A Study on Covariation and Contagion of Credit Risk using Bayesian Statistics (ベイズ統計を用いた信用リスクの共変動と伝播に関する研究)

ID14F002 加藤 健介

1 序論

本研究では、ベイズ推定を用いた数値計算手法を開発し、信用リスクの共変動と伝播に関するモデルを提案する。ベイズ統計及び統計物理に基づき、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) を発展させることで、ファイナンスにおける様々な問題を解決するためのモデルを開発し、当該モデルによる分析を通して、信用リスクの共変動と伝播について深く理解すること、及び実務に応用することを目的としている。

金融機関における実務において、金融危機の経験から、与信ポートフォリオの信用リスク評価や債務者間におけるデフォルトの相互依存の理解は、以前にも増して重要になっている。一方、債券やクレジット・デフォルト・スワップ (CDS) に代表されるクレジット商品への投資戦略は、トレーディングデスクにおいて日々開発され、収益獲得に活用されている。従って、信用リスクの分析や評価は、金融機関の経営において非常に重要である。しかし、信用リスクによる損失は発生がまれであるが大きなインパクトを持ち、経験的データが不足しているため評価が難しく、そのモデル化は市場リスクや流動性リスクとは異なる。本研究では、信用リスクのモデル化における構造型アプローチ及び誘導型アプローチの手法を、信用リスクの共変動と伝播のモデル化に適用し、与信ポートフォリオのリスク管理やクレジット商品への投資戦略に活用する。一般に、信用リスクモデルの解が解析的に得られることはまれであり、数値計算により求められる。MCMC の代表的な手法であるメトロポリス・ヘイスティングス法は現在も幅広く使用されているが、多峰的な分布からのサンプリングが難しく、パラメータ数が多くなると受容率の低下が著しいという問題を抱えている。前者はレプリカ交換モンテカルロ法を用いることで解決でき、後者はハミルトニアンモンテカルロ法を用いることで解決できる。以上より、金融機関における実務の観点から、リスク管理や投資戦略について、信用リスクの共変動と伝播に関するモデルを研究すること、及びベイズ推定を用いた数値計算手法の発展に寄与することには、大きな意義がある。本研究は、以下の 3 つのテーマから構成されている。

1 つ目のテーマは、統計物理学における強磁性体のイジングモデルを用いた信用リスクの共変動と伝播の分析である。信用リスク評価モデルは、ファイナンスの分野で多くの研究がなされている一方、経済物理学の分野でも長距離相互作用イジングモデルを用いた与信ポートフォリオの信用リスク評価手法に関する研究がなされている。経済物理学の分野における信用リスク評価モデルに関する研究は、確率モデルを用いて多数のミクロな現象 (債務者の状態) からマクロな現象 (ポートフォリオ損失) を説明する統計力学的アプローチに基づくものである。

本テーマでは、長距離相互作用イジングモデルを用いて、不均質な与信ポートフォリオの信用リスク評価手法を構築する。長距離相互作用イジングモデルを用いた信用リスク評価手法は、

標準的な信用リスク評価モデル (Merton 型モデル等) では計測されない損失分布のセカンドピーク (債務者の集団的な振る舞いにより損失の大きい領域で現れるイジングモデル特有の損失分布のピーク) を捉えることができるため、損失分布のテイルが標準的な信用リスク評価モデルとは異なる性質を持ち、信用リスク評価に異なる結果を与える可能性がある。標準的な信用リスク評価モデルは、損失分布にセカンドピークが存在しないことにも関連して、全ての債務者間のデフォルト相関が 1 の極限 (完全相関) において、理論的に正しい損失分布を表現することができない。すなわち、標準的な信用リスク評価モデルは、この極限における自明な境界条件を満たしておらず、テイル現象であるレアイベント・デフォルト相関や信頼水準が高い状況・デフォルト協同現象等を正しく表現できない可能性がある。一方、長距離相互作用イジングモデルを用いた信用リスク評価手法は、損失分布のセカンドピークを計測することができ、この極限における自明な境界条件を満たしている。この両モデルの違いは、信用リスク評価モデルに関する数少ない明確な手掛かりの一つであるため、非常に重要である。

本研究は、経済物理学の観点から、統計物理学の手法をファイナンスに適用することを目指しており、ファイナンスと物理学の間の境界領域を研究する学際的研究である。ファイナンスにおける研究対象である与信ポートフォリオの信用リスク評価に、新たに物理学における統計力学の手法を適用するという体系立てられた知識として整理され、新たな学問分野を形成する可能性がある。統計力学の手法は、情報統計力学の分野において、物理現象以外を対象に、誤り訂正符号・画像修復・脳科学 (連想記憶・学習)・組み合わせ最適化問題等の様々な情報科学の問題に適用されている。ファイナンスへの適用例もあり、今後コンピュータの高速化・数値計算技術が更に発展していくことが予想されるため、本テーマへの適用を十分に期待できる。

2 つ目のテーマは、共和分性に基づく信用リスクの共変動と伝播の分析である。本テーマは、複数年限の CDS スプレッドの間の共和分性を、ハザードレートの共和分性を介して理解することを目的としている。無裁定価格理論の枠組みの中で CDS の共和分を議論し、価格付け可能な CDS スプレッドを説明できるハザードレートのベクトル誤差修正モデル (VECM) を構築する。また、CDS をドライブするハザードレートの共和分性を、CDS のペアトレーディングに活用する。共和分性を持つハザードレートで記述された CDS の理論スプレッドは解析式として求められないが、指数アフィンモデルを仮定することで、常微分方程式 (ODE) に帰着できる。しかし、ODE は解析的に解けないので、共和分ハザードレートの挙動を推定するために、ODE の Runge-Kutta 法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法を開発する。

3 つ目のテーマは、Merton の資産・負債・株式に基づく構造型アプローチにおいて、資産価値が従う変動過程を CEV モデルに発展させて、株式価値に基づく企業の信用リスク計測を行う。株式価値が満たす偏微分方程式 (PDE) が解析的に解けず、前テーマのように ODE に帰着することもできないので、資産価値が従う CEV モデルの挙動を推定するために、前テーマにおける ODE と MCMC を組み合わせた手法を拡張することで、PDE の有限差分法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法を開発する。CEV モデルを用いる理由は、Merton モデルにおける Black-Scholes モデルを一般化し、モデルを観測データにより良くフィットさせることで、モデル選択の自由度を上げるためである。

本論文の構成は次の通りである。第 2 章では、長距離相互作用イジングモデルを用いた不均質な与信ポートフォリオの信用リスク評価手法、及び与信額が不均質な与信ポートフォリオの信用リスク評価を説明する。第 3 章では、ハザードレートを介した CDS の共和分分析とペアトレーディング戦略への応用を説明する。第 4 章では、CEV モデルを用いた構造型アプローチによる企業の信用リスク計測を説明する。第 5 章では、本論文を総括すると共に、今後の研究課題について述べる。尚、補足的な概念、式の導出及び証明について、付録にまとめた。図 4 に、本研究の貢献である Chapter 2 から 4 の関係を、研究の俯瞰図として示す。

2 Long-range Ising Model for Credit Portfolios with Heterogeneous Credit Exposures

第 2 章では、経済物理学の観点から、長距離相互作用イジングモデルを用いた不均質な与信ポートフォリオの信用リスク評価手法を提案する。本手法は、セクターモデルと損失分布の数値計算アルゴリズムの 2 つの部分から構成される。セクターモデルでは、与信ポートフォリオを格付・業種別のセクターに分割することにより、デフォルト確率とデフォルト相関の不均質性を考慮している。損失分布の数値計算アルゴリズムでは、スピン (債務者の状態) 間の相互作用により発生したスピン状態が従う多峰的な分布に対し、レプリカ交換モンテカルロ法による損失分布の数値計算を行うことにより、解析的に評価することが難しい与信額の不均質性を考慮している。与信額が不均質な与信ポートフォリオの損失分布の性質を分析するため、本手法を様々な与信ポートフォリオに適用し、信用リスク評価を行う。その結果、本手法による損失分布のテイルが標準的な信用リスク評価モデルとは異なる性質を持ち、不均質性のパターンに応じて、信用リスク評価に異なる結果を与える可能性があることを示す。

第 2 章で提案する信用リスク評価モデルは以下の通りである。

- Model I
  - セクターモデル

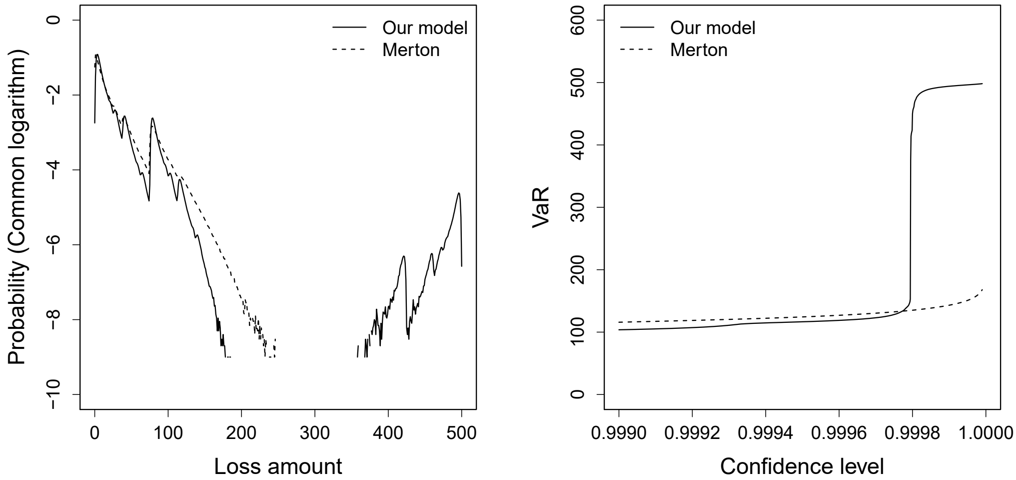
$$\begin{cases} P(S_1,\dots,S_N) = \dfrac{1}{Z(\beta)} \exp\left[-\beta H(S_1,\dots,S_N)\right] \\ H(S_1,\dots,S_N) = -\displaystyle\sum_{I=1}^{K} \frac{J^I}{N^I} \sum_{i,j\in\Omega_I, i<j} S_i S_j - \sum_{I<J} \frac{J^{I,J}}{\sqrt{N^I N^J}} \sum_{i\in\Omega_I} \sum_{j\in\Omega_J} S_i S_j - \sum_{I=1}^{K} h^I \sum_{i\in\Omega_I} S_i \end{cases}$$

  - 損失分布の数値計算アルゴリズム
    レプリカ交換モンテカルロ法を用いて、セクターモデルのカノニカル分布 $P(S_1,\dots,S_N)$ から無作為にスピン状態 $(S_1,\dots,S_N)$ をサンプリングする。

$$\text{損失分布: } (L^{(1)},\dots,L^{(\Lambda)}), \quad L^{(k)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} A_i(1-S_i), \quad k=1,\dots,\Lambda$$

Model I では、債務者数 N の与信ポートフォリオにおいて、S_i を債務者 i の状態を表すイジングスピン変数とし、債務者 i が非デフォルトのとき 1、デフォルトのとき -1 とする。$P(S_1,\dots,S_N)$ はカノニカル分布、$H(S_1,\dots,S_N)$ はハミルトニアン (エネルギー関数)、$Z(\beta)$ は分配関数 (イジングスピン変数が従う確率分布の規格化因子) であり、β は逆温度 ($\beta=(k_BT)^{-1}$、T は温度、k_B はボルツマン定数) である。セクター数 K の与信ポートフォリオにおいて、Ω_I はセクター I の債務者の集合、N^I はセクター I の債務者数、J^I/N^I はセクター I のスピン間の交換相互作用、$J^{I,J}/\sqrt{N^I N^J}$ はセクター I と J のスピン間の交換相互作用、h^I はセクター I のスピンにかかる外場を表す。試行回数 Λ のシミュレーションにおいて、$L^{(k)}$ は k 回目の試行における損失額、A_i は債務者 i の与信額である。

図 1 は、与信額がべき分布 (実務に近い与信額分布) に従う与信ポートフォリオの損失分布と VaR の数値計算結果を示す。べき分布に従う与信額の構成を反映した損失分布の形状になる。本モデルと標準的な信用リスク評価モデルの両者とも、べき分布における与信額が大きい企業のデフォルトに対応した点に小さなピークができる。左側のピークはデフォルト連鎖なしの状態、右側のピークはデフォルト連鎖ありの状態を表す。与信額がべき分布に従う与信ポートフォ



(a) 損失分布　　(b) VaR

図 1: 与信額がべき分布に従う与信ポートフォリオの損失分布と VaR。両グラフにおいて、実線は本モデルによる損失分布と VaR、破線は標準的な信用リスク評価モデルによる損失分布と VaR を示す。

リオは均質な与信ポートフォリオに比べて、両ピークとも外側に現れ、両ピークが中心に向かってなかなか減衰せず、一定の大きさの確率が残るため、損失分布のファットテイルの影響で、均質な与信ポートフォリオの場合よりも低信頼水準における VaR の値が大きくなっている。また、本モデルでは、セカンドピークが観測され、セカンドピークの影響により、信頼水準を上げていくと VaR が急激に増大することが確認できる。

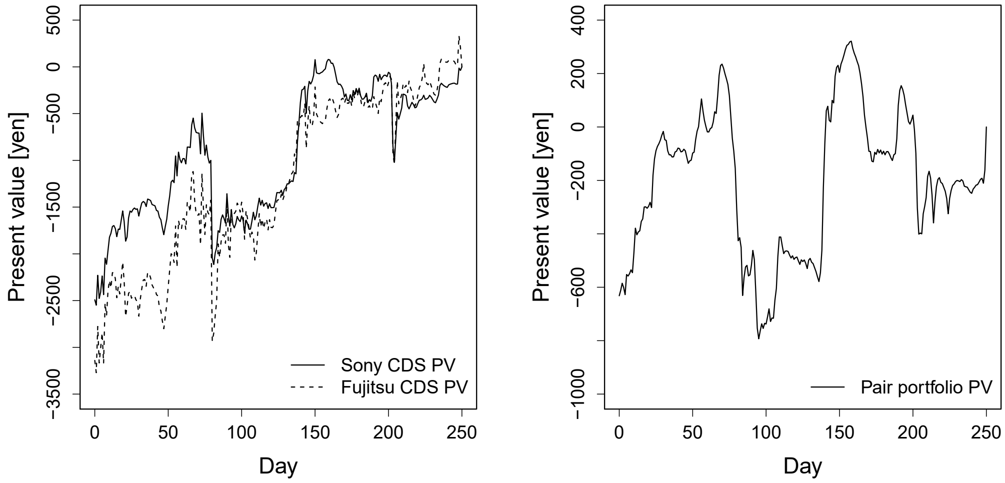
3 Cointegration Analysis of Hazard Rates and CDSs: Applications to Pairs Trading Strategy

第 3 章では、ハザードレートと CDS スプレッドの共和分の挙動を推定するために、ODE の Runge-Kutta 法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法を提案する。本手法は、ハザードレートと CDS スプレッドの状態空間モデルとパラメータ分布の数値計算アルゴリズムの 2 つの部分から構成される。システム方程式は、共和分性を持つ多次元ハザードレート過程であり、ドリフト項に VECM の構造を持つ。観測方程式は CDS スプレッドの理論式である。本邦企業の CDS を対象に実証分析を行い、CDS スプレッドの期間構造 (複数年限の CDS スプレッド) の間の共和分性が、ハザードレートの単純な 2 次元 VECM で説明できることを示す。更に、本分析結果を CDS のペアトレーディング戦略に活用する。

第 3 章で提案する信用リスクの共和分モデルは以下の通りである。

- Model II
  - 状態空間モデル

$$\begin{cases} d\lambda_{it} = \left(v_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}\lambda_{kt} \right) dt + \sigma_i \sqrt{\lambda_{it}} dW_{it}^P \\ CDS_t^{mkt,i,l} = CDS_t^{mod,i,l} + e_t^{i,l} \\ CDS_t^{mod,i,l} = \dfrac{(1-\theta)\Delta \sum_{k=1}^{\xi l} D(t,s_k) V_p^i(t,s_k)}{1/g \sum_{j=1}^{gl} D(t,t_j) V_f^i(t,t_j)} \end{cases} , \quad i = 1, \dots, n$$



(a) CDS 時価　　(b) ペアポートフォリオ時価

図 2: ソニーと富士通の CDS 時価とペアポートフォリオ時価の推定結果。左図において、実線はソニーの CDS 時価、破線は富士通の CDS 時価を示す。右図において、実線はペアポートフォリオ時価を示す。x 軸は観測期間である 2020/11/20〜2021/11/30 における昇順の日付番号を表す。

– パラメータ分布の数値計算アルゴリズム
  ODE の Runge-Kutta 法による数値計算とハミルトニアンモンテカルロ法を組み合わせた手法を用いて、状態空間モデルの事後分布から無作為にパラメータと潜在変数の状態をサンプリングする。

$$\text{パラメータ分布: } \{(\Theta^{(1)}, \Psi^{(1)}), \ldots, (\Theta^{(K)}, \Psi^{(K)})\},$$
$$\begin{cases} \Theta^{(k)} = \{v_i, \alpha_{ij}, \beta_{ji}, \sigma_i, \phi_{i1}\} \\ \Psi^{(k)} = \{\lambda_{i,t_0}, \ldots, \lambda_{i,t_x}, \ldots, \lambda_{i,t_\Lambda}\} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, K$$

Model II では、λ_{it} はハザードレート、$CDS_t^{mkt,i,l}$ は企業 i の l 年標準物 CDS スプレッドの市場値、$CDS_t^{mod,i,l}$ は同理論値、$e_t^{i,l}$ は観測誤差である。ハザードレートの次元数を n、共和分ランクを m とし、v_i は定数項、α_{ij} は誤差修正項の調整速度、β_{ji} は共和分ベクトル (m 本の n 次元ベクトル)、σ_i はボラティィリティ、W_{it}^P は実確率 P の下でのブラウン運動である。$D(t,s)$ は満期 s のデフォルトがない割引債価格、$V_f^i(t,s) = E_t^Q[\exp[-\int_t^s \lambda_{iu} du]]$ は企業 i の生存関数、$V_p^i(t,s) = E_t^Q[\lambda_{is} \exp[-\int_t^s \lambda_{iu} du]]$ は企業 i のデフォルト時点の密度関数である。$E_t^Q[\bullet]$ はリスク中立確率 Q の下での条件付期待値を表す。θ は回収率、g は 1 年あたりのプレミアム支払時点数、t_j はプレミアム支払時点、ξ は 1 年あたりの積分の離散近似時点数、Δ は離散近似の時点間隔、s_k は離散近似時点、Λ は CDS スプレッドの観測時点数、t_x は同観測時点である。リスクの市場価格を $\phi_{i1}\sqrt{\lambda_{it}}$ と仮定する。K はシミュレーションの試行回数である。

図 2 は、左図がソニーと富士通の CDS 時価、右図が両者のペアポートフォリオ時価の推定結果を示す。両 CDS 時価は同じような動きをしている。ソニー CDS の推定時価の日次変動を富士通 CDS の日次変動に回帰した回帰係数 0.5923 に対し、投資比率 (1, −0.5923) のペアポートフォリオを構築し、ペアトレーディング戦略を実行する。ペアポートフォリオ時価は、平均的には一定の値で推移しているように見えるので、平均よりも大きなスプレッドが観測された際、ソニー CDS のショートポジションをとるのと同時に富士通 CDS のロングポジションをとり、スプレッドが元の水準に戻った際、ソニー CDS を買い戻すのと同時に富士通 CDS を売却する反対取引を実行すれば、ポジションが清算され、投資家に正の利益として確定される。

4 PDE-based Bayesian Inference of CEV Dynamics for Credit Risk in Stock Prices

第 4 章では、CEV モデルを用いた信用リスクの構造型モデルによる資産価値と株式価値の挙動を推定するために、PDE の有限差分法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法を提案する。本手法は、株式価値に基づき信用リスクを計測するための状態空間モデルとパラメータ分布の数値計算アルゴリズムの 2 つの部分から構成される。システム方程式は、CEV モデルに従う資産価値過程である。観測方程式は株式価値を表すコールオプション価格式とする。実証分析として、米国金融機関の株式の市場価値からモデルのパラメータを推定する。更に、本推定結果を用いて、デフォルト確率の分析や銀行ポートフォリオの信用リスク評価を行う。

第 4 章で提案する信用リスクの構造型モデルは以下の通りである。

- Model Ⅲ
  - 状態空間モデル

$$\begin{cases} dA_t = \mu A_t dt + \sigma A_t^{\gamma} dW_t^P \\ S_t^{mkt} = S^{mod}(t, A_t) + e_t \\ S^{mod}(t, A_t) = E_t^Q \left[e^{-r(T-t)} \max[A_T - D, 0] \right] \end{cases}$$

  - パラメータ分布の数値計算アルゴリズム
    PDE の有限差分法による数値計算とハミルトニアンモンテカルロ法を組み合わせた手法を用いて、状態空間モデルの事後分布から無作為にパラメータと潜在変数の状態をサンプリングする。

$$\text{パラメータ分布: } \{(\Theta^{(1)}, \Psi^{(1)}), \ldots, (\Theta^{(K)}, \Psi^{(K)})\},$$

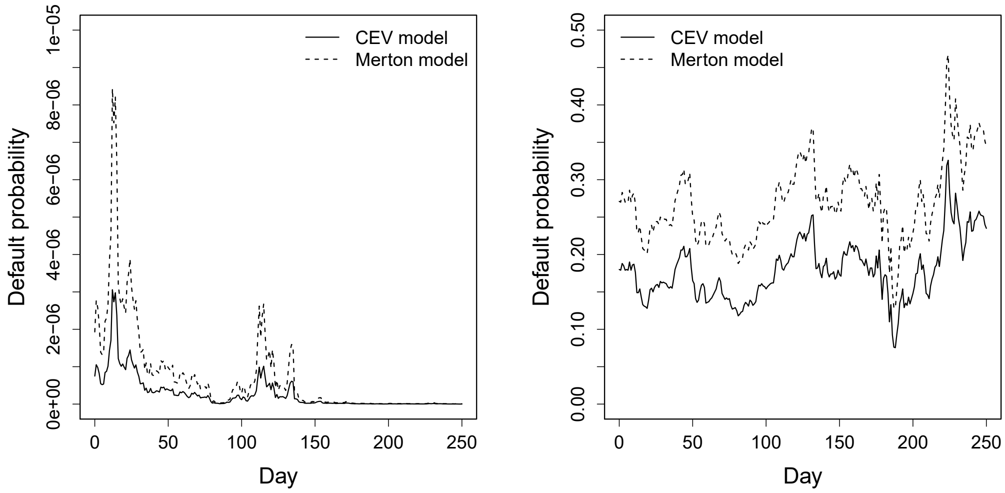
$$\begin{cases} \Theta^{(k)} = \{\mu, \sigma, \gamma\} \\ \Psi^{(k)} = \{A_{t_0}, \ldots, A_{t_x}, \ldots, A_{t_\Lambda}\} \end{cases}, \quad k = 1, \ldots, K$$

Model Ⅲ では、A_t は資産価値、S_t^{mkt} は株式の市場価値、$S^{mod}(t, x)$ は株式の理論価値、$e_t^{i,l}$ は観測誤差である。μ はドリフト、σ はボラティリティ、γ は CEV モデルの弾性定数、D は負債価値、r はリスクフリーレート、$T - t$ は観測期間、W_t^P は実確率 P の下でのブラウン運動である。K はシミュレーションの試行回数である。

図 3 は、左図が 2006 年 (平常時) における JPMorgan Chase のデフォルト確率の推定結果、右図が 2008 年 (世界金融危機時) における同推定結果を示す。デフォルト確率の水準は 2006 年よりも 2008 年の方がかなり高く、2006 年ではほぼゼロである一方、2008 年では世界金融危機発生時である 10 月～12 月にピークを示している。これらの結果は、市場の認識と非常に合っている。両期間において、資産価値とデフォルト確率は逆の動きを示しており、資産価値が負債価値の水準に近づくと、デフォルト確率が上昇する傾向が見られた。

5 結論

本研究では、信用リスクの共変動と伝播に関するモデルを構築し、実務への応用を意識した分析を行った。また、信用リスクのモデル化において、ベイズ推定 (MCMC) を用いた数値計算手法を開発した。本研究は、以下の 3 つのテーマに取り組み、3 つの新しいモデルを開発した。1 つ目は、経済物理学の観点から行った「長距離離相互作用イジングモデルを用いた不均質



(a) 2006 年のデフォルト確率　　(b) 2008 年のデフォルト確率

図 3: 2006 年と 2008 年における JPMorgan Chase のデフォルト確率の推定結果。両グラフにおいて、実線は CEV モデルによるデフォルト確率、破線は Merton モデルによるデフォルト確率を示す。x 軸は各観測期間である 2006 年と 2008 年における昇順の日付番号を表す。

な与信ポートフォリオの信用リスク評価手法 (Model I)」の構築、及び実務的な不均質ポートフォリオの信用リスク評価と分析である。2 つ目は、ファイナンスの観点から行った「ODE の Runge-Kutta 法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法 (Model Ⅱ)」の構築、及びハザードレートの共和分性を介した CDS の期間構造の間の共和分構造の分析とそのペアトレーディング戦略への応用である。3 つ目は、前テーマにおける ODE と MCMC を組み合わせた手法の拡張の観点から行った「PDE の有限差分法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法 (Model Ⅲ)」の構築、及び資産価値が CEV 過程に従う構造型モデルにおける株式価値に基づく企業の信用リスク分析である。結果として、本研究は、各テーマにおいて信用リスクの共変動と伝播のモデル化と分析に関し、理論面と実証面の両面から新規性を打ち出し、ファイナンスと経済物理学に貢献することができた。

本研究の今後の展望は、以下の通りである。金融工学と物理学のアイディアには重なる部分が多くあるので、ファイナンスと物理学の間の学際的領域において、物理学の概念や手法をファイナンスの問題に適用していくことを考える。情報統計力学や情報科学のアプローチが役に立つと思われる。今後研究を行っていくにあたり、進むべき 2 つの道は経済物理学とファイナンスのそれぞれにあり、2 つの方向から両分野のギャップを埋めていくことを考える。その際に、物理学には存在するがファイナンスには存在しない概念 (温度等) が、新しい学術分野を開拓する鍵になる。経済物理学の分野からは、「イジングモデルを用いた不均質な与信ポートフォリオの信用リスク評価手法 (Model I)」を発展させることで、デフォルト協同現象、与信ポートフォリオの相転移、大規模系・多体系・複雑系の普遍的性質に焦点を当てて、ファイナンスにおける対象の振る舞いを分析し予言する。ファイナンスの分野からは、「ODE の Runge-Kutta 法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法 (Model Ⅱ)」を発展させることで、動的ペアトレーディング戦略やペアポートフォリオの最適投資問題に焦点を当てて、クレジット商品の共和分分析と投資戦略への応用を研究する。更に、「PDE の有限差分法による数値計算と MCMC を組み合わせた手法 (Model Ⅲ)」を発展させることで、結合した前進後退確率微分方程式 (coupled FBSDE) や CoVaR (Conditional VaR) を用いた銀行業のシステミックリスクを研究する。これらの問題に対し、更なる研究を行っていくことが、ファイナンスと経済物理学の発展に貢献することに繋がると信じている。

項目	Chapter 2	Chapter 3	Chapter 4
適用対象の金融商品	与信ポートフォリオ	CDS	株式
ポートフォリオ	銀行の与信先全体	同業種の企業	銀行業
モデルの活用方法	リスク管理	投資戦略	リスク分析
リスク指標	VaR, CVaR	-	デフォルト確率
信用リスクモデリング	構造型アプローチ (Merton [1974])	誘導型アプローチ (Duffie and Singleton [1999])	構造型アプローチ (Merton [1974])
信用リスクの共変動と伝播のモデリングに用いる基本モデル	長距離相互作用イジングモデル	状態空間モデル(VECMと Arbitrage-free pricing)	状態空間モデル(マートンモデルとCEVモデル)
モデルの使用目的	セカンドピークの捕捉	ハザードレートの共和分を通したCDSの共和分の表現	弾性定数の制限緩和によるモデルフィッティングの向上
モデルの学問分野	統計物理学	計量ファイナンス	計量ファイナンス
比較対象モデル	標準的な信用リスク評価モデル (Merton based model)	-	Black-Scholesモデル
数値計算手法	レプリカ交換モンテカルロ法	ODE-based Bayesian inference (Runge-Kutta法とHMC法の統合)	PDE-based Bayesian inference (有限差分法とHMC法の統合)
手法の使用目的	与信額の不均質性(Metropolis法)と損失分布の多峰性(RMC法)	多次元Riccati型ODE(Runge-Kutta法)と多数パラメータ(HMC法)	PDEの数値計算(有限差分法)と多数パラメータ(HMC法)
手法の学問分野	統計力学	解析力学	解析力学
実装/プログラミング	VBA, C++	R, RStan	R, RStan
ハミルトニアン	ポテンシャルエネルギー (内部エネルギー)	ポテンシャルエネルギーと運動エネルギー	ポテンシャルエネルギーと運動エネルギー
MCMCの定常分布	損失分布 (カノニカル分布)	パラメータと潜在変数の分布	パラメータと潜在変数の分布

図 4: 研究の俯瞰図。信用リスクの共変動と伝播の分析及びベイズ推定 (MCMC) を用いた数値計算手法の開発が本研究のテーマ。点線内が重要なアイディアである。