方程式の数値解法を持ち出す必要はない。一般解が初等関数で表されない場合であっても、少なくとも関数形が不明なまま行われる数値解析よりは見通し良く求解できる。

4.1 一般解を構成する特殊関数

4.1.1 エルミート関数とその実装

解析解という言葉は、通常、代数関数や初頭関数、特殊関数などの公知の関数を使って表現できる解という意味で用いられることが多く、単なる収束冪級数を表すいわゆる解析関数よりは初等の関数であるべきである。本稿の取り扱う一般解で用いられている基底関数 $\{H_\nu(z), H_\nu(-z)\}$ は、合流型超幾何関数 (confluent hypergeometric function) ${}_1F_1$ を用いて表現される次のような自由度 ν のエルミート関数 (Hermite function) $H_\nu(z)$ である (Lebedev [1972], P. 285)。

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})} z {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right) \quad (4.1.1)$$

ただし、合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ は、

$${}_1F_1(\alpha, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < \infty, \gamma \neq 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1.2)$$

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + k - 1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(\lambda)_0 = 1$$

で与えられる関数である。超幾何関数は冪級数を用いて定義されており解析関数ではあるが、初等関数では表されず、公知と呼べるほど性質は明らかでない。この関数の値を求めるためには冪級数計算のための数値計算を行う必要があり、その意味においては、数値解に近い解析解であるといえる。

ただし計算機でこの関数を計算する場合には、プログラミング言語に依っては超幾何関数を装備しているものもあり、冪級数計算を自前で行う必要はない。Python の `scipy.special` モジュールに特殊関数のライブラリーがあり、そこで `hyp1f1()` という名前で合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ が実装されており、その関数を用いてエルミート関数 $H_\nu(z)$ は以下のように実装される。

Listing 4.1 エルミート関数 $H_\nu(z)$ の実装

```

1 Hermite=lambda self, nu, z: \
2 2**nu * math.gamma( 1/2)/math.gamma((1-nu)/2) * sc.hyp1f1( -nu /2, 1/2, z**2) +
  \
3 2**nu * math.gamma(-1/2)/math.gamma( -nu /2)*z*sc.hyp1f1((1-nu)/2, 3/2, z**2)
```

複素関数としてのエルミート関数は、 ν および z の二変数の引数に関して整関数 (entire function) であることが知られている。従って有限な値を引数に代入すれば、関数の値は有限な値となるはずである。この関数を用いて、 $H_0(0)$ を計算させた結果、次のような結果が得られた。

Listing 4.2 $H_0(0)$ の計算

```

1 In [8]: p.Hermite(nu=0, z=0)
2 -----
3 ValueError                                Traceback (most recent call last)
4 <ipython-input-8-f031c1e72e53> in <module>
5 ----> 1 p.Hermite(nu=0, z=0)
```



```

6
7 <ipython-input-1-0e2904f03a0f> in <lambda>(self, nu, z)
8     1 class Parameters():
9       2     Hermite=lambda self, nu, z: 2**nu * math.gamma( 1/2)/math.gamma((1-
10 ----> 3         nu)/2) * sc.hyp1f1( -nu/2, 1/2, z**2) + \
11         2**nu * math.gamma(-1/2)/math.gamma( -nu/2)*z
12     *sc.hyp1f1((1-nu)/2, 3/2, z**2)
ValueError: math domain error

```

これはそのままではエラーとなることがわかる。解析的な観点からはエルミート関数は、 ν が非負整数のとき、エルミート多項式となり、 $H_0(z) \equiv 1$ のはずである。本稿の目的は、単に解析的に導かれた解を数値で表現するだけのことであるが、これまでの抽象的な議論の中では $H_\nu(z)$ とだけ記して具体的な解が求まったとみなしていたが、より具体的に解を求めるためには、実践上考慮しなくてはならない煩雑なことが残されていることが分かる。

式 (4.1.1) の分母に表われるもう一方の特殊関数 Γ はガンマ関数であり、 $n = 0, -1, -2, \dots$ に対し $\Gamma(n) = \infty$ である。これが分母に出現する場合、 $1/z \rightarrow 0 (z \rightarrow \infty)$ は机上の解析的には自明な事実であるが、計算機実装の過程においてはこの計算は自動的にには行われなことは注意を要する。単純な数値計算ライブラリーを用いて数値計算を行う場合、式 (4.1.1) の各項うち、分母が ∞ となる項を 0 とするような特別処理を別途行わなくてはならない。また ν が非負の整数に近い時、計算精度が落ちることも考慮しなくてはならない。

4.1.2 エルミート関数の実装上の定義域

本稿ではエルミート関数 $H_\nu(z)$ を $\nu < 0$ の定義域で用いている。このとき $H_\nu(z)$ は z の減少関数である。前節で実装した関数 `Hermite` の第一引数が ν 、第二引数が z に相当する。試しに Listing 4.1 で実装したエルミート関数の値をいくつかの引数に対して出力してみる。

Listing 4.3 $H_\nu(z)$ の計算

```

1 In [33]: Hermite(-1, 0)
2 Out [33]: 0.8862269254527579
3
4 In [34]: Hermite(-1, -1)
5 Out [34]: 4.439093016628066
6
7 In [35]: Hermite(-1, -5)
8 Out [35]: 127625361114.51556
9
10 In [36]: Hermite(-1, -10)
11 Out [36]: 4.764563579697152e+43
12
13 In [37]: Hermite(-1, -20)
14 Out [37]: 9.254814059008912e+173
15
16 In [38]: Hermite(-1, -25)
17 Out [38]: 4.815330783989532e+271
18
19 In [39]: Hermite(-1, -27)
20 Out [39]: inf

```

順に $z = 0, -1, -5, -10, -20, -25$ の値を出力させた結果をみると、 $z = -10$ あたりから関数の値が急激に大きくなっていることがわかる。この例から、一般的な計算環境では $|z|$ が 30 を超すような計算ができないことがわかる。本稿が用いている計算環境、Python の浮動小数点数 float 型は 64 ビットの浮動小数点数表現である倍精度浮動小数点数で、C など一般的なプログラミング言語における double 型に相当する。Python では倍精度を float と呼び単精度の型はない。Python の float 型が取り得る範囲（最大値・最小値）は、

$$-1.7976931348623157e + 308 \leq z \leq 1.7976931348623157e + 308 \quad (4.1.3)$$

であり、308 桁を超すような大きな数を処理できない。つまり、本稿の計算環境では $|z| = 30$ を超すような $H_\nu(z)$ の計算はコンピュータ能力の限界に達していることがわかる。モデルの構成の仕方にもよるが、一般的なファイナンスの問題設定でこの程度の値に上限があるというのは大きな制約となる。従って以降本稿が行う数値計算に際しては、各パラメータのサイズや、状態変数 z のスケールに注意してオーバーフローを起こさない範囲にモデルを限定して計算を行わなくてはならない。ファイナンス実務上の自然なパラメータ設定ができる程の自由度はないことになるが、しかし本稿の当面の目的は最適解計算の結果検証と動作確認にあるため、制約的な範囲のパラメータ設定であっても理論的な検証は可能であると考えられる。

4.2 区分的一般解を用いた粘性解の構築

ここでは、継続領域ごとに、自由境界問題の条件を満たす一般解を求め、それらを連結することにより粘性解を構築することを考える。まず、一般に区分的に条件を満たす古典解を単純に連結するだけでは求める粘性解は得られないことを次の節で述べる。

4.2.1 古典解を接ぎ合わせて粘性解になるのか？

本稿の問題の場合、個々の継続領域は自由境界問題という微分方程式系により支配されており、2 階の場合、1 個の有限連結継続領域当たり任意定数が 2 個、未知の自由境界が 2 個の計 4 個の未知数を、4 本の非線形連立方程式から求めることになる。しかし一般的に、非線形方程式の実数根は複数あり得る。ただし当然のことながら、境界条件を満たす一般解が複数あっても値関数は一意であるため、値関数に一致する解は一つだけである。さらに一般にはレジーム毎に、連結した継続領域は \mathbb{R} 上に複数個あり得るため問題は複雑になる。非線形連立方程式の根の個数が予め 1 個と特定できればこの問題は回避可能かもしれないが、一般の方程式の実数根の個数を予め特定することは難しい。これは方程式を構成するパラメータの範囲に依存して数値計算による場合分けが必要な煩雑な問題であり、この手順は求解処理に支障をきたすものである。境界条件を満たす一般解が複数あるときは、それぞれの解が求める値関数であるかどうか別途検証作業が必要となる。

この問題を緩和するのが粘性解である。粘性解は古典解の条件を緩和したものであり、同一区間であれば古典解は同時に粘性解である (補題 2.1.8, 2.1.12, 2.1.13)。しかし粘性解の場合、古典解と異なり、定義域に拡張性がある。 C^2 -級でない点も含めて複数の連結継続領域を包含し、実数空間全域を定義域とする粘性解も構築できる。古典解は独立した継続領域上に個々に存在しているが、本稿の問題では実数全域にわたる古典解は存在しない。つまり継続領域境界では C^2 -級にならない (定理 2.2.1)。実数空間全域を定義域とするような粘性解を構築する場合、個々の連結継続領域上の同一区間に複数存在していた古典解のうち粘性解の条件を満たさないものは排除される。これにより値関数になり得る古典解候補のみが選別されることになる。

以上の考察により、求める粘性解は、実数全域の定義域のうち、個々の連結継続領域上で古典解となることがわかる。つまり古典解が一般解で表現でき、実数全域をいずれかの連結継続領域に分割することが出来れば、粘性解は、連結継続領域境界以外は古典的一般解で表現できることになる。式 (2.2.2)-(2.2.4) により、個々のレジーム $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ 毎に、必要なら同時スイッチを全て行って最終継続領域に達した状態別に実数全域を分割して、

$$\mathbb{R} = \bigoplus_{\substack{\xi^{(p)} \in \mathcal{A}(\xi^{(p-1)}) \\ p=1, \dots, m \\ m=0, 1, \dots}} (\mathcal{S}_n^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} \cap \mathcal{C}_n^{\xi^{(m)}}) \quad (4.2.1)$$

と書ける。すなわち実数全域の各点は、境界を除き互いに素な最終継続領域内部にあるといえる。すなわち、補題 2.1.13 より、求める値関数は区分的に分割すれば、何らかの微分方程式の古典的一般解として表現でき、それら古典解を繋ぎ合わせたかたちで書き表わせる。

ただし、単純に区分的な古典的一般解を無条件に繋ぎ合わせるだけでは、実数全域を定義域とする粘性解にはならないことは上述の通りである。それらの繋ぎ目を適切に処理し、候補となる複数の区分的古典解の中から適切な古典解を選別することによって変分不等式 (2.1.68) の粘性解は得られることになる。

4.2.2 区分古典解を用いた粘性解の構築

そこで、粘性解を具体的に求めるため、古典的な一般解から粘性解を直接特定できるような手法を考える。それが可能であれば粘性解の一意性により、求められたものが唯一の粘性解となり、同時にそれが求める値関数に一致することになる。その手続きを実装するのが定理 4.2.1 である。現実の具体的問題の多くは個別事情を含んでおり、前提も異なるため汎用的定理が利用できない。そのような場合、定理に相当するものを、その都度自ら構築しなくてはならない。継続領域 \mathcal{C}_n^ξ は一般的には以下のように複数の開集合による部分連結領域 $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$, $\beta_i \in \Xi$ の直和に分解される。

$$\mathcal{C}_n^\xi = \bigoplus_{\beta_i \in \Xi} \mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \quad (4.2.2)$$

個々の連結領域 $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$ (β_1, β_2, \dots) に対し、式 (2.3.5) の上式で与えられた非同次の一般解のうちの、所定の条件を満たす特殊解を決定することができれば、それが求めるべき \mathbb{R} 全域の変分不等式の粘性解になるというのが、次に示す定理 4.2.1 である。一般解は式 (2.3.5) のような n に関する漸化式となっており、再帰的計算処理において、スイッチ権利数 n の値関数を求める際、スイッチ権利数 $n-1$ の値関数は既知の関数扱いである。接続先の関数形は既知であるが、どこで接続するかが未知であるような自由境界問題の系であり、滑らかさ条件 (regularity condition) を記述する式 (2.2.8) に基づき、領域が有界の場合、各々の部分連結継続領域 $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$ ($\xi \in \mathbb{I}, \beta_i \in \Xi$) 毎に、その各境界両端点で成立する 0 階、1 階の境界条件 (smooth pasting condition) による 4 元連立方程式から、未知数である両自由境界位置、及び 2 階線形微分方程式の 2 個の任意定数を確定させる非線型連立方程式を解くという手順になる。

連続関数 $F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}$ を

$$F(z, r, p, M) := \delta r - \frac{\theta}{2} M + \theta z p - f(z, \xi),$$

とおき、以下の微分形式を考える。

$$F(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = \delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi), z \in \mathcal{O}$$

また関数 $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$G(r) := r - \max_{\xi \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\}$$

また、変分不等式の左辺を

$$F^{VI}(z, r, p, M) := \min\{F(z, r, p, M), G(r)\}$$

とおく。

以下の定理 4.2.1 では、各部分連結継続領域 $C_n^{\xi\{\beta_i\}}$ ($\xi \in \mathbb{I}, \beta_i \in \Xi$)、及び式 (2.3.9) によるその上の一般解

$$u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z) \equiv C_n^{\xi, +\{\beta_i\}} H_\nu(z) + C_n^{\xi, -\{\beta_i\}} H_\nu(-z) + \hat{v}(z, \xi), \quad z \in C_n^{\xi\{\beta_i\}} \quad (4.2.3)$$

から特殊解を求めることを考える。まず式 (2.3.4) より式 (4.2.3) は $C_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 上で微分方程式

$$F(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0$$

の古典的一般解である。

なお、定理の証明の過程における記述においては、理論上の継続・スイッチ領域を表すための記号 $C_n^{\xi\{\beta_i\}}, S_n^{\xi\hat{\xi}}$ を、それを求めるための数値計算過程における探索途上のものと区別せずに用いることとする。すなわち以下の定理において各領域 $C_n^{\xi\{\beta_i\}}, S_n^{\xi\hat{\xi}}$ は未知であるとする。

定理 4.2.1 (自由境界による区分連結継続領域上の古典解求解用連立方程式と粘性解、値関数).

仮定 2.2.1 (ii) を前提とし、継続領域境界点上で同時スイッチは発生しないものとする。関数 $v(z, \xi, n-1), \xi \in \mathbb{I}$ を既知として $n \geq 1$ の場合を考える。ただし $v(z, \xi, 0) = \hat{v}(z, \xi)$ 。

各 $\xi \in \mathbb{I}$ に対して、一般解 (4.2.3) が支配する各連結継続領域 $C_n^{\xi\{\beta_i\}}, \beta_i \in \Xi$ 、の境界両端点 $z^\partial \in \partial C_n^{\xi\{\beta_i\}}$ で式 (2.2.8) に基づく境界条件 (smooth pasting condition) (2.3.10) による、

$$\begin{cases} u_n^\xi(z^\partial) &= \varphi_{n,1}^{\hat{\xi}}(z^\partial) \equiv v(z^\partial, \hat{\xi}, n-1) - K, \\ u_n^{\xi'}(z^\partial) &= \varphi_{n,1}^{\hat{\xi}'}(z^\partial) \equiv v'(z^\partial, \hat{\xi}, n-1) \end{cases} \quad (4.2.4)$$

を満たすような、

(a). 自由境界 $z_n^{\partial\xi\{\beta_i\}} \in \partial C_n^{\xi\{\beta_i\}}, \beta_i \in \Xi$ 及び $S_n^{\xi\{\alpha_i\}}, \alpha_i \in \Lambda$

ただしスイッチ先レジームは $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$

(b). 任意定数 $C_n^{\xi, \pm\{\beta_i\}}$

但し領域全体 \mathbb{R} の境界条件としては、式 (2.3.12) を用い、端点 $z^\partial = \pm\infty$ のとき、 $C_n^{\xi, \mp\{\beta_i\}} = 0$ とおく

で、以下の条件を同時に満たすものを決定する。

1.

$$S_n^{\xi\{\alpha_i\}} = [z_n^{\partial\xi\{\beta_i\}}, z_n^{\partial\xi\{\beta_j\}}] \subset Q_1^{\xi\{\alpha_i\}}$$

2.

$$v(z, \hat{\xi}, n-1) = \max_{\xi \in \mathcal{A}(\xi)} v(z, \hat{\xi}, n-1) \text{ on } S_n^{\xi\{\alpha_i\}} \quad (4.2.5)$$

3. 全ての $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$ に対し、

$$u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z) \geq v(z, \hat{\xi}, n-1) - K \text{ on } z \in \mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}. \quad (4.2.6)$$

これらの条件を連立できるよう自由境界 $\partial\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 、任意定数 $C_n^{\xi, \pm\{\beta_i\}}$ を決定できるとき、 $u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z)$ が求めるべき変分不等式 $F^{VI}(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0$ の粘性解の部分連結領域 $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 上の関数形になる。

このとき、各 $\xi \in \mathbb{I}, n = 1, \dots$ に対し、 $z \in \mathbb{R}$ 全域にわたり、これらの各領域を貼り合わせ、

$$u_n^{\xi}(z) \equiv \begin{cases} u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z), & z \in \mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}, \beta_i \in \Xi, \\ \varphi_{n,1}^{\hat{\xi}}(z), & z \in \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}, \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \end{cases} \quad (4.2.7)$$

$$= \begin{cases} C_n^{\xi, +\{\beta_i\}} H_\nu(z) + C_n^{\xi, -\{\beta_i\}} H_\nu(-z) + \hat{v}(z, \xi), & z \in \mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}, \beta_i \in \Xi, \\ v(z, \hat{\xi}, n-1) - K, & z \in \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}, \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \end{cases} \quad (4.2.8)$$

のように構築された \mathbb{R} 上の関数が求める粘性解、つまり値関数に一致する。

$$v(z, \xi, n) = u_n^{\xi}(z), z \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{I}, n = 1, 2, \dots \quad (4.2.9)$$

証明.

各 $\xi \in \mathbb{I}, n = 1, \dots$ に対して、

1. $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 上で

各 $\beta_i \in \Xi$ に対して、式 (4.2.8) の各 $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 上で、式 (4.2.3) より区分別関数 $u_n^{\xi}(z) = u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z)$ は方程式 $F(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) \equiv \delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi) = 0$ の古典解すなわち粘性解であり、前提条件 (4.2.6) より $u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z)$ は方程式 $G(V(z)) = 0$ の粘性優解であり、式 (2.1.63) より、 $F^{VI}(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0$ の粘性解である。

$$u_n^{\xi}(z) \in \left[F^{VI}(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \quad (4.2.10)$$

2. $\mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}$ の内部 (interior) $\mathring{\mathcal{S}}_n^{\xi\hat{\xi}}$ で

式 (4.2.8) の各 $\mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}, (\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi))$ に対して、 $\mathcal{Q}_1^{\xi\hat{\xi}}$ の定義より、仮定 2.2.1 (ii) を前提とるとき、

$$f(z, \hat{\xi}) - f(z, \xi) \geq \delta K \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}} \subset \mathcal{Q}_1^{\xi\hat{\xi}}. \quad (4.2.11)$$

また、定理 2.1.4 より、

$$v(z, \hat{\xi}, n-1) \in \left[\min\{\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \hat{\xi}), V - \max_{\bar{\xi} \in \mathcal{A}(\hat{\xi})} \{v(z, \bar{\xi}, n-2) - K\}\} = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R}. \quad (4.2.12)$$

これより式 (2.1.59) により、

$$v(z, \hat{\xi}, n-1) \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \hat{\xi}) = 0 \right] \text{ on } \mathbb{R}. \quad (4.2.13)$$

式 (4.2.8)(4.2.5) による

$$u_n^{\xi}(z) = v(z, \hat{\xi}, n-1) - K = \max_{\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)} \{v(z, \hat{\xi}, n-1) - K\} \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}} \quad (4.2.14)$$

の第一式を式 (4.2.13) に代入して (領域境界を除くため、 $\mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}$ (interior) として)、

$$u_n^\xi(z) + K \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \hat{\xi}) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}, \quad (4.2.15)$$

$$u_n^\xi(z) \in \left[\delta V - \mathcal{L}V + (\delta K - f(z, \hat{\xi})) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}. \quad (4.2.16)$$

これを式 (4.2.11) と重ね合わせて、

$$u_n^\xi(z) \in \left[\delta V - \mathcal{L}V - f(z, \xi) = 0 \right] = \left[F(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}. \quad (4.2.17)$$

また式 (4.2.14) より、

$$u_n^\xi(z) \text{ は } \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}} \text{ 上で } G(V(z)) = 0 \text{ の古典解つまり粘性解。} \quad (4.2.18)$$

式 (4.2.17)(4.2.18) より式 (2.1.62) を用いて、

$$u_n^\xi(z) \in \left[F^{VI}(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0 \right] \text{ on } \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}}. \quad (4.2.19)$$

3. 継続領域境界にて

各 $\beta_i \in \Xi$ に対して、継続領域境界点 $z^\partial \in \partial \mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \cap (\mathcal{C}_{n-1}^{\hat{\xi}} \cap \mathcal{S}_n^{\xi\hat{\xi}})$ において、

これが同時スイッチではないので、 $\mathcal{C}_{n-1}^{\hat{\xi}}$ 上に z^∂ の近傍 B をとって $z^\partial \in B \subset \mathcal{C}_{n-1}^{\hat{\xi}}$ とすることができる。これは定義 2.1.1 で $\mathcal{O} = \{z^\partial\}$, $\tilde{\mathcal{O}} = B$ とすることに相当する。境界点における特に 2 階導関数に関して以下の考察を行う。

(a) スイッチ後側

$B \subset \mathcal{C}_{n-1}^{\hat{\xi}}$ 上では式 (2.2.9) の特別試験関数: $\varphi_{n,1}^{\hat{\xi}}(z) = v(z, \hat{\xi}, n-1) - K$ を用いて表現すると、 $\varphi_{n,1}^{\hat{\xi}}(z) \in C^2(B)$ なので、特に点 $z^\partial \in B$ で $\varphi_{n,1}^{\hat{\xi}}(z^\partial)$, $\varphi_{n,1}^{\hat{\xi}'}(z^\partial)$, $\varphi_{n,1}^{\hat{\xi}''}(z^\partial)$ が存在する。

(b) スイッチ前側

一方、 $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \cap B$ 上では微分係数: $u_n^{\xi\{\beta_i\}'}$, $u_n^{\xi\{\beta_i\}''}$, は片側 ($\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 側) しか存在しないため以下の計算においては $\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \ni z \rightarrow z^\partial$ のときを考える。

式 (2.1.43) より、任意の φ に関して以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \{\varphi \in C^2(B), z^\partial\} \sim u_n^\xi(z) &\iff \{\varphi \in C^2(B), z^\partial\} \sim u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z), \varphi_{n,1}^{\hat{\xi}}(z) \\ \implies \begin{cases} u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z^\partial) = \varphi_{n,1}^{\hat{\xi}}(z^\partial) = \varphi(z^\partial), & 0 \text{ 階条件 (\#1, \#2)}, \\ \lim_{\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \ni z \rightarrow z^\partial} u_n^{\xi\{\beta_i\}'}(z) = \varphi_{n,1}^{\hat{\xi}'}(z^\partial) = \varphi'(z^\partial), & 1 \text{ 階条件 (\#1, \#2)}, \\ \lim_{\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \ni z \rightarrow z^\partial} u_n^{\xi\{\beta_i\}''}(z) \geq \varphi''(z^\partial), & 2 \text{ 階条件 (\#1)}, \\ \varphi_{n,1}^{\hat{\xi}''}(z^\partial) \geq \varphi''(z^\partial), & 2 \text{ 階条件 (\#2)} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

関数 F の退化楕円性条件 (2.1.46) 及び $F(z, r, p, M)$ の連続性により、

$$\begin{aligned} F(z^\partial, u_n^\xi(z^\partial), \varphi'(z^\partial), \varphi''(z^\partial)) &\geq F\left(z^\partial, u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z^\partial), \lim_{\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \ni z \rightarrow z^\partial} u_n^{\xi\{\beta_i\}'}(z), \lim_{\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \ni z \rightarrow z^\partial} u_n^{\xi\{\beta_i\}''}(z)\right) \\ &= \lim_{\mathcal{C}_n^{\xi\{\beta_i\}} \ni z \rightarrow z^\partial} F\left(z, u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z), u_n^{\xi\{\beta_i\}'}(z), u_n^{\xi\{\beta_i\}''}(z)\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

最終等式は $u_n^{\xi\{\beta_i\}}(z)$ が $C_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 上で微分方程式 $F = 0$ の古典解となることに基づく。

以上により、微分方程式 $F = 0$ に対し、 B 上 z^∂ で $u_n^\xi(z)$ の粘性優解性が以下のように示される。

$$\{\forall \varphi \in C^2(B, z^\partial) \cup u_n^\xi(z), F(z^\partial, u_n^\xi(z^\partial), \varphi'(z^\partial), \varphi''(z^\partial)) \geq 0$$

つまり、

$$u_n^\xi(z) \in \left[F(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0 \right] \text{ at } z^\partial \text{ on } B. \quad (4.2.22)$$

また式 (4.2.7) より $z = z^\partial$ において、

$$G(u_n^\xi(z^\partial)) = u_n^\xi(z^\partial) - \varphi_{n,1}^\xi(z^\partial) = 0. \quad (4.2.23)$$

式 (4.2.22)(4.2.23) により、式 (2.1.62) を用いて、

$$u_n^\xi(z) \in \left[F^{VI}(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0 \right] \text{ at } z^\partial \in \partial C_n^{\xi\{\beta_i\}}. \quad (4.2.24)$$

4. 式 (4.2.10), (4.2.19), (4.2.24) により、

$$u_n^\xi(z) \in \left[F^{VI}(z, V(z), DV(z), D^2V(z)) = 0 \right] \text{ on } \bigoplus_{\beta_i \in \Xi} C_n^{\xi\{\beta_i\}} \oplus \bigoplus_{\xi \in \mathcal{A}(\xi)} \overset{\circ}{S}_n^{\xi\xi} \oplus \bigoplus_{\beta_i \in \Xi} \partial C_n^{\xi\{\beta_i\}} = \mathbb{R}. \quad (4.2.25)$$

5. 式 (4.2.25) と式 (2.1.68) を比較し定理 2.1.6 の一意性により、式 (4.2.9) は満たされた。

□

証明の過程で以下のような注意が必要である。

注意 4.2.1 (有限・無限連結領域に関わる未知数と方程式数)。

其々の連結部分継続領域に関して、領域が有界の場合、その各境界両端点で成立する 0 階、1 階の計 4 個の境界条件が成立し、その 4 元連立方程式から、両自由境界位置及び 2 階線形微分方程式の 2 個の任意定数、合計 4 個の未知数を特定するような非線型連立方程式を解くことになる。

一方、領域が有界でない場合には、有界でない側の領域の端点は $\pm\infty$ という既知数になり、また式 (2.3.12) から任意定数 1 つが確定するため、未知数が 2 個減る一方で、有界でない側の端点上で上記境界条件が成立しない分、条件式の本数も 2 本減ることになり、方程式の数と未知数の数の個数の関係は整合的である。

注意 4.2.2 (自由境界による区分継続領域上の古典解の一意性)。

定理 4.2.1 により、各区分連結継続領域上の微分方程式の古典的一般解から直接粘性解を求める手順が明らかになった。これにより、図 4.1 で問題となっていた、必要条件のみから粘性解を特定する際に生じた複数根から真の解を特定する煩雑さから解放されることになった。すなわち、手順通りに行った結果、最初に発見された、条件を満たす根から構成された解が唯一の解となり、それがそのまま求める値関数となり、その時一緒に求められた継続領域、スイッチ領域が最適戦略を表現していることになる。他の解の可能性に悩む必要はもはやなくなった。

4.3 値関数計算アルゴリズムとデータ構造

本節で値関数の計算プログラムを計算機上に実装する際の計算アルゴリズムとデータ構造に関して述べる。本稿のモデルは連続同時スイッチの枠組みを採用している。すなわち long ($\xi = 1$) から square を通り越して short ($\xi = -1$) へのスイッチ (レジーム遷移) をモデル化する際、そのような直接のレジーム遷移を禁ずる代わりに $\xi = 1$ から square ($\xi = 0$) へのスイッチと $\xi = 0$ から $\xi = -1$ へのスイッチを同時に (経過時間 0 で) 連続して行うことを許容する。

4.3.1 スイッチの入れ子構造

スイッチ権利数 n を持つ最適スイッチ問題の構造を考慮すると、式 (2.3.5) にみられるように、最適スイッチ直後は再帰的にスイッチ権利数 $n-1$ を持つ同様の最適スイッチ問題に帰着する。すなわち値関数 $v(z, \xi, n)$ を求める際、継続領域 $C_n^{\xi\{\beta_i\}}$ からはみ出し、レジーム $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$ にスイッチされた先の領域では、スイッチ権利数 n を $n-1$ に置き換えた値関数 $v(z, \hat{\xi}, n-1)$ を用いればよい。 $n=0$ による初期値は式 (2.1.17) で与えられる。つまりスイッチに伴い、値関数は式 (2.3.5) の 2 行目のような、スイッチ権利数 n を序数とする漸化式を形成している。権利数 n の値関数を計算する際、継続領域外では、既知の値関数 $v(z, \hat{\xi}, n-1)$ を式 (2.3.5) の 2 行目式にあてはめれば計算ができる。

式 (4.2.1), (4.2.2) を組み合わせると、計算処理という観点からすると、値関数 $v(z, \xi, n)$ の計算は、実質的に各継続領域 $C_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 上に限って行えばよいことが分かる。スイッチ権利数 n の計算をする際には、スイッチ権利数 $n-1$ の値は既知である。計算処理アルゴリズムは、フィボナッチ数を計算するのと同じような再帰的な手順で行えばよい。ただしレジーム $\xi \in \mathbb{I}$ が複数あり、スイッチのたびにそれが入れ替わるような、系列の交差があるような漸化式である。特定の $v(z, \xi, n)$ だけ求めるのであれば、再帰的に求めるやり方もあるが、全 n を網羅的に求めるのであれば、 $n=0, 1, \dots$ という順序で計算するやりの方が無駄がない。この場合、 n の計算をする際、 $n-1$ 以前の計算結果は蓄積されている必要があるため、何らかのデータベースの仕組みも必要である。

4.3.2 継続領域間の引継ぎ構造

これまでの考察により、スイッチ権利数 n の値関数を求めるには、権利数 n の各継続領域 $C_n^{\xi\{\beta_i\}}$ 中心に決定していけばよいことがわかった。継続領域境界でのスイッチ発生以降は既知の関数 $v(z, \hat{\xi}, n-1)$ に引き継げばよいからである。スイッチ先が権利数 $n-1$ の継続領域 $C_{n-1}^{\hat{\xi}}$ 内部のとき関数 $v(z, \hat{\xi}, n-1)$ の計算が未だであれば再帰的に同様の手順を繰り返せばよい。スイッチ先が権利数 $n-1$ のスイッチ領域の場合は更に同時連続スイッチが発生する。値関数 $v(z, \xi, n) \rightarrow v(z, \hat{\xi}, n-1)$ 間の引継ぎの様子を図示したのが図 4.2 である。

この例は本稿の非線形評価関数問題の実際の解を数値計算で求めた結果でもある。このチャートでは、継続領域上のそれぞれの値関数 $v(z, \xi, 1), \xi = \{-1, 0, 1\}$ がレジーム $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$ へとスイッチすることによる値関数 $v(z, \hat{\xi}, 0) = \hat{v}(z, \hat{\xi}), \hat{\xi} = \{-1, 0, 1\}$ への引継ぎの様子を示している。すなわち、この解析幾何学的観点に基づく関係は、解析式としては、式 (2.3.5) のスイッチ側の式に基づいて導かれた、スイッチ前後の関数の接続条件となる C^1 -級条件 (smooth pasting condition) を表す、式 (2.3.10), (2.3.11) に対応している。

この図は、3 種類のレジーム毎に色分けされている。 $\xi = 0, n = 0$ の値関数は図の横軸に一致して重なって見えない。垂直矢印は、その点でスイッチが発生することを示す。各上向きベクトルの長さは取引コスト

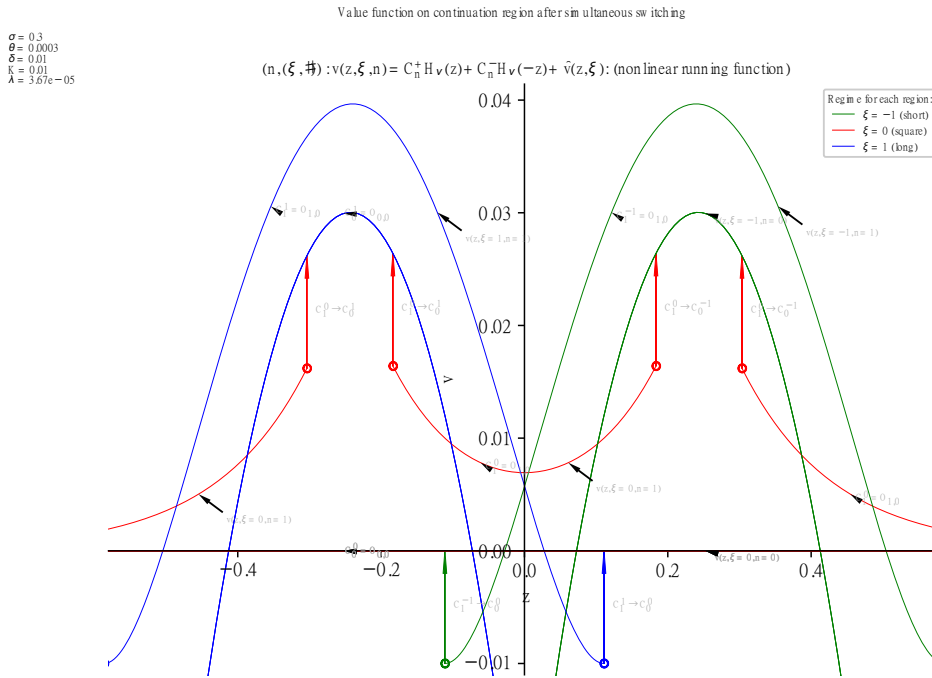


図 4.2 値関数 $v(z, \xi, n), \xi = \{-1, 0, 1\}$ の $n = 1 \rightarrow 0$ へのスイッチ前後の関係

分である。値関数の定義によると、その時点から見て将来発生し得る期待コストは含まれているが、実績過去分はイベントが去った瞬間に剥落するように定義されており、取引コストはスイッチ直前まではその期待値として値関数に組み込まれているがコストを払った瞬間に過去イベントとなり、評価関数から除去されるため取引コスト分だけ値関数はスイッチの瞬時に上昇する。

例えば中央の赤の曲線は $\xi = 0, n = 1$ の継続領域 C_1^0 の値関数である。領域端点にて、右側であれば $\hat{\xi} = -1$ (緑)、左端点あれば $\hat{\xi} = 1$ (青) の $n = 0$ の継続領域 $C_0^{\hat{\xi}} = \mathbb{R}$ にスイッチされる。なお $v(z, \hat{\xi}, 0) = \hat{v}(z, \hat{\xi})$, $\hat{\xi} \in \mathbb{I}$ は特別に実数全域 \mathbb{R} で継続領域となっている。スイッチ発生のための条件は定理4.2.1で示した手順書通りであるが、

1. 式 (4.2.4) の境界条件により、 $v(z, \xi, 1)$ を K だけ上方シフトさせた曲線と、対応する $v(z, \hat{\xi}, 0)$ の曲線はスイッチする点で一致しかつ接する (C^1 -級条件)。
2. 式 (4.2.6) により、 $v(z, \xi, 1)$ を K だけ上方シフトさせた曲線は、他のいかなるスイッチ遷移可能なレジームによる下位の値関数 $v(z, \hat{\xi}, 1 - 1), \forall \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi)$ も下回ることがない。

となっていることが確認できる。 $\xi = 0, n = 1$ の継続領域 C_n^{ξ} は、3 個の互いに素な連結継続領域、 $C_n^{\xi\{\beta_1\}}, C_n^{\xi\{\beta_2\}}, C_n^{\xi\{\beta_3\}}$ に分かれているが、それぞれについて条件が遵守されている。同様のことが他の全てのレジーム $\xi = \pm 1$ でも確認できる。こうして値関数 $v(z, \xi, 0), \xi \in \mathbb{I}$ から $v(z, \xi, 1), \xi \in \mathbb{I}$ を構成する手順が確認できた。 $v(z, \xi, 0) = \hat{v}(z, \xi)$ は既知であるため、再帰の手順に従い任意の $n \geq 0$ の値関数を求める手順も確認できた。

こうして、式 (4.2.4) のスイッチ前後の値関数の関係式により、継続領域上の各値関数グラフにスイッチ領域上の値を付け加えた完全な値関数のグラフを図 4.3 に示す。

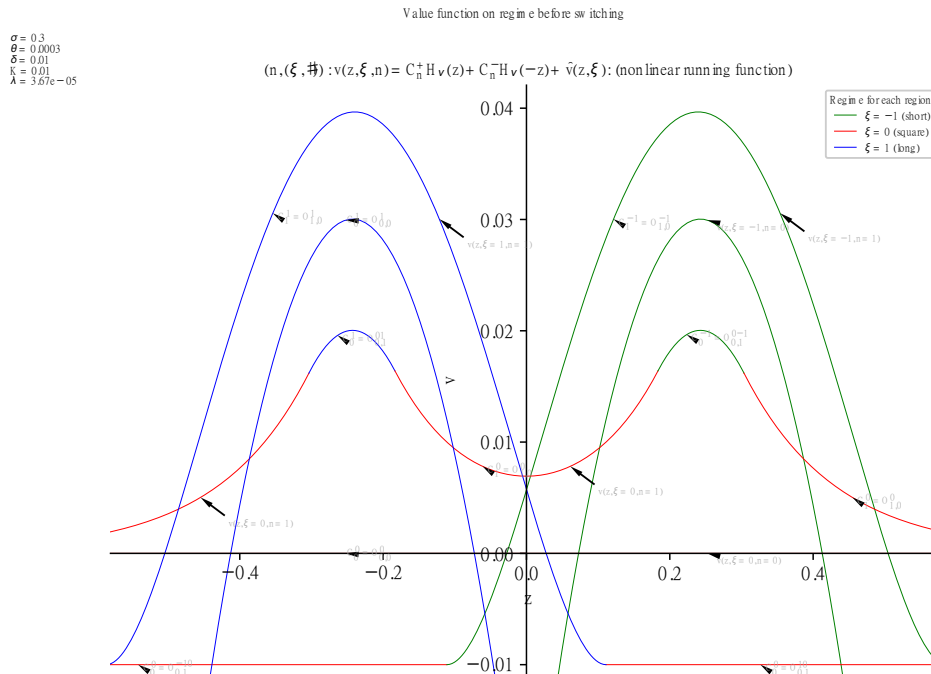


図 4.3 値関数 $v(z, \xi, n), \xi = \{-1, 0, 1\}, n = 0, 1$

値関数 $v(z, 0, 0) \equiv 0$ の赤線は水平軸に重なっている。値関数 $v(z, \pm 1, 0) = \hat{v}(z, \pm 1)$ は左右の放物線。中段にある左右対称な曲線が値関数 $v(z, 0, 1)$ 。放物線の上に覆い被さっているのが $v(z, \pm 1, 1)$ 。

各曲線とも、ベースとなる最終継続領域の属するレジームの色で色分けしている。すなわち、式 (4.2.1) のように各 $\xi^{(0)} \in \mathbb{I}$ につき、最終連続同時スイッチ先レジーム $\xi^{(m)}$ による $S_n^{\xi^{(0)} \dots \xi^{(m)}} \cap C_{n-m}^{\xi^{(m)}}$ が最終継続領域となり、曲線の形状はこの継続領域上の古典解によって形成される。4.3.1 節の議論によりスイッチ領域内でも、実質的には最終スイッチ先の継続領域上での描画手順を用いてグラフを描画している。これらの色の切れ目が領域相互の境界であり、つまりそれが最適戦略におけるスイッチ発生箇所に相当する。

この手順を繰り返すことにより任意の n について値関数の計算を行うことができる。試みに $n = 5$ までを描画したのが図 4.4 である。もはや情報量が多すぎて図が煩雑であるが、チャート自体は EPS ファイル形式で作成しており、ベクトル画像のため文書は任意倍率に拡大可能である。この文書が電子ファイルであれば細部に渡り内容が検証可能であろう。

4.3.3 初期値問題と解の管理

処理全体の中で厄介なのは、式 (4.2.4) による継続領域境界の両端による 4 元連立の非線型連立方程式の求根処理であろう。通常は方程式の解を求める数値計算ライブラリーを呼ぶことになるであろう。本稿では

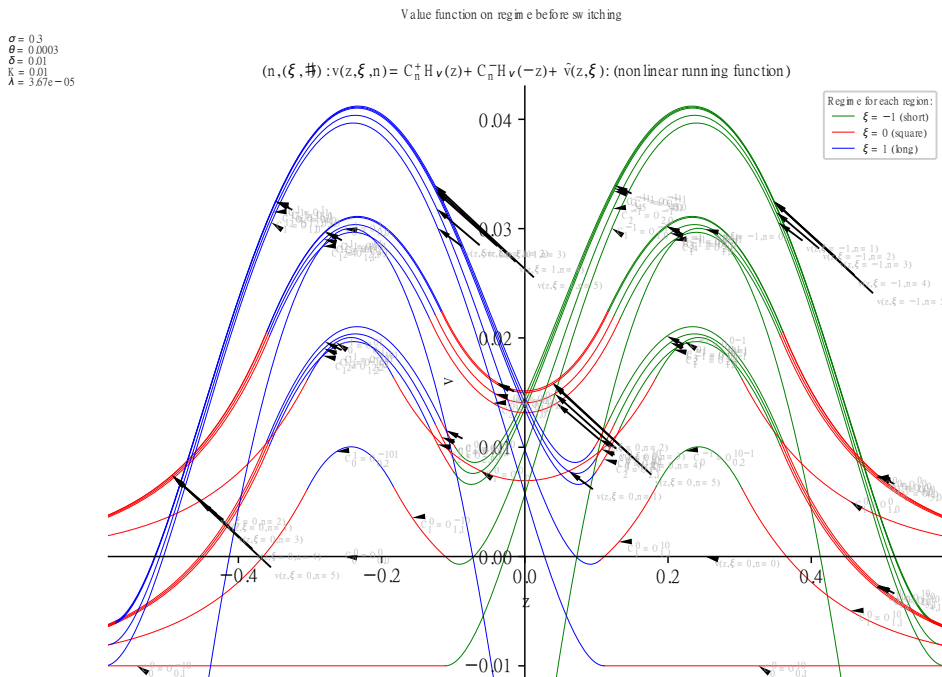


図 4.4 値関数 $v(z, \xi, n), \xi = \{-1, 0, 1\}, n = 0, 1, \dots, 5$

ニュートン法の関数を用いた。外部関数を呼ぶのは、内容に信頼がおける反面、トラブルが起こっても内部をデバックする自由度が限定的である。収束計算を行うことになるが、どの程度の誤差以内であれば真の解と見做すのかの制御はユーザーに任されており、試行錯誤を要する。さらに4.1.2節で取り扱ったように、本稿は巨大な値をとり得る Hermite 関数を含む計算をしているため、誤差と見做すべき数値の水準も場合によって変化するため注意を要する。

ニュートン法を用いる上で最も知恵が求められるのは、初期値の入力である。この手法の場合、原則的には解の近傍を初期値として選択できないと収束しない。収束計算であるため、求めるべき真の値の近傍を初期値に入れられれば短時間で高精度の解が発見されるため理想的なのであるが、当然ながら、不明な解を求めるために関数と呼んでいることを考えると、解の近傍は普通は予め分かるものではない。ただ、再帰的な計算を繰り返す場合、 n の値関数を計算する際には $n - 1$ の解を初期値に用いればうまく行くことが多い。しかし全く新しい問題を初めて解くような場合で解が存在するかどうか不明な場合には特に試行錯誤を繰り返すことになるであろう。未知数が実数の場合、式 (4.1.3) で表されるような実数全域の範囲から解の場所を推測するのはほぼ不可能に近いであろう。特にエルミート関数のような爆発しやすい関数を取り扱うような場合、解も常識的とならない場合もあり、初期値も見当がつかない恐れがある。

このように苦労して求めた解は蓄積しておく、後に類似のパラメータを持つ方程式が現れた時、その解を初期値に用いることにより楽に収束計算できる場合がある。少なくとも何もヒントがない場合と比べると根発見の手掛かりとなる。そのためパラメータのパターンと解の対応表を蓄積するようなデータベースを構築することが望ましい。そうすることにより、長い目で見れば効率よく数値計算できる。本稿では Python 組み込み

のデータベース、sqlite3 パッケージ (表4.1) を用いてこのデータベース機能を実装した。

4.3.4 解析的に自明な解の導入による解の存在範囲の推定

前節で、ニュートン法で方程式の解の探索の際に知恵を要するのが初期値の決定であることを説明した。実数空間上でニュートン法の初期値を決定することは、求めるべき解そのものを求めることと大差なく、事前知識が皆無の場合、巨大な実数空間の中から解の位置を言い当てることは不可能である。求解のための一つの提案は、解析的に自明な解を導入することである。すなわち、与えられたパラメータのいくつかの値を一時的に修正することにより、解析的に明らかに求まる解を用いて、そこから少しずつ修正したパラメータを元の問題の値に徐々に近づけつつその都度、前ステップで求められた解を次のステップの初期値に用いることにより、最終的に目的とする元のパラメータ・セットまでたどり着くという手法である。この手法は、パラメータと解の関係が連続的であるという想定に基づいている。すなわち、パラメータ・セットが類似している方程式の解どうしは互いに近い位置関係にあると想定している。

例えば本稿の問題の場合、 $n = 1$ の $z = z^\partial$ の境界条件式 (4.2.4) に一般解 (4.2.3) を当てはめると、

$$C_1^{\xi, +\{\beta_i\}} H_\nu(z^\partial) + C_1^{\xi, -\{\beta_i\}} H_\nu(-z^\partial) + \hat{v}(z^\partial, \xi) = \hat{v}(z^\partial, \hat{\xi}) - K, \quad (4.3.1)$$

$$C_1^{\xi, +\{\beta_i\}} H_{\nu-1}(z^\partial) - C_1^{\xi, -\{\beta_i\}} H_{\nu-1}(-z^\partial) + \hat{v}'(z^\partial, \xi)/(2\nu) = \hat{v}'(z^\partial, \hat{\xi})/(2\nu). \quad (4.3.2)$$

ここで、レジーム $\xi = 0, \hat{\xi} = \pm 1$ の場合を考えると、 $\hat{v}(z, \xi)$ の定義より、 $\hat{v}(z^\partial, \xi) = \hat{v}'(z^\partial, \xi) = 0$ 。

ここで、式 (4.3.1), (4.3.2) を $C_1^{\xi, \pm\{\beta_i\}}$ を 2 独立変数とする二元連立一次方程式と考え、その非斉次項が 0 となる次の場合を考えると自明な解のケースを作りだせる。すなわち、

$$\begin{cases} \hat{v}(z^\partial, \hat{\xi}) = K, \\ \hat{v}'(z^\partial, \hat{\xi}) = 0, \end{cases} \quad (4.3.3)$$

となるパラメータが存在すれば、線形独立な連立方程式の根の関係から、 $C_1^{\xi, \pm\{\beta_i\}} = 0$ という解析的に自明な解が得られ、数値計算の支援となる。以下の命題に式 (4.3.3) を満たす条件を示す。

命題 4.3.1 (自明な解 ($n = 1, \xi = 0, \hat{\xi} = \pm 1$)).

$n = 1, \xi = 0, \hat{\xi} = \pm 1$, および、

$$\lambda = \lambda^* \equiv \frac{2\theta + \delta}{2\sigma^2(\theta + \delta)} \{ \sqrt{\delta \{ K^2 \delta (\theta + \delta)^2 + \theta^2 \sigma^2 \}} - K \delta (\theta + \delta) \} > 0$$

のとき、解析的に自明な次の解が得られる。

$$\begin{cases} \text{微分方程式の未定係数: } C_1^{\xi, \pm\{\beta_i\}} = 0, \\ \text{自由境界の位置: } z^{\partial \hat{\xi}} = -\hat{\xi} \frac{\sqrt{\theta} \theta (2\theta + \delta)}{2\lambda^* \sigma (\theta + \delta)} \quad (\hat{\xi} = \pm 1) \end{cases}$$

証明.

関数 $\hat{v}(z, \hat{\xi}), \hat{\xi} = \pm 1$ の解析幾何学的形状は上に凸の放物線となり、式 (4.3.3) のとき、放物線の頂点は (z^∂, K) 、軸は $z = z^\partial$ である。

放物線 $\hat{v}(z, \hat{\xi}), \hat{\xi} = \pm 1$ の軸は、

$$z^{\partial \hat{\xi}} = -\hat{\xi} k_1 / (2k_2) = -\hat{\xi} \frac{\sqrt{\theta} \theta (2\theta + \delta)}{2\lambda \sigma (\theta + \delta)} \quad (4.3.4)$$

であり、頂点の y 座標

$$b \equiv k_1^2/(4k_2) - k_0 = \frac{\theta^2(2\theta + \delta)}{4\lambda(\theta + \delta)^2} - \frac{\lambda\sigma^2}{\delta(2\theta + \delta)}$$

を $b = K$ となるように、 $\lambda = \lambda^*$ を決めると、

$$\lambda^* = \frac{2\theta + \delta}{2\sigma^2(\theta + \delta)} \{ \sqrt{\delta\{K^2\delta(\theta + \delta)^2 + \theta^2\sigma^2\}} - K\delta(\theta + \delta) \} > 0.$$

このときの軸 (式 (4.3.4)) の位置は、

$$z^{\partial\xi} = -\hat{\xi} \frac{\sqrt{\theta\theta(2\theta + \delta)}}{2\lambda^*\sigma(\theta + \delta)} \quad (4.3.5)$$

である。

つまり $\lambda = \lambda^*$ とするとき、解析的に自明な解は、微分方程式の未定係数を $C_1^{\xi, \pm\{\beta_i\}} = 0$ として、また自由境界の位置 $z^{\partial\xi}$ ($\hat{\xi} = \pm 1$) は式 (4.3.5) として得られる。

□

式 (2.1.17) より式 (2.3.32) の判別式 D は、

$$D = k_1^2 - 4k_2(K + k_0) = 4k_2(b - K). \quad (4.3.6)$$

これより、

$$\lambda \leq \lambda^* \iff b \geq K \iff D \geq 0 \implies \mathcal{S}_n^0 \neq \emptyset, \forall n \geq 1. \quad (4.3.7)$$

これより、 $\lambda \leq \lambda^*$ のとき任意の $n \geq 1$ でレジーム $\xi = 0$ 上にスイッチ領域の存在が保証される。さもなくば、 n によっては \mathbb{R} 全域で継続領域ということもあり得る。すなわち $\lambda = \lambda^*$ は、全ての n に対して $\xi = 0$ から他のレジームにスイッチできる可能性のあるリスク回避係数の上限である。リスク回避係数 λ が λ^* を超すと、 $\xi = 0$ から他のレジームへスイッチできる保証は消滅する。また、式 (4.3.7) は式 (4.3.3) のとき等式で成立する。すなわち、

$$[\text{式 (4.3.3)}] \iff \lambda = \lambda^* \iff b = K \iff D = 0. \quad (4.3.8)$$

式 (4.3.8) の状態にある場合の値関数を図示したものが図 4.5 である。図 4.5 の 3 個の連結部分継続領域 $C_1^{0\{\beta_i\}}$, $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3$ のいずれの有限端点においても smooth pasting の境界条件式 (2.2.8), (4.2.4), (4.3.3) が満たされていることが確認される。

図 4.5 は図 4.2 の特別な場合であり、より一般的な状態を表す図 4.2 では C_1^0 を構成する個々の連結継続領域間に適度な隙間が空いているが、一方、特別な場合である、図 4.5 では隙間の間隔は 0 である。すなわち実数 \mathbb{R} 上ほぼ全域が継続領域となる。ただし隙間間隔の面積が 0 であっても状態がそこへ到達すればスイッチが発生するという意味では隙間の両岸の領域は分断されたままである。

こうして $\lambda = \lambda^*$ のときの自明の解は求められた。数値計算上はこれを手掛かりとして、次に λ^* の近傍で、実際に与えられた λ の方向に λ の値を近づけながら対応する解を求める。その解を次のステップの問題の初期値として用いる。それを繰り返し、最終的に与えられた λ の解までたどり着くという手順である。中間時点で得られたパラメータ・セットと対応する最適解の対応表というデータの管理をデータベースで行うことにより効率よく解を発見できる。こうして求解可能なパラメータ・セットのパターンを増やす度にデータベースにそれらの計算結果を蓄積することにより未知のパラメータのパターンに対しても解を早く探し出せるような環境を構築する。

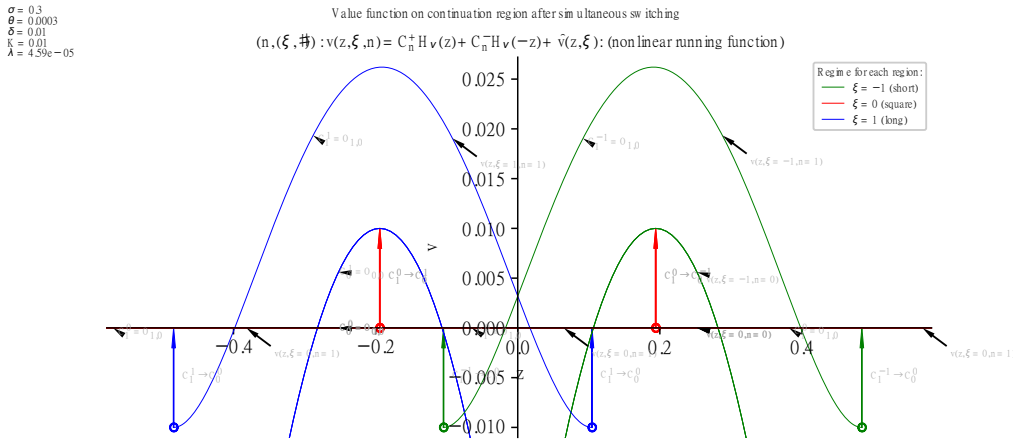


図 4.5 自明な解によるスイッチの様子： $v(z, 0, 1) \rightarrow \hat{v}(z, \hat{\xi}), \hat{\xi} = \pm 1$

一般のケースの図4.3を参照すると、 C_1^0 は通常、3 個の連結部分継続領域に分かれている。それらを左から順に $C_1^{0\{\beta\}}, \beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3$ とおく。図4.5では 3 個の領域は隙間なく配置されており、それらの境界は左右の放物線の軸上にある。隙間はないが穴が開いており、過程 Z がそこに到達すると他のレジームへのスイッチ遷移が発生する。図では継続領域 C_0^0 を構成する、各連結継続領域 $C_1^{0\{\beta\}}, \beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3$ の赤線は水平軸に重なっている。

4.3.5 線型問題と非線形問題

式 (2.1.13) で包括的に定義した評価関数は二次関数の形式であったが、研究の経緯としては最初にSuzuki [2016] で線型評価関数、つまり期待リターン最大化モデル、その後Suzuki [2021] で新たに二次評価関数、つまりリスク・リターン最適化モデルという順に改良され、本稿では2.3.8節で個別の問題として取り上げられた。つまり初期のモデルは式 (2.1.13) でリスク回避パラメータを $\lambda = 0$ とおいたものである。すなわち二次評価関数モデルの全ての計算結果において、 $\lambda \rightarrow 0$ としたものが線型評価関数モデルの結果に一致すると予想される。このことは二次評価関数モデルで新たに導入されたパラメータ λ に関する最適解の感応度分析を行うことにより確かめられる。3.2.4.1節では参照領域の λ に対する感応度分析を行った。

4.3.4節で導入された λ^* を用いて、 λ の値を λ^* から $\lambda \rightarrow 0$ に至る途中まで計算させたものが図4.6である。この図では、各 $\xi \in \mathbb{I}$ 毎に別グラフにて、3 個の連結継続領域 $C_n^{\xi\{\beta_1\}}, C_n^{\xi\{\beta_2\}}, C_n^{\xi\{\beta_3\}}$ の有限境界、全部で 4 点を縦軸の λ 水準毎に同じ色を同じ n としてチャートに描画した。共通横軸は z 、各縦軸は λ を表す。

各 3 チャートの縦軸の最大値は $\lambda = \lambda^*$ である。このパラメータ λ^* は4.3.4節で導入されたが、特徴的なのは、 $n = 1$ 、レジーム $\xi = 0$ では $\lambda = \lambda^*$ のとき連結継続領域境界同士の間隔が 0 になることであった。 $\lambda = \lambda^*$ を最大値として $\lambda < \lambda^*$ の領域では λ を小さくするに伴い境界間隔 (i.e., レジーム $\xi = 0$ にとっての穴の大きさ) が幅広になっている (逆に継続領域 C_n^0 の面積が小さくなる)。 $\xi = 0$ の他の n でも λ を小さくするに従って境界間の穴の間隔が幅広になることが観測される。

レジーム $\xi = 0$ はポジションを取らないことに相当し、その状態ではリスクは小さくなるが、これはリスク回避係数 λ が大きくなると継続領域 C_n^0 の面積が大きくなり、 $\xi = 0$ 以外のポジションをとり難くなるということに相当する。特に $\lambda = \lambda^*$ のとき他のレジームへのスイッチ領域の面積が 0 になっている。これは $\xi = 0$

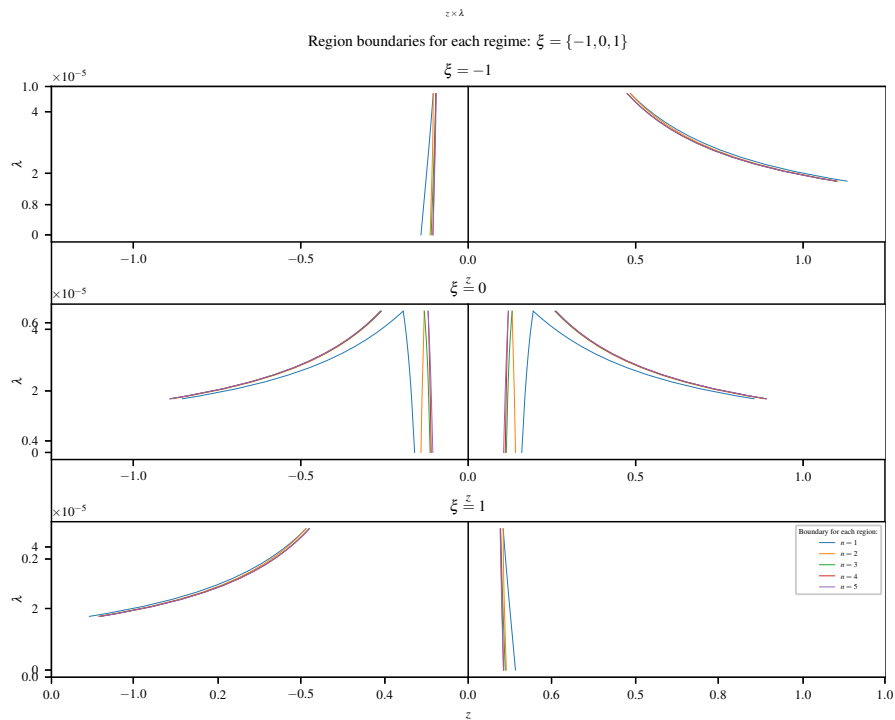


図 4.6 継続領域境界位置のリスク回避係数 λ に対する感応度分析

各 $\xi \in \mathbb{I}$ 毎に別グラフにて、各リスク回避係数 λ の水準毎に 3 個の連結継続領域 $C_n^{\xi\{\beta_1\}}, C_n^{\xi\{\beta_2\}}, C_n^{\xi\{\beta_3\}}$ の有限境界、全部で 4 点を同じ色を同じ $n (1, \dots, 5)$ としてチャートに描画した。共通横軸は z 、縦軸はいずれも λ である。

以外のポジションに最もなり難い状態を表す。逆に $\lambda = \lambda^*$ の状態からリスク回避係数 λ の値を小さくしていくと、他のレジームへのスイッチ領域の面積が拡大する。これは他のレジームへ移行し易くなり、よりリスクを取りやすくなることに相当する。 λ を小さくするにつれ、外側に広がる曲線が観測されるが、 $\lambda \rightarrow 0$ でこれは $\pm\infty$ まで拡大する。その際には各 ξ ともに連結継続領域の個数は \mathbb{R} 上に 1 個となり、Suzuki [2016] で取り上げられた線型評価関数による最適化問題の解に帰着することになる。 $\xi = -1$ のときの領域の右端は ∞ に、 $\xi = 1$ のときの領域の左端は $-\infty$ に発散し、それぞれ元あったスイッチ領域が塞がってしまうが、これも Suzuki [2016] と整合的な結果である。

以下の表 4.1 に、分析で用いられた Python 標準・外部ライブラリーを示す。

パッケージ名	用途	分析上の使用目的
math	数学関数	一般的な数学関数の計算
numpy	多次元配列	配列・行列計算
pandas	データ解析	メモリー上のデータ処理
matplotlib	描画	チャート描画
scipy	特殊関数	特殊関数呼び出し、ニュートン法実行、その他数学計算
sqlite3	データベース	最適解のデータベース管理
logging	デバッグ情報	デバッグ情報出力管理
portion	区間・領域計算	継続領域相互の演算処理

表 4.1 分析で用いられた主要な Python 標準・外部パッケージ

第5章

シミュレーションと実証分析

5.1節と5.2節で本稿のモデルに基づくモンテカルロ・シミュレーションと実証分析を行う。それとともに各計算処理を実行に移すための参照用疑似プログラムを提供することによりシミュレーション、実証分析を再現可能なものとする。ここでは、リスクを考慮しない評価関数 ($\lambda = 0$) を用いる。

5.1 Monte Carlo simulation

この節で Monte Carlo シミュレーションを行った後に、後続の節で実証分析（ヒストリカル・シミュレーション）を行う。

5.1.1 離散化

まず連続時間表現による式 (2.1.2), (2.1.3) を微小有限時間間隔 Δt へ離散化する。過程 $\{Z_t\}$ を離散化した ΔZ_t は、

$$\Delta Z_t \equiv -\theta Z_t \Delta t + \sqrt{\theta} \Delta W_t, \quad \Delta X_t \equiv \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}} \Delta Z_t. \quad (5.1.1)$$

ここで標準ブラウン運動 $\{W_t\}$ を離散化した ΔW_t は、 $\Delta W_t \sim N(0, \Delta t)$ つまり ΔW_t は平均 0 標準偏差 $\sqrt{\Delta t}$ の正規分布に従う。過程 $\{X_t\}$ の増分は $\Delta X_t = -\sqrt{\theta} \sigma Z_t \Delta t + \sigma \Delta W_t$ である。

標準ブラウン運動 $\{W_t\}$ を等間隔 $\Delta t = |t_{j+1} - t_j|$ for $t_j, j = 0, \dots, N$ に離散化した増分 ΔW_{t_j} を得るため、Box-Muller 法を用いる。これにより得られた増分 ΔZ_{t_j} for $t_j, j = 0, \dots, N$ を用いてそれらの時点 t までの合計値 $\tilde{Z}_t \equiv \sum_{t_j \leq t} \Delta Z_{t_j}$ を計算する。同様にして式 (2.1.28) を用いて連続時間における停止時 τ_i も離散化すると、

$$\tilde{\tau}_{i+1} = \inf\{s \geq \tilde{\tau}_i \mid \tilde{Z}_s \in \mathcal{S}_{n-i}^{\xi}\} \quad i = 0, 1, \dots, \quad (5.1.2)$$

となる。ただし $\tilde{\tau}_0 \equiv t_0$ 。次いで式 (2.1.10) の期待値演算子内部の評価関数（確率過程）を v_s とおき、それを離散化した指標 \tilde{v} は $m \geq 1$ に対して、

$$\tilde{v}_{t_m} \equiv \sum_{j=1}^m e^{-\delta(t_j - t_0)} \xi_{t_j} \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}} \Delta Z_{t_j} - \sum_{t_m \geq \tilde{\tau}_i \geq t_0} e^{-\delta(\tilde{\tau}_i - t_0)} |\xi_{\tilde{\tau}_i} - \xi_{\tilde{\tau}_{i-1}}| K. \quad (5.1.3)$$

ここまでの考察に基づき、市場観測により得られるペア構成銘柄の株価履歴データを受け取り、それに対する最適スイッチ戦略を構築し、そのパフォーマンスを計測するアルゴリズムを構築する。

5.1.2 仮想プログラム StrategyLoop

シミュレーションのアルゴリズムの中核を成す処理部分が仮想プログラム `StrategyLoop` である。Listing 5.1 に掲載した仮想プログラム `StrategyLoop` 中では、過程 $\{Z_t\}$ を離散化したサンプルパスから式 (5.1.3) で表される最適スイッチ戦略の評価関数によるパフォーマンス履歴 $\{\tilde{v}\}$ を数値計算により求め、 $\{\tilde{v}\}$ からそのシャープ・レシオを計算する。

Listing 5.1 Pair process loop function (Source: Suzuki [2018] Figure 1)

```

1 | Function StrategyLoop( $\theta, \mu, \sigma, \{Z_t\}, \xi_0, n, t_0$ )
2 | begin

```

```

3 |      $\nu \leftarrow -\delta/\theta;$ 
4 |      $k \leftarrow \sqrt{\theta\sigma}/(\delta + \theta);$ 
5 |      $m \leftarrow n;$ 
6 |      $\xi_{t_0} \leftarrow \xi_0;$ 
7 |      $\tilde{t}_{t_0} \leftarrow 0;$ 
8 |     for each  $j=0, \dots;$  // increment of time by  $\Delta t$ 
9 |          $t_j \leftarrow t_{j-1} + \Delta t;$ 
10 |         $\Delta Z_{t_j} \leftarrow Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}};$ 
11 |        // Calculate the performance criterion (5.1.3).
12 |         $\tilde{t}_{t_{j+1}} \leftarrow \tilde{t}_{t_j} + e^{-\delta(t_j-t_0)} \xi_{t_j} \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}} \Delta Z_{t_j}$  // return from the pair position
13 |
14 |        // Calculate  $S_m^{\xi_{t_j} \hat{\xi}}$  for each  $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi_{t_j})$ 
15 |        call FindSwitchingRegion( $m, \nu, k$ ); // (Listing 5.2)
16 |
17 |        if  $Z_{t_{j+1}} \in S_m^{\xi_{t_j} \hat{\xi}}$  for some  $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi_{t_j})$  then
18 |            begin // rebalance
19 |                 $\xi_{t_{j+1}} \leftarrow \hat{\xi};$  // position change
20 |                 $\tilde{t}_{t_{j+1}} \leftarrow \tilde{t}_{t_{j+1}} - e^{-\delta(t_{j+1}-t_0)} |\hat{\xi} - \xi_{t_j}| K$  // transaction cost
21 |                 $m \leftarrow m-1;$  // decrement of the number of options to switch
22 |            end
23 |        else
24 |             $\xi_{t_{j+1}} \leftarrow \xi_{t_j};$  // position unchanged
25 |        end for
26 |        return sharp ratio for  $\{\tilde{t}\};$ 
27 |    end

```

Listing 5.1の第3–7行でパラメータが初期化される。それぞれ初期時刻が t_0 、確率過程 ξ_t の t_0 における初期状態 $\xi_{t_0} \in \mathbb{I}$ が与えられた状態 $\xi_0 \in \mathbb{I}$ に、スイッチ権利数 m の初期値が n に、累積パフォーマンス \tilde{t}_t の初期値が $t = t_0$ で 0 に設定される。第8–23行にある for-loop で時刻の Δt ずつの増加が行われ、それに伴い確率過程 $\{Z_t\}$ の実現値がその都度計算される。まず現状の状態 ξ_{t_j} を確認し各ステップで時刻を t_{j-1} から t_j へと増加させ、それに伴う $\Delta Z_{t_{j+1}}$ の実現値を計算し、その間の資産ポジションからくる追加リターン $e^{-\delta(t_j-t_0)} \xi_{t_j} \frac{\sigma}{\sqrt{\theta}} \Delta Z_{t_j}$ を累積パフォーマンス \tilde{t}_{t_j} に蓄積する。そして第14行で関数 FindSwitchingRegion が呼び出され、 $S_m^{\xi_{t_j} \hat{\xi}}$ が各 $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi_{t_j})$ にわたり計算される。第15行でその時点の状態変数 $Z_{t_{j+1}}$ がいずれかのスイッチ領域 $S_m^{\xi_{t_j} \hat{\xi}}$ に属するか否かが検証される。そこでもし $Z_{t_{j+1}} \in S_m^{\xi_{t_j} \hat{\xi}}$ を満たすレジーム $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi_{t_j})$ が存在すれば、そこで次のレジーム $\xi_{t_{j+1}}$ はレジーム $\hat{\xi}$ へと遷移され、取引コスト $e^{-\delta(t_{j+1}-t_0)} |\hat{\xi} - \xi_{t_j}| K$ が支払われ、スイッチ権利数 m は 1 減少する。最後に最適戦略による全ての累積パフォーマンス履歴 $\{\tilde{t}\}$ が計算されたのち、関数 StrategyLoop はそのシャープ・レシオを計算して返す。

5.1.3 スイッチ領域 $S_N^{\xi \hat{\xi}}$ の特定

前節の中核プログラムから呼ばれる、スイッチ領域を特定する処理を司る関数を説明する。式 (2.3.14) の $z_n^0, z_n^1 > 0$ を連立方程式 (2.3.10), (2.3.11) より数値計算するアルゴリズムが Listing 5.2 に掲載した仮想プログラム FindSwitchingRegion (Listing 5.2) である。このサブルーチンは関数 StrategyLoop から呼ばれる。式 (2.3.8) より Hermite 関数 $H_\nu(z)$ を有限多項式近似により計算する。連立方程式 (2.3.10), (2.3.11) により、任意のスイッチ権利数 $N \geq 1$ に対して、Listing 5.2 に示す仮想プログラムの関数 FindSwitchingRegion は、スイッチ領域 $S_N^{\xi \hat{\xi}}$ を求める。3 引数 (N, ν, k) がこの関数に渡され、 C_N^0, C_N^1, z_N^0 及び z_N^1 が返値として計算される。この仮想プログラムの第2行でパラメータ C_0^0, C_0^1 が初期化される。第3–14行が C_n^0, C_n^1 を $n = 1, \dots, N$

に対して計算するためのループを形成している。そのループの各ステップで、 C_n^0, C_n^1 が C_{n-1}^0, C_{n-1}^1 から計算され、同時に z_n^0, z_n^1 が第5行と第10行でそれぞれ求解される。こうして領域 $\mathcal{S}_N^{\xi, \hat{\xi}}, \hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \xi \in \mathbb{I}$ が $n = 1, \dots, N$ に対して特定される。

Listing 5.2 Find $\mathcal{S}_N^{\xi, \hat{\xi}}$ for each $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \xi \in \mathbb{I}$ (Source: Suzuki [2018] Figure 1)

```

1 | Function FindSwitchingRegion(N, ν, k)
2 | C00 = C01 ← 0;
3 | for n ← 1 to N do
4 |   begin
5 |     solve zn0 for Cn0(+) = Cn0(-); where
6 |     Cn0(+) ≡  $\frac{C_{n-1}^1 H_\nu(z_n^0) - \hat{v}(z_n^0, 1) - K}{H_\nu(z_n^0) + H_\nu(-z_n^0)}$ ;
7 |     Cn0(-) ≡  $\frac{C_{n-1}^1 H_{\nu-1}(z_n^0) + \frac{k}{2\nu}}{H_{\nu-1}(z_n^0) - H_{\nu-1}(-z_n^0)}$ ;
8 |     Cn0 ← Cn0(+) = Cn0(-);
9 |
10 |    solve zn1 for Cn1(+) = Cn1(-); where
11 |    Cn1(+) ≡  $\frac{C_{n-1}^0 \{H_\nu(z_n^1) + H_\nu(-z_n^1)\} - \hat{v}(z_n^1, 1) - K}{H_\nu(-z_n^1)}$ ;
12 |    Cn1(-) ≡  $\frac{C_{n-1}^0 \{-H_{\nu-1}(z_n^1) + H_{\nu-1}(-z_n^1)\} - \frac{k}{2\nu}}{H_{\nu-1}(-z_n^1)}$ ;
13 |    Cn1 ← Cn1(+) = Cn1(-);
14 |   end;
15 | return  $\mathcal{S}_N^{\xi, \hat{\xi}}$  for each  $\hat{\xi} \in \mathcal{A}(\xi), \xi \in \mathbb{I}$ ; // according to (2.3.14);

```

関数 `FindSwitchingRegion` にパラメータ $N = n, \nu = -\delta/\theta, k = \sqrt{\theta}\sigma/(\delta + \theta)$ を渡すことにより z_n^0, z_n^1 ($n = 1, \dots, N$) が数値計算される。例えば表5.1の入力パラメータセットに対して計算させた結果が図5.1である。3.2.3.1節での議論の通り $z_{n+1}^1 \leq z_{n+1}^0 = z_n^1 \leq z_n^0$ ($n \geq 2$) となっている。

Δt	μ	σ	θ	δ	K	N
1/250	0	0.2	6.5	0.01	0.02	10

表 5.1 基本データ事例 2 (出所) Suzuki [2018] Table 2

5.1.4 Monte Carlo Simulation 実行

最後に Monte Carlo simulation を実行するメイン関数 `MonteCarloSimulation` を取り上げる。ここでは過程 $\{Z_t\}$ の履歴を、離散化された標準ブラウン運動過程のパス $\{W_t\}$ から生成して、サブルーチン `StrategyLoop` にそのサンプルパス Z_{t_j} を渡し、最適スイッチ戦略による評価関数を計算する。

Listing 5.3 Monte Carlo simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)

```

1 | Function MonteCarloSimulation(θ, μ, σ, Xt0, ξ0, n, t0, T)
2 |   begin
3 |     Zt0 ←  $\frac{\sqrt{\theta}}{\sigma}(X_{t_0} - \mu)$ ;
4 |     // Generate independent standard normal random numbers {ΔW.}
5 |     // by Box-Muller's method

```

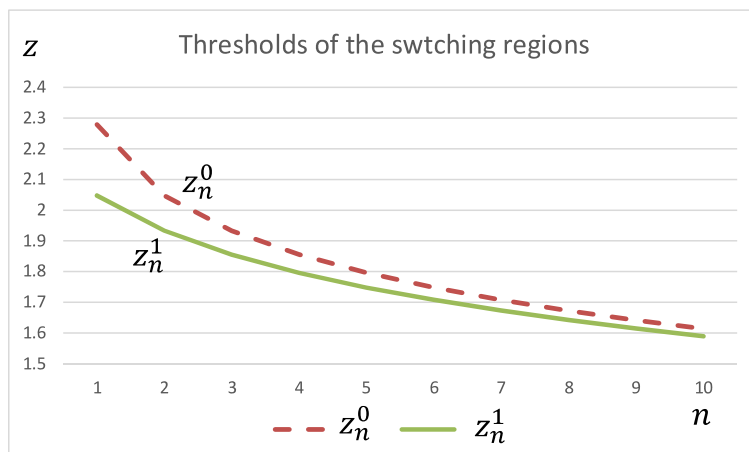


図 5.1 n 別最適スイッチ地点 z_n^0, z_n^1 (出所) Suzuki [2018] Figure 6

表5.1のパラメータに基づき $1 \leq n \leq 10$ に対して z_n^0, z_n^1 を連立方程式 (2.3.10), (2.3.11) より計算し結果をチャートに示した。横軸を n 、縦軸を z とした。

```

6 generate  $\Delta W_{t_j} \sim N(0, \Delta t), j = 0, \dots, (T - t_0)/\Delta t - 1;$ 
7 // Construct a sample path  $\{Z.\}$ 
8 for each  $j = 0, \dots, (T - t_0)/\Delta t - 1;$ 
9    $Z_{t_{j+1}} \leftarrow Z_{t_j} - \theta Z_{t_j} \Delta t + \sqrt{\theta} \Delta W_{t_j};$  // according to (5.1.1)
10 end for
11 call StrategyLoop( $\theta, \mu, \sigma, \{Z.\}, \xi_0, n, t_0$ ) // (Listing 5.1)
12 return the sharp ratio for the strategy to  $\{Z.\};$ 
13 end

```

Listing 5.3では第3行で式 (2.1.2) に基づいて確率過程 X_t の初期値 X_{t_0} を確率過程 Z_t の初期値 Z_{t_0} へと変換している。第6行で標準正規乱数系列 $\Delta W_{t_j}, j = 0, \dots, (T - t_0)/\Delta t - 1$ を Box-Muller 法 (Box, Muller et al. [1958]) により生成している。離散化された標準ブラウン運動過程の増分 ΔW_{t_j} を用いて第9行で離散化された Z_{t_j} が式 (5.1.1) より生成される。次いで第11行で Listing 5.1の関数 StrategyLoop を Z_{t_j} を引数として呼び出し、最適戦略をその実現値 Z_{t_j} に対して適用する。最後に第12行が関数 StrategyLoop によるパフォーマンス実績値のシャープ・レシオを返す。

このシミュレーションは Monte Carlo 法で行われるが、以降のヒストリカル・シミュレーションとの整合性を保つためシミュレーション期間を 2010 年 (t_0) から 2015 年末までとしている。この Monte Carlo simulation 関数は次の Listing 5.4に示す 1 行の仮想プログラムから呼び出される。

Listing 5.4 Execution of the Monte Carlo simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)

```

1 call MonteCarloSimulation( $\theta, \mu, \sigma, X_{t_0}, \xi_0, n, t_0, T$ )

```

5.1.5 シミュレーション結果検証

関数 MonteCarloSimulation の呼び出し結果を、図5.2に示す。水平時系列軸上の時点 t_j に対するサンプルパス \tilde{Z}_{t_j} (右軸) を細点線で表示した。対応する最適戦略によるレジームスイッチ過程 ξ_{t_j} を四角い赤実線 (左

軸)で、そしてスイッチ権利残数を四角い点線(左軸)でそれぞれ示した。スイッチ権利数の初期値は10である。最後に対応する戦略による累積評価関数、式(5.1.3)の \tilde{l}_{t_j} を太い実線(右軸)で表示した。最適戦略によるレジーム遷移をみると、レジーム $\xi_t = 0$ (square state)へのスイッチはされ難くなっていることがわかるがこれは、3.1, 3.2.3.1節で議論した理由によるものである(併せて図5.1も参照)。

この戦略による日次リターン $\Delta\tilde{l}_{t_{j+1}} \equiv \tilde{l}_{t_{j+1}} - \tilde{l}_{t_j}$ の平均は0.0006856、標準偏差は0.0001148、シャープ・レシオは5.970と計算される。

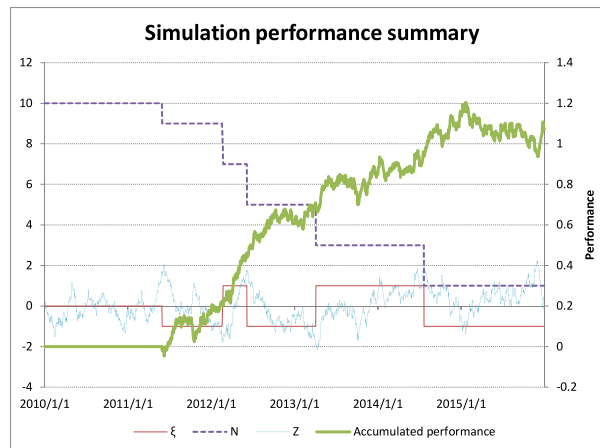


図 5.2 Monte Carlo simulation によるパフォーマンス (出所) Suzuki [2018] Figure 7

式(2.3.14)に基づく離散化された戦略により、各 t_j (水平軸)毎に離散化されたサンプルパス \tilde{Z}_{t_j} を細点線(右軸)で、対応する四角実線のレジーム ξ_{t_j} (左軸)及び四角点線のスイッチ権利数(左軸)とともに表示した。 n の初期値は10に設定。対応する最適戦略による式(5.1.3)による累積パフォーマンス \tilde{l}_{t_j} を太実線(右軸)で示す。

ここで本稿の最適戦略をGatev et al. [2006]の 2σ 戦略と比較する。彼らのスイッチ地点は本稿の確率過程 X_t では、 $(\mu - 2\sigma\sqrt{\Delta t}, \mu + 2\sigma\sqrt{\Delta t})$ 、過程 Z では、 $(-2\sqrt{\Delta t\theta}, 2\sqrt{\Delta t\theta})$ に相当する。彼らの戦略と比較するため、共通のサンプルパス $\{\Delta W_{t_j}\}$ (或は $\{\Delta X_{t_j}\}$)、共通のパフォーマンス評価関数(5.1.3)、共通のパラメータセット(表5.1)、同一期間でシミュレーションを行った。設定されたスイッチ発動地点が異なるだけの比較である。両戦略によるシミュレーション結果を比較するため図5.3では標本空間 Ω に属する共通のサンプルパス・イベント $\{\Delta W_t\}$ に基づいて、本稿の戦略による、本稿の評価関数によるパフォーマンス系列 $\{\tilde{l}_{t_j}\}$ のシャープ・レシオを水平軸方向に、彼らの 2σ 戦略によるそれを垂直軸方向にとって散布図の各点としてプロットした。100系列のサンプルパスを生成している。1系列毎に散布図上に1点をプロットしている。観測できるのは本稿のスイッチ戦略の方が彼らの 2σ 戦略より結果がよいことである。Monte Carlo simulationsで100回の試行による本稿のスイッチ戦略の平均日次シャープ・レシオは2.345であるのに対して、 2σ 戦略のそれは-0.082であった。

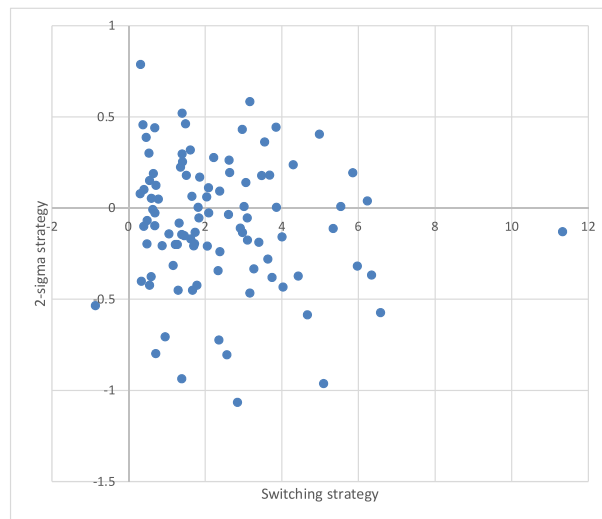


図 5.3 2 戦略による評価関数のシャープ・レシオ比較 (出所) Suzuki [2018] Figure 8

標本空間 Ω に属する共通のサンプルパス・イベント $\{\Delta W_t\}$ に基づく本稿の戦略による本稿の評価関数によるパフォーマンス系列 $\{\tilde{l}_{t_j}\}$ のシャープ・レシオを水平軸方向に、 2σ 戦略によるそれを垂直軸方向にとって散布図の各点としてプロットした。100 系列のサンプルパスを生成している。本稿のスイッチ戦略の方が彼らの 2σ 戦略より結果は良好である。

5.2 実証分析

この節では実際の市場データを用いて実証分析を行い、本稿の最適スイッチ戦略の現実市場への適用可能性を検証する。Listing 5.1の関数 `StrategyLoop` を用いて、5.1節で行ったような、投資戦略のシミュレーション・アルゴリズムへの実証データの適用を行う。その前にいくつかのステップが必要である。まず現実の市場から適切な株式のペアの選択が必要である。すなわちペアの価格乖離の確率過程が本稿が想定している確率過程に従っているものを抽出する(5.2.1節)。次いで5.2.2節ではそれぞれの選択されたペアに対し本稿が想定している確率過程のパラメータの推定を行う。最後に5.2.3節で、5.1節で行ったような、戦略に対するシミュレーションを実行する。

5.2.1 ペアの選択

過去の市場データをモデルに適用するにあたり、世界中の市場の膨大な数の銘柄の組合せの中から適当なペアを抽出する。本稿が想定している確率モデルはペアの価格乖離が典型的な定常過程である O-U process に従うというものである。

実証分析が Monte Carlo simulation と異なるのは、実証分析ではペアの価格乖離過程の真の確率過程が不明であることである。予め不明であることはもちろんのこと、事後的にも不明である。Monte Carlo simulation では真の確率過程が既知なため戦略の最適性は検証可能であるが、実証分析では選択ペアが意図している確率過程に従うかどうかまでは検証可能であるものの、戦略の最適性まで検証するのは一般的には容易ではない。実証分析ではモデルが不明であることに由来する諸問題が発生する。確率変動項が、想定しているブラウン運動に従わないような場合、価格乖離過程は O-U process に従わないことになる。モデルのパラメータの推定誤差があるかもしれないし、そのパラメータが将来にわたって定数といえる保証はない。このように実証分析の場合には数々の問題が発生する。これらの問題はインサンプルの分析であっても然りである。アウトサンプルの場合には問題は更に大きくなる。本稿の分析目的は市場を予測することではなく、主に最適性の検証であるためインサンプルの検証を行う。

ペアの選択手法として、純粋なデータ主導なやり方を用いると計算負荷が大きい。理論的には世界の銘柄数の数十万×数十万のオーダーの組合せの中から選択しなくてはならない。建値通貨が異なる価格間の価格乖離の評価法にも異なる流儀がある。現実には計量的な基準だけではなく、ファンダメンタルズに基づいた評価基準も存在し、それらを組み合わせると効果的である。ファンダメンタルズに基づくペア選択基準として、本稿では stub pairs に注目する。これはある種の統計的裁定取引であり、同時に親子上場株式を買持ち・売り持ちする取引である。市場にはペアを抽出するのに都合のいいいくつかの基準やカテゴリが存在する。例えば産業や業種分類、親子を含む同族企業群、同一企業を発行体とする各種種類株等である。それらの基準による同一カテゴリに属する銘柄群の株価は連動して動く想定される。stub によるペアの構成銘柄どうしはファンダメンタルズを共有し価格は連動すると想定される。

まず世界に上場する銘柄の中から同一通貨建てのすべての stub のペアの組合せを抽出した。2016年5月現在、Bloomberg オンライン端末の'EQS' コマンド機能による抽出によると、2,223組のペアが存在した。本稿で用いた'EQS' コマンド機能の抽出条件を次に示す。

- Trading status: Active
- Security Attributes: Show Primary Security of company only

- Ownership Type : [Corporation] $\geq 51\%$
- Parent Company Name has data

株価リターンの履歴を分析する際、株価修正された引け値を用いる。修正株価とは配当権利落ちや株式分割、rights offerings 等の資本異動による株価修正を翌日までに株価に反映させたものである。

2 銘柄が共和分関係にあることを検定する一般的なアプローチは Engle-Granger の two-step approach (Engle & Granger [1987]) である。それは先ず各銘柄の修正株価履歴が 1 次の共和分関係 (価格の増分が定常過程に従う) にあることを検定し、次いで両者の間に定常な線型関係があるかどうかを検定される。そのような線型関係を OLS (ordinary least squares) で求め、OLS 残差が定常過程かどうかを検定するというものである。

しかし本稿の想定する 2 銘柄の価格履歴の関係はより限定的である。つまり、ペアの 2 銘柄の対数価格差 $X = \log S_A - \log S_B$ が定常過程、特に O-U 過程に従うことを想定している。このため実質 1 変数による、より直接的な仮説検定を行える。

式 (2.1.4), (2.1.2) より、

$$X_s = e^{-\theta(s-t)} X_t + \mu(1 - e^{-\theta(s-t)}) + \sigma \int_t^s e^{-\theta(s-u)} dW_u, \quad s \geq t. \quad (5.2.1)$$

式 (5.2.1) の右辺最終項は s を決めると被積分関数を決定的関数とする Ito 積分となり平均 0 の正規分布に従う。一方その分散 σ_1^2 は以下のように計算される。

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 \int_t^s e^{-2\theta(s-u)} du = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta(s-t)})$$

式 (5.2.1) を離散化するため、 $s = t + \Delta t$, $X_j = X_s$, $X_{j-1} = X_t$ とおくと、次のような差分方程式が成り立つ。

$$X_j = e^{-\theta\Delta t} X_{j-1} + \mu(1 - e^{-\theta\Delta t}) + \sigma_1 \varepsilon_{j-1}, \quad \varepsilon_j \sim \text{i.i.d. } N(0, 1), \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta\Delta t}) \quad (5.2.2)$$

こうして式 (5.2.2) は次のような 1 次の自己回帰モデル AR(1) に変換される。

$$X_j = \rho X_{j-1} + \alpha + \sigma_1 \varepsilon_{j-1}, \quad \varepsilon_j \sim \text{i.i.d. } N(0, 1), \quad (5.2.3)$$

ただし、自己回帰係数は $\rho = e^{-\theta\Delta t}$ 、ドリフトの定数は $\alpha = \mu(1 - \rho)$ 、残差リターンの標準偏差は $\sigma_1 = \sigma \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{2\theta}}$ である。ペアの構成銘柄 A, B の日々の修正株価による引け値データ $\{S_{A_j}\}_{j=1}^N, \{S_{B_j}\}_{j=1}^N$ よりその離散化された価格乖離過程 $X_j \equiv \log S_{A_j} - \log S_{B_j} = \log \frac{S_{A_j}}{S_{B_j}}$ が定常な AR(1) に従うようなペアを選択したい。 $\theta > 0$ で自己回帰係数は $\rho < 1$ であるため、単位根を持たない X_j を必要としている。検定の帰無仮説が「 X_t が単位根を持ち ($\rho = 1$)、かつ自己回帰の次数が $p = 1$ 」のとき、この帰無仮説の棄却は「 $\rho < 1$ (i.e., X_t が定常) または $p \geq 2$ (i.e., 誤差項 ε_t が $p - 1 \geq 2$ に対して $(p - 1)$ -次の自己相関を持つ)」を意味する。本稿では、自己回帰や誤差項の系列相関に関わらず定常過程の X_t を選択したいので、より一般に帰無仮説として、 H_0 : 「 $\rho = 1$ かつ任意の p -次自己相関」を用いることによって、棄却を単に「 $\rho < 1$ 」とすることができる。そこで小さくない p による p -次の系列相関誤差項を持つ自己回帰モデルを推定する。Hamilton [1994] Section 17.7 Case 3 に従い、次のような p -次の自己回帰モデルを前提とした単位根検定、augmented Dickey-Fuller 検定 (Dickey & Fuller [1979]) を行う。

$$X_j = x_j^\top \beta + \sigma_1 \varepsilon_j = \sum_{h=1}^{p-1} \zeta_h \Delta X_{j-h} + \alpha + \rho X_{j-1} + \sigma_1 \varepsilon_j \in \mathbb{R} \quad (j = 1, \dots, N), \quad (5.2.4)$$

ただし $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, 1^2)$. つまり ε_j は平均0、分散 1^2 、有限4次モーメントを持つ i.i.d. 系列で、

$$\begin{aligned} \beta &\equiv (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{p-1}, \alpha, \rho)^\top \in \mathbb{R}^{p+1}, \\ x_j &\equiv (\Delta X_{j-1}, \Delta X_{j-2}, \dots, \Delta X_{j-p+1}, 1, X_{j-1})^\top \in \mathbb{R}^{p+1}, \Delta X_{j-1} = X_{j-1} - X_{j-2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

このモデルは $\{X_t\}$ の最大 p -次の系列相関を吸収できる。対応する真の過程は $\alpha \neq 0, \rho = 1$ とおいた推定回帰式 (5.2.4) と同じ式である。よって帰無仮説は「価格乖離過程 X_t がドリフトのある p -次自己相関を持つ単位根過程に従う」となる。

サンプルサイズ $N+p$ の観測データ、 $\{X_{-p+1}, X_{-p+2}, \dots, X_N\}$ を用いると、スカラー確率変数表示 (5.2.4) に対応する、実現値による行列表示は次のようになる。

$$\mathbf{X} = \mathbb{X}\beta + \sigma_1 \varepsilon \in \mathbb{R}^N,$$

ただし、 $\mathbb{X}^\top \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{(p+1) \times N}$, $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^\top \in \mathbb{R}^N$. 標準的な OLS の計算より OLS 回帰係数 β の推定値 $\hat{\beta}$ は、

$$\hat{\beta} \equiv (\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_{p-1}, \hat{\alpha}, \hat{\rho})^\top \equiv (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p+1}. \quad (5.2.5)$$

OLS の誤差分散 σ_1^2 の推定値 $\hat{\sigma}_1^2$ は、

$$\hat{\sigma}_1^2 = (\mathbf{X} - \mathbb{X}\hat{\beta})^\top (\mathbf{X} - \mathbb{X}\hat{\beta}) / (N - p - 1). \quad (5.2.6)$$

Hamilton [1994] の Section 17.7 Case 3 にある単位根検定用 augmented Dickey–Fuller 検定の手続きによると、 $\lambda \equiv \alpha / (1 - \sum_{h=1}^{p-1} \zeta_h)$ に対して、

$$T^{3/2}(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{L} N(0, 12\sigma_1^2/\lambda^2) \quad (N \rightarrow \infty),$$

ここで、 \xrightarrow{L} は法則収束を表す。上記全ての OLS 推定値、すなわち回帰係数 β の推定値 $\hat{\beta}$ 、誤差分散 σ_1^2 の推定値 $\hat{\sigma}_1^2$ 、パラメータ λ の推定値

$$\hat{\lambda} \equiv \hat{\alpha} / (1 - \sum_{h=1}^{p-1} \hat{\zeta}_h) \quad (5.2.7)$$

は全て一致推定量である (つまり、 $\hat{\beta} \xrightarrow{P} \beta$, $\hat{\zeta}_j \xrightarrow{P} \zeta_j$ ($j = 1, \dots, p-1$), $\hat{\alpha} \xrightarrow{P} \alpha$, $\hat{\rho} \xrightarrow{P} \rho$, $\hat{\sigma}_1 \xrightarrow{P} \sigma_1$, $\hat{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda$ with $N \rightarrow \infty$, ただし、 \xrightarrow{P} は確率収束)。このため次が成り立つ。

$$\frac{T^{3/2}(\hat{\rho} - 1)\hat{\lambda}}{\sqrt{12\hat{\sigma}_1}} \xrightarrow{L} N(0, 1^2) \quad (5.2.8)$$

上記議論により、ペアの価格履歴の単位根検定のための augmented Dickey–Fuller 検定用仮想プログラムは Listing 5.5 に示すようになる。検定の有意水準には $\varphi \equiv 0.01$ を用いる。

Listing 5.5 Hypothesis test for pairs (Source: Suzuki [2018] Figure 1)

```

1  Function TestPairs({SA}, {SB})
2  begin
3  {tj: j = 1, ..., N} ← index of {SA}
4  for each j = 1, ..., N
5  Xtj ← log SAtj - log SBtj;
6  calculate  $\hat{\rho}$  from (5.2.5),  $\hat{\lambda}$  in (5.2.7),  $\hat{\sigma}_1$  in (5.2.6), LHS of (5.2.8)
7  // Apply ADF-test for unit root.
8  // Test if the null hypothesis:
9  // H0: ρ = 1 of a unit root is rejected.
10 if  $\frac{T^{3/2}(\hat{\rho} - 1)\hat{\lambda}}{\sqrt{12}\hat{\sigma}_1} < z(\varphi)$ 
11 // where z(φ) is the critical z value on the standard
12 // normal distribution for a lower-tailed z test
13 // with the significance level φ.
14 then
15 // The spread price process is supposed to follow
16 // a statistically stationary process.
17 choose this pair for the strategy
18 else
19 This pair is not suitable for the strategy.
20 end if
21 end

```

Listing 5.5の仮想プログラム TestPairs の第3行で $\{S_A\}$ の時系列表示ラベルを取得し配列 $\{t\}$ に格納する。第4-5行の for-loop で価格乖離履歴 $\{X\}$ が計算される。第6行で式 (5.2.5) の推定値 $\hat{\rho}$ 、式 (5.2.7) の推定値 $\hat{\lambda}$ 、式 (5.2.6) の推定値 $\hat{\sigma}_1$ 、式 (5.2.8) の推定値 $\frac{T^{3/2}(\hat{\rho}-1)\hat{\lambda}}{\sqrt{12}\hat{\sigma}_1}$ がそれぞれ計算される。第10行で単位根検定用の augmented Dickey-Fuller 検定が行われる。 $z(\varphi)$ を標準正規分布の下側 z 検定の有意水準 φ の臨界 z-値として、 $\frac{T^{3/2}(\hat{\rho}-1)\hat{\lambda}}{\sqrt{12}\hat{\sigma}_1} < z(\varphi)$ のとき、帰無仮説は検定により棄却される。このとき価格乖離過程 X_t が統計的に定常過程に従うことが示唆される。このときこのペアは本稿の戦略への適用候補として選択される。

Jan-2010 から Dec-2015 までの対象ペアの 2 銘柄修正価格 S_A, S_B の履歴 (各国の営業日に依存するが、履歴データ中には各銘柄につき、約 $N = 1,565$ 営業日程度のデータが存在) を関数 TestPairs に適用させた。その結果、対象期間に全営業日のデータ履歴を持ち、2 銘柄の価格乖離が単位根を持つという帰無仮説を棄却するペアが表 5.2 に示すように 82 ペア存在した。表 5.2 の各行は子会社名、親会社名、子会社の国籍、子会社株の建値表示通貨、親会社による持ち分を表す。リストは親会社持ち分で整列されている。

5.2.2 確率過程のパラメータ推定

実証的シミュレーションを行うための次のステップは、想定している確率過程のパラメータを推定することである。しかし必要な多くのことは既に 5.2.1 節のペア選択過程で考察されている。

式 (5.2.5), (5.2.6) に基づき、5.2.1 節の線型回帰モデルのパラメータ、 ρ, α, σ_1 に対する OLS 推定値 $\hat{\rho}, \hat{\alpha},$

Rank	Subsidiaries company	Parent company	County	Currency	% Outst.
1	CIA GOODYEAR DEL PERU-INVEST	GOODYEAR TIRE & RUBBER CO	PERU	PEN	99.9
2	EGE PROFIL VE SANAYI AS	DECEUNINCK NV	TURKEY	TRY	97.54
3	ANYKSCIU VYNAS	AB ALT INVESTICIJOS	LITHUANIA	EUR	95.35
4	BBI BUERGERLICHES BRAUHAUS I	VIB VERMOEGEN AG	GERMANY	EUR	94.88
5	AMERICAN INTERNATIONAL HOLDI	AMERICAN INTL INDUSTRIES INC	UNITED STATES	USD	92.28
6	EQUITY TWO PLC	EQUITY ONE PLC	SRI LANKA	LKR	88.81
7	GF INDUSTRIES LTD	GOLD PEAK INDUSTRIES HOLDING	SINGAPORE	SGD	85.47
8	MONINGER HOLDING AG	STINAG STUTTGART INVEST AG	GERMANY	EUR	79.91
9	CEMENTOS PORTLANDVALDERRIVAS	FOMENTO DE CONSTRUCC Y CONTRA	SPAIN	EUR	77.9
10	LOEN ENTERTAINMENT INC	KAKAO CORP	SOUTH KOREA	KRW	76.4
11	HORNBAACH BAUMARKT AG	HORNBAACH HOLDING AG & CO KGA	GERMANY	EUR	76.36
12	RENK AG	MAN SE	GERMANY	EUR	76
13	AFRICA ISRAEL RESIDENCES LTD	DANYA CEBUS LTD	ISRAEL	ILs	74.23
14	BURGENLAND HOLDING AG	EVN AG	AUSTRIA	EUR	73.63
15	REX TRUEFORM CLOTHING CO LTD	AFRICAN & OVERSEAS ENT LTD	SOUTH AFRICA	ZAR	72.62
16	FDK CORP	FUJITSU LTD	JAPAN	JPY	72.39
17	SOPHARMA TRADING AD-SOFIA	SOPHARMA AD SOFIA	BULGARIA	BGN	71.89
18	FOSFATOS DEL PACIFICO SA	CEMENTOS PACASMAYO SAA-INV	PERU	PEN	70
19	SDS BIOTECH K K	IDEMITSU KOSAN CO LTD	JAPAN	JPY	69.67
20	YUTAKA GIKEN CO LTD	HONDA MOTOR CO LTD	JAPAN	JPY	69.65
21	CAIRO EDUCATIONAL SERVICES	CAIRO INVESTMENT & REAL ESTA	EGYPT	BGP	69.41
22	ISRAS INVESTMENT COMPANY LTD	ARAD INVT & INDL DEV LTD	ISRAEL	ILs	68.42
23	FROMAGERIES BEL	UNIBEL	FRANCE	EUR	67.68
24	GOODYEAR THAILAND PCL	GOODYEAR TIRE & RUBBER CO	THAILAND	THB	66.79
25	BROOK CROMPTON HOLDINGS LTD	ATB AUSTRIA ANTRIEBSTECHNIK	SINGAPORE	SGD	66.03
26	TRANSCONTINENTAL REALTY INV	AMERICAN REALTY INVESTORS IN	UNITED STATES	USD	65.03
27	KNT-CT HOLDINGS CO LTD	KINTETSU GROUP HOLDINGS CO L	JAPAN	JPY	64.63
28	KTHITEL CO LTD	KT CORP	SOUTH KOREA	KRW	63.7
29	MEDIA NUSANTARA CITRA TBK PT	GLOBAL MEDIACOM TBK PT	INDONESIA	IDR	63.49
30	DELEK DRILLIN - LP	DELEK ENERGY SYSTEMS LTD	ISRAEL	ILs	62.64
31	ROBINSONS LAND CO	JG SUMMIT HOLDINGS INC	PHILIPPINES	PHP	60.97
32	COROMANDEL INTERNATIONAL LTD	EID PARRY INDIA LTD	INDIA	INR	60.81
33	HIGHLIGHT COMMUNICATIONS-BR	CONSTANTIN MEDIEN AG	SWITZERLAND	EUR	60.53
34	JUVENTUS FOOTBALL CLUB SPA	EXOR SPA	ITALY	EUR	60
35	TENON LTD	RUBICON LTD	NEW ZEALAND	NZD	59.78
36	HUAYU AUTOMOTIVE SYSTEMS -A	SAIC MOTOR CORP LTD-A	CHINA	CNY	58.32
37	FULL SPEED INC	FREBBIT CO LTD	JAPAN	JPY	56.97
38	FUJITSU COMPONENT LTD	FUJITSU LTD	JAPAN	JPY	56.95
39	HOHSUI CORP	CHUO GYORUI CO LTD	JAPAN	JPY	55.11
40	ASBESTOS CORP LTD	MAZARIN INC	CANADA	CAD	54.64
41	NTT DATA CORP	NIPPON TELEGRAPH & TELEPHONE	JAPAN	JPY	54.19
42	TYNSOLAR CORP	TYNTEK CORPORATION	TAIWAN	TWD	54.11
43	MINISTOP CO LTD	AEON CO LTD	JAPAN	JPY	53.91
44	FUJIIYA CO LTD	YAMAZAKI BAKING CO LTD	JAPAN	JPY	53.87
45	SAGAMI CO LTD	UNY GROUP HOLDINGS CO LTD	JAPAN	JPY	53.86
46	SEIKO PMC CORP	DIC CORP	JAPAN	JPY	53.76
47	FUJITSU FRONTTECH LTD	FUJITSU LTD	JAPAN	JPY	53.2
48	LEROEY SEAFOOD GROUP ASA	AUSTEVOLL SEAFOOD ASA	NORWAY	NOK	52.69
49	LION BREWERY CEYLON PLC	CEYLON BEVERAGE HOLDINGS PLC	SRI LANKA	LKR	52.25
50	CYBER COM CO LTD	FUJI SOFT INC	JAPAN	JPY	51.88
51	TUIMAZINSKIY ZAVOD AVTOBENZO	KAMAZ PJSC	RUSSIA	RUB	51.78
52	OKINAWA CELLULAR TELEPHONE	KDDI CORP	JAPAN	JPY	51.52
53	JEDAT INC	ARGO GRAPHICS INC	JAPAN	JPY	50.77
54	INTELLIGENT WAVE INC	DAI NIPPON PRINTING CO LTD	JAPAN	JPY	50.61
55	MONEYWEB HOLDINGS LTD	CAXTON AND CTP PUBLISHERS AN	SOUTH AFRICA	ZAR	50.6
56	WELCIA HOLDINGS CO LTD	AEON CO LTD	JAPAN	JPY	50.54
57	NJK CORP	NTT DATA CORP	JAPAN	JPY	50.53
58	HITACHI KOKUSAI ELECTRIC INC	HITACHI LTD	JAPAN	JPY	50.44
59	MEDICAL & BIOLOGICAL LABS CO	JSR CORP	JAPAN	JPY	50.36
60	ELRON ELECTRONIC INDS LTD	DISCOUNT INVESTMENT CORP-REG	ISRAEL	ILs	50.32
61	CIMBETON HAZIRBETON PREFABRI	CIMENTAS IZMIR CIMENTO FABRI	TURKEY	TRY	50.28
62	HITACHI CONSTRUCTION MACHINE	HITACHI LTD	JAPAN	JPY	50.23
63	ASTRA INTERNATIONAL TBK PT	JARDINE CYCLE & CARRIAGE LTD	INDONESIA	IDR	50.11
64	AJINOMOTO MALAYSIA BHD	AJINOMOTO CO INC	MALAYSIA	MYR	50.08
65	TAIWAN PROSPERITY CHEMICAL	TAIWAN CEMENT	TAIWAN	TWD	50
66	NIPPON AVIONICS CO LTD	NEC CORP	JAPAN	JPY	50
67	MATRIX IT LTD	FORMULA SYSTEMS (1985) LTD	ISRAEL	ILs	49.97
68	SAPIENS INTERNATIONAL CORP	FORMULA SYSTEMS (1985) LTD	ISRAEL	USD	49.13
69	UNION PIONEER PCL	SAHA-UNION CORP PCL	THAILAND	THB	48.96
70	SHUN HO TECHNOLOGY HLDGS LTD	SHUN HO RESOURCES HOLDINGS	HONG KONG	HKD	48.62
71	CONEXIO CORP	ITOCHU CORP	JAPAN	JPY	48.27
72	NAITO & CO LTD	OKAYA & CO LTD	JAPAN	JPY	45.63
73	FUJI OOXZ INC	DAIDO STEEL CO LTD	JAPAN	JPY	45.42
74	MENDOCINO BREWING CO INC	UNITED BREWERIES HOLDINGS LT	UNITED STATES	USD	43.61
75	DUC SA	VERNEUIL PARTICIPATIONS	FRANCE	EUR	43.37
76	COLGATE PALMOLIVE (INDIA)	COLGATE-PALMOLIVE CO	INDIA	INR	40.06
77	GVC COMMUNICATIONS-CL B	GLACIER MEDIA INC	CANADA	CAD	37.89
78	CCM DUOPHARMA BIOTECH BHD	CHEMICAL CO OF MALAYSIA BHD	MALAYSIA	MYR	36.68
79	ADVANCED SYSTEMS AUTOMATION	ASTI HOLDINGS LTD	SINGAPORE	SGD	36.66
80	NCXX GROUP INC	FISCO LTD	JAPAN	JPY	34.59
81	KFC HOLDINGS JAPAN LTD	MITSUBISHI CORP	JAPAN	JPY	34.57
82	DINKELACKER AG	SEDLMAYR GRUND UND IMMO	GERMANY	EUR	2.96

表 5.2 Pairs list for the application of the optimal pair trading strategy (Source: Suzuki [2018] Table 3)

The table includes all the stub pairs whose component stocks are listed on the global stock exchanges as of the beginning of May 2016, whose denominated currencies of the component stocks of the pairs are the same and statistically cointegrated to each other, using the stock data during the period from Jan-2010 to Dec-2015. For the unit root test we use the ADF-test with the significance level of 0.01. Each column shows each subsidiary company, its parent company, the county of the subsidiary, the denominated currency of the subsidiary stock, and its percent outstanding of the parent company. The list in the table is sorted by the percent outstanding.

σ_1 を計算する。さらにこれらの推定値を用いてパラメータ θ, μ, σ の推定値 $\hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ を次のように計算する。

$$\hat{\theta} = -\frac{\log \hat{\rho}}{\Delta t} \quad (5.2.9a)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\rho}} \quad (5.2.9b)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \sqrt{\frac{2\hat{\theta}}{1 - \hat{\rho}^2}} \quad (5.2.9c)$$

各レジーム $\xi \in \mathcal{A}(\xi), \xi \in \mathbb{I}$ に対しスイッチ領域 $S_n^{\xi \hat{\xi}}$ を特定するため、5.1節の Listing 5.1の第14行で関数呼び出し `FindSwitchingRegion(n, - $\delta/\hat{\theta}, \sqrt{\hat{\theta}}\hat{\sigma}/(\delta + \hat{\theta})$)` を Listing 5.1の関数 `StrategyLoop` から行っている。さらに今回その関数は Listing 5.6の第12行で呼ばれている。それ以外のパラメータ $\Delta t, \delta, K, n$ は表5.1と同じ値を用いる。 Δt は年率1営業日の期間であり、割引金利 δ は金利市場で決定される。取引コスト係数 K の実証的推定は事後的であっても難しい。Kissell & Glantz [2003] は取引コストを9個の要素に分離しているがそれら各要素の推定は本稿の目的を超越するため、 K には保守的な値を用いた。

5.2.3 最適スイッチ戦略の実証的シミュレーション実行

実証的なシミュレーションを行うための準備は整ったため、ここでそれを実行に移す。まず実証的推定によらないパラメータ $\Delta t, \delta, K$ を表5.1と同じ値に設定した。ペアの初期レジーム（ポジション）を $\xi_{t_0} = 0$, (square ポジション) とし、スイッチ権利数を $n = 10$ とした。計算で求められた最適スイッチ戦略による最適スイッチ領域 (2.3.14) に従い、価格乖離履歴 $X_{t_j} = \log \frac{S_{At_j}}{S_{Bt_j}}, j = 1, \dots, N$ を入力データとして、離散化された評価関数によるパフォーマンス指標 (5.1.3) の計算を、Monte Carlo simulation を5.1節で行ったのと同様に行う。2銘柄 S_A, S_B によるペアの最適スイッチ戦略の実証的シミュレーションを実行するための疑似プログラムを Listing 5.6に示す。

Listing 5.6 Historical simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)

```

1  Function HistoricalSimulation({SA}, {SB},  $\xi_0, n, t_0$ )
2  begin
3  {tj : j = 1, ..., N} ← index of {SA}
4  for each j = 0, ..., N;
5  Xtj ← log SAtj - log SBtj;
6  end for
7  // Estimation of the autoregression coefficients, according to (5.2.4)
8  calculate estimates  $\hat{\rho}, \hat{\alpha}$  and  $\hat{\sigma}_1$  from {X} by (5.2.5).
9  calculate estimates  $\hat{\theta}, \hat{\mu}$  and  $\hat{\sigma}$ , from  $\hat{\rho}, \hat{\alpha}$  and  $\hat{\sigma}_1$  by (5.2.9)
10 for each j = 0, ..., N;
11 Ztj ←  $\frac{\sqrt{\hat{\theta}}}{\hat{\sigma}}(X_{t_j} - \hat{\mu})$ ;
12 call StrategyLoop( $\hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, \{Z\}, \xi_0, n, t_0$ ) // (Listing 5.1)
13 return sharp ratio for {i};
14 end

```

Listing 5.6の関数 `HistoricalSimulation` の第3行で修正株価 $\{S_A\}$ の時系列ラベルを取得して配列 $\{t\}$ に格納する。第4-5行の for-loop でこれらの価格乖離履歴 $\{X\}$ が計算される。さらに第8行で式 (5.2.5) に基づき系列 $\{X\}$ から推定値 $\hat{\rho}, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}_1$ が計算される。式 (5.2.9) に基づき第9行で推定値 $\hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ が計算される。

第11行で系列履歴 $\{X.\}$ は系列履歴 $\{Z.\}$ へ変換される。第12行で Monte Carlo simulation の際と同様に、関数 `StrategyLoop` が呼ばれる。

最後に表5.2で選択されたペアの構成銘柄 A, B 株の修正株価系列 $\{S_A.\}, \{S_B.\}$ を用いて Listing 5.7に示すように疑似プログラム `HistoricalSimulation` が実行される。その際、以下のように初期レジーム ξ_0 , スイッチ権利数 n , 初期時刻 t_0 が引数として一緒に関数に渡される。

Listing 5.7 Execution of the Historical simulation (Source: Suzuki [2018] Figure 1)

```
call HistoricalSimulation( $\{S_A.\}, \{S_B.\}, \xi_0, n, t_0$ )
```

シミュレーション例として株式ペアの例、HONDA MOTOR CO LTD. 及び、YUTAKA GIKEN CO LTD. を取り上げる。両銘柄とも円建てで東証上場している。戦略の実行結果を図5.4に示す。グラフ形式の仕様は図5.2と同様である。この戦略により日次平均リターンは 0.0007754、標準偏差は 0.0004356、シャー

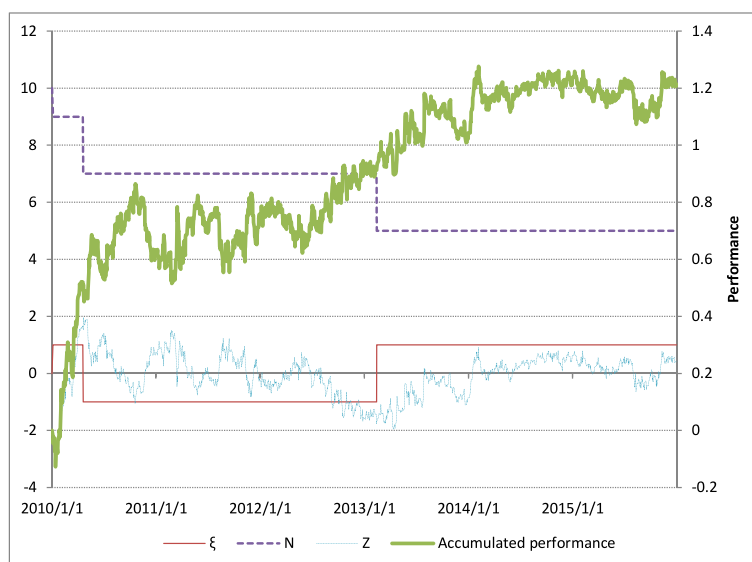


図 5.4 HONDA と YUTAKA GIKEN の実行結果 (出所) Suzuki [2018] Figure 9

グラフの形式の仕様は図5.2と同様。戦略による日次平均リターンは 0.0007754、標準偏差は 0.0004356、シャープ・レシオは 1.78007。

プ・レシオは 1.78007 という結果が得られた。

同様の処理を表5.2の全銘柄にわたり行い、シミュレーションによる概要の結果を図5.5のリスク-リターン平面に示した。図5.5の横軸はリスク (戦略による日次リターンの実績標準偏差) に、縦軸はリターン (日次実績リターン) に対応。対象 66 ペアによる日次リターンによる平均シャープ・レシオは 0.6886 である。ただし 82 ペア中の 16 ペアはスイッチが行われなかった (常にポジション $\xi = 0$) ため除外した。これらの取引コストを考慮した実証分析的シミュレーション結果は注目に値する。この分析により、本稿の最適 pair-trading 戦略は数理モデル由来ではあるものの、十分実務に耐え得るものでもあることが示された。

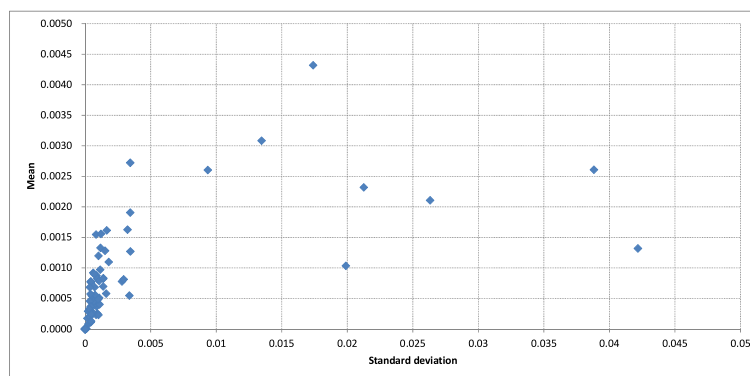


図 5.5 表5.2のペアを用いた最適戦略による実証的シミュレーションによるリスクとリターン (出所) Suzuki [2018] Figure 10

横軸はリスク (戦略による日次リターンの標準偏差)、縦軸はリターン (日次リターン平均) に対応。対象 66 ペアによる日次リターンによる平均シャープ・レシオは 0.6886 である。

謝辞

本研究は公的な競争的研究資金配分機関、商業的団体、非営利的団体よりいかなる特定の交付金・助成金・研究奨励金をも受領したことはない。本稿は一橋大学大学院経営管理研究科 三浦良造名誉教授、本多俊毅教授による初期の原稿に対する建設的な提案に対して謝意を表明する。加えて本稿は論文の体裁を著しく改善した提案に対して匿名審査員に謝意を表す。

参考文献

- Ang, A. (2014). *Asset Management: A Systematic Approach to Factor Investing*. Oxford University Press.
- Bayraktar, E., & Egami, M. (2010). On the one-dimensional optimal switching problem. *Mathematics of Operations Research*, *35*, 140–159.
- Bertram, W. K. (2010). Analytic solutions for optimal statistical arbitrage trading. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, *389*, 2234–2243.
- Borodin, A. N., & Salminen, P. (2002). *Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae (Probability and Its Applications)*. Birkhauser.
- Box, G. E., Muller, M. E. et al. (1958). A note on the generation of random normal deviates. *The annals of mathematical statistics*, *29*, 610–611.
- Brekke, K. A., & Oksendal, B. (1994). Optimal switching in an economic activity under uncertainty. *SIAM J. Cont. Optim.*, *32*, 1021–1036.
- Chiu, M. C., & Wong, H. Y. (2011). Mean-variance portfolio selection of cointegrated assets. *Journal of Economic Dynamics and control*, *35*, 1369–1385.
- Chiu, M. C., & Wong, H. Y. (2015). Dynamic cointegrated pairs trading: time-consistent mean-variance strategies. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *290*, 516–534.
- Crandall, M., Ishii, H., & Lions, P.-L. (1992). User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Appeared in bulletin of the American mathematical society*, *27*, 1–67.
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*, *74*, 427–431.
- Dixit, A. (1989). Entry and exit decisions under uncertainty. *Journal of Political Economy*, *97*, 620–638.
- Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press.
- Djehiche, B., Hamadne, S., & Popier, A. (2009). A finite horizon optimal multiple switching problem. *SIAM J. Control. Optim.*, *48*, 2751–2770.
- Duckworth, K., & Zervos, M. (2001). A model for investment decisions with switching costs. *The Annals of Applied Probability*, *11*, 239–260.
- El Asri, B. (2010). Optimal multi-modes switching problem in infinite horizon. *Stochastics and Dynamics*, *10*, 231–261.
- El Asri, B. (2013). Stochastic optimal multi-modes switching with a viscosity solution approach. *Stochastic Processes and their Applications*, *123*, 579–602.
- El Asri, B., & Hamadene, S. (2009). The finite horizon optimal multi-modes switching problem: the

- viscosity solution approach. *Applied Mathematics and Optimization*, 60, 213–235.
- Elliott, R. J., Hoek, J. V. D., & Malcolm, W. P. (2005). Pairs trading. *Quantitative Finance*, 5, 271–276.
- Eloe, P., Liu, R. H., Yatsuki, M., Yin, G., & Zhang, Q. (2008). Optimal selling rules in a regime-switching exponential Gaussian diffusion model. *SIAM J. Appl. Math.*, 69, 810–829.
- Engle, R. F., & Granger, C. W. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 55, 251–276.
- Fleming, W. H., & Soner, H. M. (1993). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, New York.
- Friedman, A. (1975). *Stochastic differential equations and applications* volume 1. Academic Press.
- Gatev, E., Goetzmann, W. N., & Rouwenhorst, K. G. (2006). Pairs trading: Performance of a relative value arbitrage rule. *The Review of Financial Studies*, 19, 797–827.
- Göncü, A., & Akyıldırım, E. (2016). Statistical arbitrage with pairs trading. *International Review of Finance*, 16, 307–319.
- Guo, X., & Zhang, Q. (2005). Optimal selling rules in a regime switching model. *IEEE transactions on automatic control*, 50, 1450–1455.
- Hamadene, S., & Jeanblanc, M. (2007). On the starting and stopping problem: Application in reversible investments. *Math. Oper. Res.*, 32, 182–192.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis* volume 2. Princeton university press Princeton.
- Hu, Y., & Tang, S. (2010). Multi-dimensional BSDE with oblique reflection and optimal switching. *Probability Theory and Related Fields*, 147, 89–121.
- Ito, K., & McKean, H. P. J. (1974). *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer.
- Kissell, R., & Glantz, M. (2003). *Optimal Trading Strategies: Quantitative Approaches for Managing Market Impact and Trading Risk*. Amacom Books.
- Lebedev, N. N. (1972). *Special Functions and Their Applications*. Dover.
- Metcalf, G. E., & Hassett, K. A. (1995). Investment under alternative return assumptions comparing random walks and mean reversion. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, 1471–1488.
- Mudchanatongsuk, S., Primbs, J. A., & Wong, W. (2008). Optimal pairs trading: A stochastic control approach. In *American Control Conference, Seattle, 2008*.
- Ngo, M.-M., & Pham, H. (2016). Optimal switching for the pairs trading rule: A viscosity solutions approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 441, 403–425.
- Nguyen, D., Tie, J., & Zhang, Q. (2014). An optimal trading rule under a switchable mean-reversion model. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 161, 145–163.
- Pemy, M., & Zhang, Q. (2006). Optimal stock liquidation in a regime switching model with finite time horizon. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 321, 537–552.
- Pham, H. (2009). *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications (Stochastic Modelling and Applied Probability)*. Springer-Verlag.
- Pham, H., & Vath, V. L. (2007). Explicit solution to an optimal switching problem in the two-regimes case. *SIAM J. Cont. Optim.*, 46, 395–426.
- Pham, H., Vath, V. L., & Zhou, X. Y. (2009). Optimal switching over multiple regimes. *SIAM J. Cont. Optim.*, 48, 2217–2253.

- Pliska, S. R., & Suzuki, K. (2004). Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs. *Quantitative Finance*, *4*, 233–243.
- Schwartz, E. S. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of finance*, *52*, 923–973.
- Seaborn, J. B. (1991). *Hypergeometric Functions and Their Applications (Texts in Applied Mathematics)*. Springer.
- Song, Q., & Zhang, Q. (2013). An optimal pairs-trading rule. *Automatica*, *49*, 3007–3014.
- Suzuki, K. (2016). Optimal switching strategy of a mean-reverting asset over multiple regimes. *Automatica*, *67*, 33–45.
- Suzuki, K. (2018). Optimal pair-trading strategy over long/short/square positions—empirical study. *Quantitative Finance*, *18*, 97–119.
- Suzuki, K. (2021). Infinite horizon optimal switching regions for pair-trading strategy with quadratic risk aversion considering simultaneous multiple switching: a viscosity solution approach. *Mathematics of Operations Research*, *46*, 336–360.
- Tang, S., & Yong, J. (1993). Finite horizon stochastic optimal switching and impulse controls with a viscosity solution approach. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, *45*, 145–176.
- Tourin, A., & Yan, R. (2013). Dynamic pairs trading using the stochastic control approach. *Journal of Economic Dynamics and control*, *37*, 1972–1981.
- Tsekrekos, A. E. (2010). The effect of mean reversion on entry and exit decisions under uncertainty. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *34*, 725–742.
- Zervos, M. (2003). A problem of sequential entry and exit decisions combined with discretionary stopping. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *42*, 397–421.
- Zhang, H., & Zhang, Q. (2008). Trading a mean-reverting asset: Buy low and sell high. *Automatica*, *44*, 1511–1518.
- Zhang, Q. (2001). Stock trading: an optimal selling rule. *SIAM J. Control. Optim.*, *40*, 64–87.