

貨幣の探索理論の新展開

清　水　崇

1 はじめに

貨幣の探索理論 (search theory of money) は、貨幣の交換手段 (medium of exchange) としての機能を、その土台に据えている。すなわち、各経済主体は消費財を得るために取引相手を探索しているものの、「欲望の二重の一致」 (double coincidence of wants) が欠如しているために、物々交換が困難な状況を想定し、そこでは貨幣が交換手段としての機能を果たすことを説明するのである。Kiyotaki and Wright [6] 以降、ミクロ的基礎を持つ貨幣モデルとして、貨幣の探索理論モデルは重要視され、また研究も盛んに行なわれてきている。

しかし、Green and Zhou [2], Kamiya and Shimizu [4] により、貨幣の探索理論は新しい研究の局面を迎えた。具体的に言えば、従来の研究より一般的な立場から分析を行なった結果、こうした貨幣の探索理論の枠組では、どのようなヴァージョンのモデルを想定しても、定常均衡の実物的非決定性 (real indeterminacy) が不可避免的に発生することが明らかになったのである。このことは従来の研究の政策的含意に対しても変更を迫ることになった。

この稿では、貨幣の探索理論が想定している一般的な経済像を解説するとともに、こうした定常均衡の実物的非決定性がなぜ、そしてどこから発生するのかを明らかにすることを目的とする。

結論を先取りして言うならば、定常均衡の1つの要請であるところの定常性の条件は、定常分布を決定する際に必ず1以上の自由度を持ち、定常均衡の他の条件もその自由度を完全に消し去るには十分でない、というのが定常均衡の実物的非決定性が発生する原理である。さらに、この原理は、想定しているマッチング・テクノロジーや交渉過程に依存しないことが示されるのである。

2 貨幣の探索理論

この節では貨幣の探索理論が想定している基本的状況を提示し、探索理論によってどのように貨幣が分析されるかを説明しよう。

2.1 欲望の二重の一致

ここで想定する経済には K 種類の財が存在するとする。ただし K は3以上の自然数とし、 κ を K の逆数とする。また、この経済には無数の経済主体がおり、彼らは K 種類のタイプに分けられるとする。経済全体の経済主体の量を1とし、それぞれのタイプに属する経済主体は均等に κ ずついるとする。それぞれのタイプの経済主体は次のような生産機会と選好を持つ。タイプ1の経済主体は財2を生産できるが、財1を消費したときのみ効用を得ることができ、他の財を消費しても効用が得られない。同様に、タイプ k の生産財は財 $k+1$ ⁽¹⁾ で、消費財は財 k とする。よって、各経済主体が消費財を得るためには、必ず他の主体と取引をしなければならない。また財はすべて貯蔵不可能であり、生産してすぐ消費しないと

財が腐ってしまうと仮定する。

この論文では、全体を通じて、離散時間のモデルを考える。 $t=1, 2, \dots$ でそれぞれの期を表すものとする。各経済主体は、每期每期、取引相手を探索する。このとき、どの経済主体が見つかるかにはなんらかの不確実性が存在すると仮定する。一番単純な状況としては、それぞれの主体が他のどの経済主体と出会うかは、一様に確率的に決まる、という状況が考えられる。これをランダム・マッチングという。一般的には、誰と出会うかが、完全に確率的に決められているのではなく、ある程度、コントロール出来るようなモデルを考えることも出来る。例えば、Matsui and Shimizu [8] では、経済に無数の取引場所が存在し、どの場所に行くかを各経済主体が自由に選べるモデルを分析している。そこでは、それぞれの取引場所ではランダム・マッチングが行なわれると仮定しているので、マッチングに関する不確実性は存在しているが、もし取引場所に応じて異なった種類の経済主体が集まっているならば、誰と出会うかをある程度選択できることになる。実際、Matsui and Shimizu では、交換される財ごとに取引場所が「特化」しており、マッチングの「摩擦」が最小化しているような効率的な均衡が存在することを示している。

每期、マッチングが決定された後、それぞれのペアで取引機会があるならば、交換条件について当事者間で交渉を行なう。もし合意がなされれば、実際に財を生産し交換してマッチングを解消する。そもそも取引機会のない相手と出会ってしまった場合や交渉が決裂した場合もマッチングは解消されると仮定する。

このような状況で、例えば、タイプ1とタイプ2とのマッチングで何が起こるか考えてみよう。タイプ2の消費財は財2であり、それはタイプ1の生産財である。よってタイプ2は財2を得ようタイプ1と交渉する。その際、なんらかの対価を支払う必要がある。まず、ここで想定している

経済には無数の経済主体があり、現在の交渉相手と再び会える確率がほとんどゼロであると考えれば、信用手段を発行しても相手は受け取ってくれないだろう。⁽²⁾ よってタイプ2は自分の生産財、財3との交換を主張するより他ない。しかし、財3はタイプ1にとって消費できない財であり、また受け取ってすぐ消費しないと財は腐ってしまうので、他人に転売することも出来ない。すなわち、財3はタイプ1にとってまったく価値のない財であり、タイプ1はそのような交換に応じようとはしないだろう。こうして、タイプ1とタイプ2とのマッチングでは、取引の利益が存在するにもかかわらず、実際には取引が行なわれないことになる。この議論は任意のマッチングについても当てはまるので、この状況では一切の取引が行なわれないのである。

こうした状況を、Jevonsは「欲望の二重の一致」(double coincidence of wants)が欠如している状況と表現した。「欲望の二重の一致」とは、各経済主体にとって、自分が供給できる財の買い手と、その主体の需要する財の売り手が一致することである。良く使われる比喩として、整髪してもらいたい経済学者は、物々交換で整髪というサービスを得るためには、経済学の講義を欲している美容師を探す必要があるのである。

しかし分業が進展した経済では、欲望の二重の一致が実現することは極めて稀であり、それゆえに直接交換もたいへん困難である。貨幣の探索理論とは、現代経済のそのような側面を抽象化しているのである。

2.2 交換手段としての貨幣

このような「欲望の二重の一致」が欠如した状況では、貨幣が「交換手段」(medium of exchange)としての機能を果たすことになる。その際、貨幣の特性として重要なのは貯蔵可能であるという性質である。よって多くの貨幣の探索理論モデルでは、貨幣とは、消費による効用はないが、他

のすぐ腐ってしまう財と異なり、貯蔵可能であるような財として定義される。⁽³⁾

ここで、さきほどのタイプ1とタイプ2とのマッチングにおいて、タイプ2が貨幣を保有している状況を想定しよう。無論、このときタイプ2は財2と貨幣との交換を提案することが出来る。もし、将来タイプ1がタイプKと出会ったとき、タイプKが貨幣と財1との交換に応じてくれると、タイプ1が予想しているのならば、タイプ1は貨幣によって消費財を得ることが出来る。よって、タイプ1にとって貨幣は価値のある財であり、タイプ2の提案に応じる可能性が出て来る。またこれが予想されるならば、タイプ2も自分の生産財と貨幣との交換を受け入れるだろう。結局、経済のすべての人が貨幣と財との交換に応じてくれる、と予想されるならば、実際にすべての人は交換に応じ、そのもその予想も実現することになる。こうして探索理論モデルを用いることによって、貨幣が「交換手段」としての機能を果たすことが説明できるのである。

実際、学説史的に言うならば、他の貨幣理論に対する探索理論の優位性こそ、まさに、この貨幣の交換手段としての機能を説明できるところにある。例えば、重複世代モデル（over-lapping generation model）は、長らくミクロ的基礎を持つモデルとして重宝されてきた。そこでは貨幣の価値貯蔵としての機能が強調されている。しかし、重複世代モデルでは、例えば国債のように利子を生むような他の価値貯蔵手段が存在すると、利子を生まない貨幣は用いられなくなってしまうことが知られている。よって貨幣以外の信用手段をモデルに採り入れるためには、某かの人工的な仮定を想定しなければならなくなる。⁽⁴⁾

これに対し、探索理論モデルは貨幣と国債の併存現象も説明できる。例えば、貨幣はすべての人に受け取ってもらえるのに対し、国債は一部の人のしか受け取ってもらえないような状況を考えると、そこでは交換手段と

しての価値は貨幣の方が上であり、それがちょうど国債の生む利子とパランスするならば、貨幣と国債がともに人々に使われることは可能である。このように、交換手段としての機能に着目することによって、他の信用手段も自然な形でモデルに採り入れ分析することが可能になるのである。

3 Kiyotaki and Wright モデル

前節の議論をより精緻化するためには、その基本的状況をさらに詳しくモデル化する必要がある。この節では、その出発点として、Kiyotaki and Wright [7] のモデルを単純にしたものを説明する。

3.1 モデル

Kiyotaki and Wright モデルでは、分析を簡単にするために、次の 2 つが仮定される。

仮定 1: 貨幣は分割不可能で、1 単位だけ保有できる。

仮定 2: 生産財も各期 1 単位のみ生産できる。

生産 1 単位にかかる費用を c 、消費財 1 単位から発生する効用を u とする。また δ を割引因子とし、各経済主体は効用の流列の割引現在価値を最大にするように行動するものとする。

M をこの経済全体の名目貨幣量とし、外生的に決められているとする。この経済には 1 だけの経済主体がいるので、どの瞬間においても、貨幣を 1 単位持っている人の比率は必ず M となっている。よって、財と貨幣との交換が行なわれるためには $M \in (0, 1)$ となっていなければならない。以下ではこれが満たされている状況のみを考える。

また每期ランダム・マッチングが行なわれるとする。分析を簡単にするために、すべての経済主体は必ず他の誰かとマッチすると仮定する。出会

った相手と取引の利益を持たない場合は、すぐペアを解消して次の期を待つ。取引利益がある場合には、交渉を行なう。具体的な交渉過程として、ここでは両者同時に意思表示をして、両者とも合意したときのみ交換が行なわれるとしよう。また交渉の後、その結果如何にかかわらずペアは解消されるものとする。

3.2 貨幣の交換価値

以下、このモデルにおける対称的な定常均衡 (stationary equilibrium) を調べる。定常均衡とは、時間を通じて経済全体のありようが一定であるような均衡のことである。

まず、それぞれのマッチングでどのような取引が行なわれるかを考えよう。タイプ k とタイプ $k+1$ 以外のマッチングでは、そもそも取引の利益が存在しないので、ペアは解消される。またタイプ k とタイプ $k+1$ のマッチングでも、タイプ k が貨幣を既に保有していたり、タイプ $k+1$ が貨幣を保有していないならば取引は成立しない。例えば、タイプ k が貨幣をすでに保有していると、彼はもうこれ以上貨幣を保有できないので、財との交換に応じてくれないのである。

よって、取引が起こるの可能性があるマッチングは、タイプ k の貨幣非保有者とタイプ $k+1$ の貨幣保有者とのマッチングのみであることが判る。このとき、タイプ k は財 $k+1$ についての「売り手」であり、タイプ $k+1$ は財 $k+1$ についての「買い手」である。彼らが実際に交渉する際、買い手は、費用をかけずに効用だけ得ることが出来るので、必ず取引に合意する。一方、売り手は、取引によって今期、生産費用 c を負担することになるので、必ず取引に応じるとは限らない。具体的には、貨幣が将来もたらす便益と生産費用との比較に依存して意思表示をすることになるだろう。そして貨幣の便益は均衡によって内生的に決定される。

ここで、他のすべてのマッチングでは、売り手が確率 Π で取引に応じる、というような均衡を考えよう。また貨幣非保有者が均衡で得られる利得の割引現在価値を V_0 、貨幣保有者の利得の割引現在価値を V_1 とすると、⁽⁵⁾これらは次のように表すことができる。

$$V_0 = \max_{\pi \in [0, 1]} [\kappa M \pi (-c + \delta V_1) + (1 - \kappa M \pi) \delta V_0], \quad (1)$$

$$V_1 = \kappa(1 - M) \Pi (u + \delta V_0) + (1 - \kappa(1 - M) \Pi) \delta V_1. \quad (2)$$

ただし π はいま想定しているマッチングの売り手が取引に応じる確率であるとす。 π は、この売り手にとっては選択変数であるが、すべての売り手が確率 Π で取引に応じるような均衡を考えているので、(1) の右辺を最大にする π を π^* とすると、この均衡上では $\pi^* = \Pi$ とならなければならない。

(1) を解釈するために、タイプ 1 の貨幣非保有者について考えてみよう。彼は κ の確率でタイプ 2 の経済主体と出会い、またさらに M の確率で相手が貨幣保有者、すなわち財 2 の買い手となる。またその際、交渉において買い手は確率 1 で取引に応じるので、実際に取引が実現する確率は、自分が取引に応じる確率、すなわち π となる。取引が実現すると、生産費用 c がかかる一方、来期は貨幣保有者になれる。この価値は δV_1 で表現される。一方、取引が実現しなかったときには、来期も再度売り手として取引相手を探索することになる。このときの価値は δV_0 で表現される。以上より、貨幣非保有者の利得の割引現在価値は (1) で表現されるのである。

同様に、タイプ 1 の貨幣保有者について考えると、彼は $\kappa(1 - M)$ の確率でタイプ K の貨幣非保有者、すなわち財 1 の売り手と出会う。そして取引が実現する確率は、売り手が取引に応じる確率、 Π となる。取引が実現すると、消費財の効用 u を得ると同時に、来期は貨幣非保有者になる。この価値は δV_0 である。また取引が実現しなかったときには、来期も再度

買い手として取引相手を探索することになる。このときの価値は δV_1 で表現される。以上より、貨幣保有者の利得の割引現在価値は (2) で表現されるのである。

ここで $\bar{V} = V_1 - V_0$ と定義すると、これが貨幣 1 単位のもたらす便益を表現していることになる。ここでは貨幣の消費からの効用はゼロと仮定されているので、この便益は貨幣の交換価値と同義である。これを用いて (1), (2) を変形すると、以下のように計算できる。

$$\{1 - \delta + \kappa(1 - M)\Pi\delta\} \bar{V} = \kappa(1 - M)\Pi u - \max_{\pi \in [0, 1]} \kappa M \pi(-c + \delta \bar{V}). \quad (3)$$

よって、貨幣保有の便益を割り引いたものが財の生産費用よりも大きい、すなわち $\delta \bar{V} > c$ ならば、売り手は取引に応じるのが最適、すなわち $\pi^* = 1$ となる。一方、貨幣保有の便益を割り引いたものが生産費用よりも小さい、すなわち $\delta \bar{V} < c$ ならば、売り手は取引に応じないのが最適、すなわち $\pi^* = 0$ となる。またそれらが同じ、 $\delta \bar{V} = c$ ならば、取引に応じるのも拒否するのも無差別、すなわち任意の $\pi^* \in [0, 1]$ が最適となる。

3.3 定常均衡の分類

(3) に均衡条件 $\pi^* = \Pi$ を用いると、定常均衡を具体的に求めることが出来る。ここでは $\pi^* = \Pi$ の値に応じて、定常均衡を次の 3 タイプに分類して分析することにする。

まず $\pi^* = \Pi = 0$ となるような均衡が存在する。この均衡では、どの売り手も自分の生産財を貨幣とを交換しようとししない。よって、この均衡は非貨幣均衡 (non-monetary equilibrium) と呼ばれる。非貨幣均衡では、 $V_0 = V_1 = \bar{V} = 0$ が成立している。すなわち、誰も貨幣を受け取らないので、実際に貨幣の交換価値はゼロであるし、また逆に、貨幣の交換価値がゼロなので、実際に誰も貨幣を受け取らない、という事態が起きているのであ

る。

実は、貨幣の消費による効用がゼロと仮定している限り、探索理論モデルの枠組では、どのようなモデルのヴァリエーションを考えても、非貨幣均衡は必ず存在するのである。この非貨幣均衡の不可避性も貨幣経済の一つの本質であると思われる。前節の議論においても、貨幣の物理的な要件は貯蔵可能性であったが、それだけでは貨幣は機能しない。多くの人々が貨幣と財との交換に応じてくれるという予想が経済全体で共有されていることが貨幣を貨幣たらしめているのである。裏を返せば、ひとたび皆が貨幣の受け取りを拒否するようになれば、貨幣の価値は途端にゼロになってしまう。例えば、ハイパーインフレーションという貨幣的現象を探索理論の枠組で説明するならば、まさにこの貨幣価値がゼロに向かう過程であるということになる。大上段に構えるならば、貨幣の探索理論モデルは、この非貨幣均衡の不可避性をもって、貨幣経済の潜在的脆弱性を表現していることになる。

しかし、貨幣経済の脆弱な側面のみを強調するのが貨幣の探索理論の主眼ではない。当然このモデルには、現代の経済の常態のように、すべての売り手が自分の生産財と貨幣との交換に確実に応じてくれるような均衡も存在し得る。これは $\pi^* = \Pi = 1$ となるような均衡であり、貨幣均衡 (monetary equilibrium) と呼ばれる。

この均衡では、貨幣価値は次のように決定されている。

$$\bar{V} = \frac{\kappa((1-M)u + Mc)}{1 - \delta + \delta\kappa} > 0, \quad (4)$$

すなわち、消費による効用がゼロであるにもかかわらず、貨幣は交換価値を持つのである。しかし貨幣均衡が存在するためには、個々の売り手が交換に応じるための条件、すなわち $\delta\bar{V} \geq c$ が成立していなければならない。(4)を用いると、この条件は次のように書き換えられる。

$$\frac{u}{c} \geq 1 + \frac{1-\delta}{\delta\kappa(1-M)}. \quad (5)$$

よって貨幣均衡が存在するためには、他の条件を一定とすれば、ある程度、(i) u が大きく、(ii) c が小さく、(iii) δ が大きく、(iv) M が小さい、必要があることが判る。(i), (ii) は直観的にも明らかだろう。(iii) についても、貨幣は将来の交換のために必要なので、ある程度将来を重視するような状況でないと保有されない、と解釈すればわれわれの直観とも整合的であろう。(iv) を解釈するために、(5) が成立しないほど M が 1 に近いとしよう。このときほとんどの人が貨幣保有者、すなわち買い手ばかりになってしまうので、貨幣を得ても遣う機会がなくなってしまうのである。これは貨幣を 1 単位保有できないとした仮定 1 の帰結である。

また、 $\pi^* = \Pi \in (0, 1)$ となるような均衡も存在し得る。この均衡では、売り手は貨幣を受け取るのも拒否するのも無差別になる。すなわち、ちょうど $\delta \bar{V} = c$ が成立している。このとき $\Pi = \pi^*$ は、

$$\Pi = \pi^* = \frac{(1-\delta)c}{\delta\kappa(1-M)(u-c)},$$

と求められる。ただし $\pi^* = \Pi \in (0, 1)$ を満たさなければならないが、この条件は、実は (5) の不等号を厳密な不等号に替えたものになることが確かめられる。すなわち、(5) が厳密な不等号で成立しているとき、このタイプの均衡と貨幣均衡、そしてもちろん非貨幣均衡もともに存在していることが判る。

ここで (4), (5) を用いてそれぞれの均衡における貨幣価値を比較すると、貨幣均衡の貨幣価値の方が高いことが判る。ここでは貨幣は交換手段としてモデル化されているので、受け取られる確率が大きいほど、その価値も高くなるというのは非常に直観的なことである。このことを利用すれば、前節で述べたような複数の取引手段が共存しているような状況も分析

できるのである。⁽⁶⁾

4 Green and Zhou モデルとそのヴァリエーション

前節の Kiyotaki and Wright モデルでは、貨幣の保有は 1 単位のみという仮定（仮定 1）が置かれていた。このことを言い換えると、財の貨幣との交換比率，すなわち「価格」が常に 1 であると仮定していることになる。よって Kiyotaki and Wright モデルは価格の変化を無視していることになる。貨幣の問題を議論するに当たって、価格を分析の対象に入れられないというのはいかにも具合が悪い。また、そのような制約的な仮定に基づいて政策的提言を行なうのも危険である。例えば、前節で M が小さいほど貨幣均衡が存在しやすくなるという結論を得たが、これは明らかに仮定 1 に強く依存した結果である。

このような現実的要請があるにもかかわらず、Green and Zhou [2] が登場するまでの間、仮定 1 を外したモデルの分析は皆無であった。これは、仮定 1 を外すと、経済全体の貨幣保有分布に関する遷移が極度に複雑になり、分析が実質的に不可能になると認識されていたことが背景にあるように思われる。そこで Kiyotaki and Wright モデルに続く一連の研究では、仮定 1 は保持しつつ価格を分析に取り入れるために様々な工夫がなされた。例えば、Trejos and Wright [13], Shi [11] では、仮定 2 を外す、すなわち財の分割可能にして、貨幣と財の交換比率の逆数を価格とみなし、分析を行なっている。また Shi [12] では、1 つの家計が無数の経済主体から構成されると仮定し、1 人の経済主体は 1 単位しか貨幣を保有できないが、1 つの家計全体では貨幣保有量を選べると想定した。これも貨幣保有分布の分析を容易にするための工夫である。

これらの研究に対し、Green and Zhou [2] は、著者の知る限り初め

て、貨幣を複数単位保有できるという想定の下で貨幣均衡の導出に成功した。これを端緒として、Zhou [14], Camera and Corbae [1] といった、言わば Green and Zhou モデルのヴァリエーションが現れた。この節では Green and Zhou 以降のモデルを説明し、仮定 1 を外すことによってどれだけ均衡の性質が変化するかを調べる。

4.1 Green and Zhou モデル

ここでは Green and Zhou モデルを単純にしたモデルを説明する。

Green and Zhou モデルは、仮定 1 を外し、その代わりに次に仮定する。

仮定 3: 貨幣は分割可能であり、何単位でも保有できる。

一方、財に関しては仮定 2 は保持する、すなわち財の生産は 1 単位とする。さらに分析を容易にするために、生産費用はゼロであると仮定する。

Kiyotaki and Wright モデルでは、財と貨幣との交換比率に関しては仮定 1 により仮定されていたので、交渉の際には取引の意思の有無だけが問題になっていた。しかし仮定 3、仮定 4 の下では、財 1 単位と何単位の貨幣を交換するか、すなわち財の価格も交渉で決める必要がある。ここでは次のような交渉過程を想定する。

- ・交渉相手のタイプは観察できるが、貨幣保有量は観察できない。前者の仮定より、自分が売り手であるのか、買い手であるのか、もしくは取引の可能性がないかが判る。取引の利益がないならマッチングは解消される。
- ・売り手と買い手が同時に希望価格を提示する。
- ・売り手の希望価格が買い手の希望価格以下ならば、売り手の提示した価格で取引がなされる。売り手価格が買い手価格を越えてしまったならば交渉は決裂する。いずれの場合もマッチングは解消される。

先ほど述べた理由により、このモデルではすべての定常均衡を調べるこ

とはたいへん困難である。よって、ここでは次のような性質の貨幣均衡のみに着目する。この均衡では、ある価格 $p > 0$ が存在して、すべての経済主体が p の自然倍数の量の貨幣を保有し、また交渉の際には、可能な限り、常に価格 $p > 0$ を提示する。⁽⁷⁾ このような均衡では、買い手が p 以上の貨幣を保有しているとき、価格 p で必ず取引が成立する。また、ある経済主体の貨幣保有の遷移について考えても、 p の自然倍数の保有量から出発して、将来の貨幣量も常に p ずつ変化して行くので、どの瞬間をとってみても、貨幣保有量はやはり p の自然倍数になっている。言い換えれば、本来、貨幣はいくらでも分割可能であるにもかかわらず、この均衡上では、 p の貨幣量があたかも取引に関する最小単位になっているかのように人々が振舞っているのである。

ここで任意の自然数 n について、 np の量の貨幣を持っている人の割合を h_n で表すことにする。そして $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$ で経済全体の貨幣保有の分布を表すことにする。すると h が貨幣保有分布であるためには、次の条件が満たされなければならない。

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n = 1. \quad (6)$$

また、前節と同様、 M を経済全体の名目貨幣量とすると、次の式も成立しなければならない。

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} pnh_n. \quad (7)$$

さらに h が定常均衡を構成するためには、 h が時間に関して不変になっ⁽⁸⁾ていなければならない。これを定常性の条件という。無論、個々の経済主体の貨幣保有量は取引を通じて刻々と変化していく。しかし、経済全体で見ると、どの期をとってみても、任意の貨幣量を保有している人の割合は変わらない、というような状況はあり得る。より具体的に言えば、すべて

の n について、貨幣保有量が np から変わる人の割合と、新たな貨幣保有量が np になる人の割合と等しくなっていれば良い。ここで、各期初に np 貨幣を持っていて、かつ取引の結果、貨幣量が変化する人の割合を状態 n からの流出 (Outflow) と呼び、 O_n で表すことにする。同様に、取引によって、期末の新たな貨幣保有量が np になった人の割合を状態 n への流入 (Inflow) と呼び、 I_n と表すことにする。これらを用いると、定常性の条件は以下のように書ける。

$$O_n = I_n, \quad n=0, 1, \dots \quad (8)$$

ただし O_n と I_n は、具体的には次のように計算される。

$$O_n = \begin{cases} \kappa(\sum_{n'=1}^{\infty} h_{n'})h_0, & n=0, \\ \kappa(\sum_{n'=1}^{\infty} h_{n'})h_n + \kappa h_n, & n=1, 2, \dots, \end{cases} \quad (9)$$

$$I_n = \begin{cases} \kappa h_1, & n=0, \\ \kappa(\sum_{n'=1}^{\infty} h_{n'})h_{n-1} + \kappa h_{n+1}, & n=1, 2, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

例えば、 p だけ貨幣を持っている人は全体で h_1 の割合であり、その中で $\kappa(\sum_{n'=1}^{\infty} h_{n'})$ の割合の人が貨幣を p 以上持っている買い手と出会い、 κ の割合の人が売り手と出会う。そして、これらのどちらかが起こると、交渉の結果、取引が行なわれ貨幣保有量は p から $2p$ もしくは 0 に変化する。よって、状態 1 からの流出 O_1 は $\kappa(\sum_{n'=1}^{\infty} h_{n'})h_1 + \kappa h_1$ となるのである。

(6), (8), (9), (10) より、定常分布を具体的に求めると次のようになる。

$$h_n = (1-m)m^n. \quad (11)$$

ただし m は貨幣保有者の割合、すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ である。さらに (7) を用いると、 m は、

$$\frac{M}{p} = \frac{m}{1-m}, \quad (12)$$

を満たすように決定される。

ここでの分析に置いて重要なのは、 p は均衡上で決まる内生変数であるということである。 p を任意に与えると、それに対応して m が決定し、さらに貨幣保有分布 h が決定する。すなわち (12), (11) により、定常性の条件および (12) を満たす価格と貨幣保有分布の組は連続的に存在するということが判る。

次に、先ほど述べた均衡戦略に人々が従っているときに得られる将来利得流列の割引現在価値を求めよう。一般に、この値は初期時点での貨幣保有量に依存する。例えば、いま $1.1p$ の貨幣量を保有している経済主体を考えよう。経済の他の経済主体が均衡戦略に従い、また自分も均衡戦略に従い続ける限り、 $0.1p$ の部分の貨幣量を使用する機会は永久にない。よって $1.1p$ の量の貨幣価値は p の量の貨幣価値と等しくなる。すなわち、経済全体が p があたかも貨幣の最小単位であるかのように振舞っていると、実際の貨幣価値も p ごとにしか増えないことになるのである。以上の議論より、任意の自然数 n について、 np の量の貨幣価値を V_n と表せば、 $V = (V_0, V_1, V_2, \dots)$ だけを求めればすべての貨幣量の価値が判ることになる。(11) を用いると、 V_n は次のように表現できる。

$$V_n = \begin{cases} \kappa m \delta V_1 + (1 - \kappa m) \delta V_0, & \text{if } n=0, \dots \\ \kappa m \delta V_{n+1} + \kappa(u + \delta V_{n-1}) + (1 - \kappa m - \kappa) \delta V_n, & \text{if } n=0, \dots \end{cases}$$

さらにこれを解くと、

$$V_n = \frac{\kappa}{1-\delta} (1-\rho\phi^n)u, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

となる。ただし ϕ は次の 2 次方程式、

$$\delta \kappa m \phi^2 - \{1 - \delta + \delta \kappa(1+m)\} \phi + \delta \kappa = 0, \quad (14)$$

の解で、 $\phi \in (0, 1)$ を満たすものであり、また ρ は、

$$\rho = \frac{1-\delta}{1-\delta+\delta\kappa m(1-\phi)}, \quad (15)$$

である。これより、既に np の貨幣量を保有しているときの p 単位の追加的貨幣価値、 $V_{n+1}-V_n$ は常に正であり、また n について減少であることが判る。

最後に、先ほど述べた戦略が実際に均衡を構成しているか調べる必要がある。まず np 貨幣を保有している売り手について考えよう。彼の立場になってみると、買い手は必ず p の価格を提示して来るので、 p 未満の価格を提示しても得にならない。一方、 p を越える価格を提示すると、交渉は決裂し、取引は行なわれない。よって、このときの利得は δV_n となる。一方、均衡戦略に従うと価格 p で取引が行なわれるので、利得は δV_{n+1} となる。以上より、この種類の均衡戦略からの逸脱が得にならないためには、任意の自然数 n について、

$$\delta V_{n+1} \geq \delta V_n$$

が成立している必要があるが、上の議論よりこれは常に満たされる。まとめると、売り手は均衡戦略に従うのが最適になっている。

一方、 np 貨幣を保有している買い手について考えると、売り手は必ず p の価格を提示して来るので、 p を越える価格を提示しても得にならない。一方、 p 未満の価格を提示すると、交渉は決裂し、取引は行なわれず、このときの利得は δV_n となる。これに対して、均衡戦略に従うと価格 p で取引が行なわれるので、利得は $u + \delta V_{n-1}$ となる。以上より、この種類の均衡戦略からの逸脱が得にならないためには、任意の 1 以上の自然数 n について、

$$u + \delta V_{n-1} \geq \delta V_n$$

が成立していなければならない。しかるに、(13), (14), (15) より、これは常に成立していることが示せる。よって、買い手についても均衡戦略に従うことが最適になっていることが確かめられた。⁽¹⁰⁾

以上まとめると、Green and Zhou モデルでは、任意の $p > 0$ について、

それを共通の価格とし、あたかも貨幣の最小単位であるかのようにみなすような定常均衡が存在していることが示された。すなわち、Green and Zhou モデルでは定常均衡および価格が連続的に存在しているのである。

ここで、この経済の経済厚生 W を、経済主体の割引現在価値の平均、すなわち $W = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n V_n$ として定義しよう。すると (13), (14), (15) より、 W は次のように求められる。

$$W = \frac{\kappa m}{1 - \delta}.$$

例えば、定常均衡での価格 p が変化すると、(12) を通じて m も変化し、さらに経済厚生 W も変化する。よって、この経済には経済厚生の異なった定常均衡が連続的に存在しているのである。これを定常均衡の実物的非決定性 (real indeterminacy) という。このことから、仮定 1 が如何に制約的な性質であるかは明らかだろう。

実物的非決定性が存在するモデルでは単純な比較静学はできない。よって、当然、その政策的含意を解釈する際にも慎重さを要することになる。例えば、上の式より、他のパラメータを所与とすると、Green and Zhou モデルでは m が大きいほど経済厚生が大きくなることが判る。さらに (12) より、 m は名目貨幣量 M と正の相関があることが判る。よって、単純に考えるならば、政府は M を増やすことによって経済厚生をいくらでも大きくすることが出来る、と解釈できるように見える。しかし、これは価格 p が変化しないときの議論であることに注意しなければならない。もしも、政府が M を増やしても、民間がそれを読み込んで価格 p を同率増やしたとすると、 m はまったく変化せず、当然、経済厚生も変わらない。すなわち実際の政策的効果は民間の反応、すなわち M の変化に伴う p の変化に大きく依存しており、Green and Zhou モデルの政策的含意を解釈するにも、その点を常に注意しなくてはならない。

最後に、このモデルにおける定常均衡の実物的非決定性の源泉は、定常性の条件、(6)、(8)にあったことを指摘しておく。(11)からも明らかにように、定常性の条件を満たす貨幣保有分布 h は連続的に存在した。 h を所与とするならば、(12) はそれに対応する p を決定する式に過ぎず、また戦略の最適性の条件もなんら h を制限する役割は果たしていなかった。後で見るように、実はこの原理は、探索理論モデル共通のものである。

4.2 Zhou モデル

Zhou [14] は、Green and Zhou [2] における生産費用がゼロという仮定を外したときの貨幣均衡について分析している。ここでは Zhou を簡単にしたモデルについて説明し、この枠組でも、やはり定常均衡の実物的非決定性が発生することを示す。

貨幣と財の保有・生産単位については前節と同様、仮定 2、仮定 3 を想定する。ただし、財 1 単位の生産には費用 c がかかると仮定する。

前節で見たように、もし $c=0$ ならば、すべての経済主体が常に価格 p を提示するような均衡が存在する。その均衡では、どんなに多くの貨幣を保有していても、貨幣保有の追加的価値 $V_{n+1}-V_n$ は常に正なので、自分の生産財を欲する経済主体と出会うと p で取引を行なうので、貨幣保有分布の上限は存在しなかった。

しかし、ひとたび $c>0$ である状況を考えると、まったく同じ均衡は存在しない。なぜなら、 $V_{n+1}-V_n$ は n について減少なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{n+1} - V_n = 0,$$

となる。よって、もう既に十分多くの貨幣量を保有している売り手は、生産コスト c に対して貨幣保有の追加的価値が見合わなくなり、取引を拒否するようになるからである。

そこで均衡戦略の候補として次のようなものを考えよう。

- ・ p 以上の貨幣保有量の買い手は p を提示する。
- ・ Np 未満の貨幣保有量の売り手は p を提示する。
- ・ Np 以上の貨幣保有量の売り手は取引を拒絶する。

以下ではこの戦略が定常均衡を構成するための十分条件を調べる。まず、ある経済主体が Np 以下の貨幣保有量から出発して、この戦略に従い続けると、貨幣保有量が Np を越えることがないのは明らかである。よって $h = (h_0, h_1, \dots, h_N)$ を貨幣保有分布と考える。この貨幣保有分布が満たすべき条件は次のようになる。

$$\sum_{n=0}^N h_n = 1, \quad (16)$$

$$\frac{M}{p} = \sum_{n=0}^N n h_n, \quad (17)$$

$$O_n = I_n \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (18)$$

ただし、

$$O_n = \begin{cases} \kappa(\sum_{n'=1}^N h_{n'})h_0, & n = 0, \\ \kappa(\sum_{n'=1}^N h_{n'})h_n + \kappa(\sum_{n'=0}^{N-1} h_{n'})h_n, & n = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (19)$$

$$I_n = \begin{cases} \kappa(\sum_{n'=0}^{N-1} h_{n'})h_1, & n = 0, \\ \kappa(\sum_{n'=1}^N h_{n'})h_{n-1} + \kappa(\sum_{n'=0}^{N-1} h_{n'})h_{n+1}, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \kappa(\sum_{n'=1}^N h_{n'})h_{N-1}, & n = N. \end{cases} \quad (20)$$

例えば、 $N=1$ とすると、これらの条件は、

$$h_0 + h_1 = 1, \quad (21)$$

$$\frac{M}{p} = h_1, \quad (22)$$

となる。よって Green and Zhou モデルと同様、これらを満たす (p, h_0, h_1) は連続的に存在する。

一般の N については、貨幣保有分布を具体的に導くのは困難である。

しかし、やはり $N=1$ のときと同様、(16), (17), (18) を満たす (p, h) が連続的に存在することは以下のように示せる。まず流出・流入の定義より、

$$\sum_{n=0}^N (O_n - I_n) = 0,$$

が恒等的に成立することは明らかである。次に (19), (20) より、

$$\sum_{n=0}^N n(O_n - I_n) = 0,$$

も恒等的に成立することが示せる。よって、(16), (17), (18) は見かけ上 $(N+3)$ 本の式があるが、その中で独立な式はただだか $(N+1)$ 本であることが判る。一方、これらによって定められる内生変数は $p, h_0, h_1, \dots, h_N$ と $(N+2)$ 個ある。変数の数が独立な式の数より多いので、この連立方程式から定まる解の決定には最低 1 以上の自由度が発生しており、これらを満たす解は連続的に存在しているのである。

次に戦略の最適性について考えよう。Zhou モデルでは、Green and Zhou モデルで考慮した種類の最適性の他に、 Np 以上の売り手は取引を拒否することが最適になることも示さなければならない。

ここでは $N=1$ となるような均衡存在の十分条件を調べよう。 $N=1$ のとき均衡戦略から得られる利得の割引現在価値は次のように表される。

$$V_n = \begin{cases} \kappa(1-h_0)(-c+\delta V_1) + (1-\kappa(1-h_0))\delta V_0, & \text{if } n=0, \\ \kappa h_0(u+\delta V_{n-1}) + (1-\kappa h_0)\delta V_n, & \text{if } n=1, 2, \dots \end{cases}$$

さらにこれを解くと、

$$V_n = \frac{\kappa h_0}{1-\delta} (u - \rho \phi^n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

となる。ただし、

$$\phi = \frac{\delta \kappa h_0}{1-\delta+\delta \kappa h_0},$$

$$\rho = \frac{1-\delta}{\{1-\delta+\delta \kappa(1-\phi)(1-h_0)\}h_0} \{h_0 u + (1-h_0)c\}.$$

これを用いて、均衡戦略の最適性の条件を調べる。まず貨幣を保有していない売り手にとって、価格 p を提示するのが、取引を拒否するのに比べて、得になっていなければならない。この条件は次のように表される。

$$-c + \delta V_1 \geq \delta V_0.$$

これを計算すると、

$$\frac{u}{c} \geq 1 + \frac{1-\delta}{\delta \kappa h_0}, \quad (23)$$

となる。

次に p 以上貨幣を持っている売り手にとって、取引を拒否するのが、価格 p を提示するのに比べて、得になっていなければならない。この条件は次のように表される。

$$\delta V_n \geq -c + \delta V_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

さらに計算すると、これらは、

$$\frac{u}{c} \leq 1 + \frac{(1-\delta)(1-\delta+\delta\kappa+\delta\kappa h_0)}{(\delta\kappa h_0)^2}, \quad (24)$$

と同値となることが判る。以上まとめると、(23) と (24) が満たされるとき先ほどの戦略が定常均衡を構成することが示された。

以上まとめると、(23), (24) と定常性から導かれた (21), (22) を併せることにより、

$$\frac{(1-\delta)}{\delta\kappa(u/c-1)} < 1,$$

が満たされるとき、

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\delta)}{\delta\kappa(u/c-1)} \leq h_0 \\ & < \min \left\{ 1, \frac{1-\delta+\sqrt{(1-\delta)^2+4(1-\delta)(1-\delta+\delta\kappa)(u/c-1)}}{2\delta\kappa(u/c-1)} \right\}, \end{aligned}$$

の範囲で $N=1$ となるような定常均衡が存在することが判った。このよう

に、最適性の条件より、一部の $h_0 \in (0, 1)$ は均衡貨幣保有分布から外されるものの、やはり、依然として無数の h_0 、ひいては無数の p が均衡となるのである。すなわち、Zhou モデルにおいても定常性の条件を源泉とする定常均衡の実物的非決定性が発生している。

4.3 Camera and Corbae モデル

Green and Zhou モデルも Zhou モデルも、取引相手の貨幣保有量を知らないまま、売り手と買い手が同時に希望価格を提示する、いわゆる「ダブル・オークション」(double auction) による交渉過程を仮定していた。よって、定常均衡の実物的非決定性がその仮定に強く依存している可能性はいまのところ棄却できない。

Camera and Corbae [1] は、貨幣が分割不可能で貨幣保有の上限があるという仮定の下で、Green and Zhou とは異なる交渉過程を想定し、貨幣均衡の存在を示した。しかし、実は彼らの結果を用いると、貨幣が分割可能なモデルでも同様の定常均衡が存在し、そしてその均衡は、やはり実物的非決定的になることが Kamiya and Shimizu [4] によって示された。ここでは離散時間バージョンの Camera and Corbae モデルを説明し、それを貨幣が分割可能な環境に拡張し、定常均衡の実物的非決定性が発生することを示す。

まず貨幣保有に関して次の仮定を置く。

仮定 4: 貨幣は分割不可能で、その最小単位を構成する貨幣量を p とし、各経済主体は N 単位まで保有できる。

また財の生産・消費に関して、仮定 2 を外し、次の仮定を置く。

仮定 5: 財は何単位でも生産・消費できる。

さらに、財の生産・消費量を q とすると、そのときの生産費用を q 、消費の効用を $U(q) = q^{1-\lambda}/(1-\lambda)$ と仮定する。ただし $\lambda \in (0, 1)$ とする。

また Camera and Corbae モデルでは次のような交渉過程を想定する。

- ・交渉相手のタイプも貨幣保有量も観察できる。
- ・買い手が、需要する財の量 q と、その対価として渡す貨幣量 η を提示する。
- ・売り手はその提案を承諾するか拒否するか決める。

これより、交渉相手の貨幣保有量および相手に渡す貨幣量を所与とすると、売り手にとって承諾も拒否も無差別になるような生産量を提案することが買い手にとっては最適となる。よって以下では、それぞれの状況で買い手が何単位の貨幣を提案するだけを考える。

このモデルでもすべての定常均衡を調べるのは困難である。ここでは、次のような均衡戦略に着目する。この均衡では、1 単位以上貨幣を保有している買い手は、 $N-1$ 単位以下の貨幣を保有している売り手に対し、常に 1 単位の貨幣による取引を提案する⁽¹¹⁾。

すると、貨幣保有分布 $h = (h_0, h_1, \dots, h_N)$ の満たすべき条件は、Zhou モデルにおける条件、(16), (17), (18), (19), (20) と同じものになる。唯一異なるのは、仮定 4 の下では、 p は外生変数であることだけである。

次に最適性の条件を調べる。 $n(\leq N)$ 単位貨幣を保有している売り手に対し、買い手が貨幣 1 単位と引き替えに要求する財の数量を q_n とすると、上の議論より、

$$q_n = \delta V_{n+1} - \delta V_n,$$

と表される。これを用いると、均衡戦略利得の割引現在価値は次のように求められる。

$$V_n = \begin{cases} \kappa \sum_{n''=1}^N h_{n''} (-q_n + \delta V_{n+1}) + (1 - \kappa \sum_{n''=1}^N h_{n''}) \delta V_n & \text{if } n = 0, \\ \kappa \sum_{n''=0}^{N-1} h_{n''} (U(q_n) + \delta V_{n-1}) + \kappa \sum_{n''=1}^N h_{n''} (-q_n + \delta V_{n+1}) \\ \quad + (1 - \kappa \sum_{n''=0}^{N-1} h_{n''} - \kappa \sum_{n''=1}^N h_{n''}) \delta V_n & \text{if } n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \kappa \sum_{n''=0}^{N-1} h_{n''} (U(q_n) + \delta V_{n-1}) + (1 - \kappa \sum_{n''=0}^{N-1} h_{n''}) \delta V_n & \text{if } n = N. \end{cases}$$

先ほどの均衡戦略が最適になるためには、まず n 単位貨幣を保有している買い手が、 n' 単位貨幣を保有している売り手に対し、1 単位の貨幣の取引を持ち掛けることが、取引を拒否することに比べて、得になっていなければならない。この条件は次のように表される。

$$U(q_n) + \delta V_{n-1} \geq \delta V_n, \quad n \geq 1, n' \leq N-1.$$

また、彼が 2 単位以上の貨幣での取引を提案しても得にならないという条件も必要である。 n' 単位貨幣を保有している売り手に、 n'' 単位の貨幣量の取引を持ち掛けたとき、売り手にとって承諾も拒否も無差別になる生産量は、

$$q_{n', n''} = \delta V_{n'+n''} - \delta V_{n'},$$

⁽¹²⁾である。これより、上の条件は次のように表される。

$$U(q_n) + \delta V_{n-1} \geq U(q_{n', n''}) + \delta V_{n-n'},$$

$$n \geq 1, n' \leq N-1, 2 \leq n'' \leq \min\{n, N-n'\}.$$

よって、 $(h_0, h_1, \dots, h_N)$, $(V_0, V_1, \dots, V_N)$ が以上のすべての条件を満たすとき、先ほどの戦略が、実際に定常均衡を構成するのである。実際、任意の κ, N, p, M を所与としたときに、 λ および δ が十分大きいとき、これらの条件がすべて満たされることが示せる。⁽¹³⁾

さて、以上の結果を念頭において、貨幣が分割可能な状況を考えよう。すなわち、仮定 4 の代わりに、次の仮定を置く。

仮定 6：貨幣は分割可能で、各経済主体は $\tilde{N}$ の量まで保有できる。

この仮定の下で、先ほどと同様の貨幣保有分布および戦略を考える。すなわち、貨幣は完全に分割可能であるにもかかわらず、ある p が存在して、

- ・定常状態ではすべての経済主体は p の自然数倍の量の貨幣を保有し、
- ・取引が可能な場合は、買い手は常に p およびそれに対応する生産量を提示する。

これが定常均衡を構成することを示すために、まず定常分布の条件を調

べよう。ここで「 x 」で x 以下の自然数を表すことにする。これを用いて $N = \lceil \tilde{N}/p \rceil$ と定義し直すと、定常分布に関する条件は、貨幣が分割不可能なケースと同様の条件になる。違いは、ここでの p は内生変数であることである。よって、Zhou モデルの議論と同様、定常分布の決定に 1 以上の自由度があり、条件を満たす (p, h) の組は連続的に存在することが判る。

一方、最適性の条件はどうであろうか。 $2p$ や $3p$ といった p の自然数倍の貨幣量を提示するという種類の逸脱については、貨幣が分割不可能なケースと同じ条件を考えれば良い。よって、先ほどと同じパラメータの範囲で、そのような逸脱が得にならないことが判る。

問題は、 p の自然数倍でない貨幣量を提示するような逸脱である。例えば、買い手が $1.1p$ の貨幣量を提示するような場合を考えよう。しかし、均衡上で出会う売り手の貨幣保有量は常に p の自然数倍であり、またこの戦略に従ったときの利得の割引現在価値は、Green and Zhou モデルなどと同様、貨幣保有量 p ごとに増加することになる。よって、 $1.1p$ の貨幣量に対応する生産量と p に対応する生産量は等しくなる。例えば、貨幣量 η の価値を $V(\eta)$ 、売り手の貨幣保有量を np 、彼に貨幣量 η' を提示したとき、承諾と拒否が無差別になるような生産量を $q_{(n, \eta')}$ とすると、

$$V(np + 1.1p) = V(np + p),$$

より、

$$q_{(n, 1.1p)} = V(np + 1.1p) - V(np) = V(np + p) - V(np) = q_{(n, p)},$$

となる。よってそのような種類の逸脱も得にならないのである。以上より、仮定 4 の下で定常均衡が存在するならば、仮定 6 の下でも同様の定常均衡が存在することが判った。

さらに、ある p に対し、それよりも微小に小さい p' をとって来ると、

$$\lceil \tilde{N}/p \rceil = \lceil \tilde{N}/p' \rceil,$$

となることが判る。よって、もしある p について定常均衡が存在するな

らば、それよりも大きい p' について、やはり連続的に定常均衡が存在することが判る。以上の議論により、Green and Zhou [2], Zhou [14] と異なった交渉過程を想定しても、定常均衡の実物的非決定性が消滅しないことが明らかになった。

5 Kamiya and Shimizu モデル

Green and Zhou モデル, Zhou モデル, 貨幣が分割可能な状況での Camera and Corbae モデルといった既存のモデルでは、それぞれ異なる生産構造や交渉過程を想定しているにもかかわらず、共通して、定常性の条件を源泉とした定常均衡の実物的非決定性が発生した。Kamiya and Shimizu [4] は、これらをすべて包括するような統一的なモデルを提示し、かなりの広範囲にわたって、こうした定常均衡の実物的非決定性が不可避であることを示した。この節では Kamiya and Shimizu の結果を簡単に説明する。

5.1 モデル

Kamiya and Shimizu モデルでは、ある $p > 0$ が存在して、すべての取引において p の自然数倍の貨幣量がやりとりされるような均衡にのみ焦点を絞る。また np だけの貨幣量を保有している人の割合を h_n で表す。また分析の簡単化のために、均衡上では誰も Np を越えて貨幣を保有しないような状況を考える。この N は、Zhou モデルのように、均衡戦略によって内生的に決まっていると考えても良いし、また Camera and Corbae モデルのように、貨幣保有の上限が外生的に与えられていると考えても良い。このとき、Zhou モデルなどと同様、貨幣保有分布は $h = (h_0, h_1, \dots, h_N)$ で表現される。以下、各経済主体にとって、 $\{0, 1, \dots, N\}$ は状態空間 (state

space) であると考える.

また名目貨幣供給量 M が外生的に決められていると,

$$\frac{M}{p} = \sum_{n=0}^N n h_n \quad (25)$$

が満たされなければならない. すなわち h が決まれば, 上式を通じて p が決まる. よって, p を無視して, h だけに議論を限っても問題はないことが判る. また, h が連続的に変化すれば, p も連続的に変化するので, 定常均衡が非決定的ならば, およそ価格も非決定的になる.

$A_n = \{a_1, \dots, a_{k_n}\}$ で状態 n での行動の集合を表す. ここで行動の個数は有限であると仮定する. しかし, 明らかに均衡戦略を構成しないような行動はここでの「行動」の集合から排除しても構わない. 例えば, Camera and Corbae モデルにおける行動とは, 財の量および貨幣量についての買い手の提案であり, 一般的には無限個存在する. しかし, 前節で分析したような, 常に p の貨幣量が提示され, また財の数量についても, 売り手が承諾するのも拒否するのも無差別になるように決められているような均衡を想定している限り, 逸脱の可能性があるような意味ある行動は, p の自然数倍の貨幣量とそれに対応する財の数量を提示することであり, これらは高々有限種類しか存在しない. よって, Kamiya and Shimizu モデルは, その種の均衡を包含していることになる.

また, 前節までの均衡では, ある与えられた状況では, すべての経済主体が常に同じ行動をとるような均衡戦略ばかり見て来たが, ここでは, 人によって選択する行動が異なるような均衡, すなわち経済全体で見たときの混合戦略均衡も考える. すなわち, $\beta_{nj} \geq 0$ で h_n の中で行動 $a_j \in A_n$ を選択している人の割合を表し, $\beta = (\beta_{01}, \dots, \beta_{nj}, \dots, \beta_{Nk_N})$ で混合行動のプロファイルを表す. また $h(n, j) = \beta_{nj} h_n$ とする.

また, 次の 2 つの関数, α, f でマッチングのテクノロジーとその結果を

表現することにする。具体的には、まず $\alpha((n, j), (n', j'))$ で (n, j) の経済主体と (n', j') の経済主体とがペアを形成する割合を表す。次に f でマッチングによる個々人の状態の変化を表す。すなわち、 (n, j) の経済主体は、 (n', j') の経済主体とのマッチングの結果、状態 $n+f((n, j), (n', j'))$ に移り、一方 (n', j') の経済主体は、 (n, j) とのマッチングの結果、状態 $n'-f((n, j), (n', j'))$ に移る、というような状況を f は表現している。

例えば、Zhou モデルや Camera and Corbae モデルで考えるならば、 (n, j) は売り手、 (n', j') は買い手として、 α はマッチングの割合、また f はそのマッチングと交渉過程における行動、すなわち提案や意思決定、 $a_j, a_{j'}$ の結果、どれだけの貨幣量が買い手から売り手にわたるかを表したことになる。

また、このように抽象的に定義を与えることによって、ランダム・マッチング以外のマッチングをも包含することが可能となるのである。例えば、Matsui and Shimizu [8] では、経済に多くの取引場所があり、各経済主体は毎期どの場所行くか選択できるようなモデルを分析している。ここで行動の中に場所の選択も含めることによって、Matsui and Shimizu モデルも分析の対象とすることが可能となるのである。このことから、Kamiya and Shimizu モデルがかなり広い範囲の探索理論モデルを表現していることが判る。

5.2 定常性の条件

ここで定常性の条件を考えるために、状態 n からの流出 O_n と n への流入 I_n を定義しよう。それらは次のように表される。⁽¹⁴⁾

$$O_n = \sum_{j, i', j'} \alpha((n, j), (i', j')) + \sum_{i, j, j'} \alpha((i, j), (n, j')),$$

$$I_n = \sum_{(i, j, i', j') \in B_n} \alpha((i, j), (i', j')) + \sum_{(i, j, i', j') \in B'_n} \alpha((i, j), (i', j')),$$

ただし

$$B_n = \{(i, j, i', j') | i + f((i, j), (i', j')) = n\},$$

$$B'_n = \{(i, j, i', j') | i - f((i, j), (i', j')) = n\}.$$

よって定常性の条件とは，貨幣保有分布 $h = (h_0, h_1, \dots, h_N)$ が次を満たすことと定義できる．

$$O_0 = I_0$$

$$O_1 = I_1$$

$$O_2 = I_2$$

$$\dots$$

$$O_N = I_N$$

$$\sum_{n=0}^N h(n) = 1$$

しかし，定常性の条件とは関係なく，流出・流入の定義より，

$$\sum_{n=0}^N (O_n - I_n) = 0, \quad (26)$$

が恒等的に成立していることは明らかである．さらに，

$$\sum_{n=0}^N n(O_n - I_n) = 0, \quad (27)$$

という式も恒等的に成立していることが示せるのである．以上より，例えば $O_2 = I_2$ から $O_N = I_N$ までが成立していると，(27) より自動的に $O_1 = I_1$ が成立し，さらに (26) より $O_0 = I_0$ も成立していることが判る．よって，定常性の条件において，独立な式はたかだか $N-1$ 本しかないにもかかわらず，決定されるべき変数 $(h_0, h_1, \dots, h_N)$ は N 個存在する．よって，定常性の条件から定常貨幣保有分布を決定する際には，必ず 1 以上の自由度が存在してしまう．すなわち，定常性の条件を満たす貨幣保有分布は連続的に存在するのである．

(27) の証明は簡単である．任意の (n, j) と (n', j') のマッチングを考え

よう。このマッチングにより、 $\alpha((n, j), (n', j'))$ の割合の人が n から $n+f((n, j), (n', j'))$ へ移り、また同じ割合の人が n' から $n'-f((n, j), (n', j'))$ へ移る。よって、このマッチングについて (27) の左辺に含まれる部分を抜き出すと次のようになる。

$$\begin{aligned} & n\alpha((n, j), (n', j')) - (n+f((n, j), (n', j')))\alpha((n, j), (n', j')) \\ & + n'\alpha((n, j), (n', j')) - (n'-f((n, j), (n', j')))\alpha((n, j), (n', j')) \end{aligned}$$

これは明らかにゼロとある。同様のことが任意のペアについて成立するので、それらをすべて足し合わせた (27) 式の左辺もまたゼロとなるのである。

この証明では、マッチングがランダムであることは仮定されていない。証明で重要なのは、マッチング前のペアの状態の和、 $n+n'$ と、マッチング後の状態の和、 $(n+f)+(n-f)$ が不変ということだけである。しかし各経済主体の貨幣保有量を状態と考えるならば、政府が貨幣量を操作したり経済主体が貨幣を捨てたりしない限り、マッチング前と後とで状態の和が不変なのは当然のことである。すなわち、(27) 自体はかなり広い範囲の探索理論モデルで成立しているのである。

また、上の証明では排除しているが、Green and Zhou モデルのように貨幣保有の上限が存在しないケースについても類似の議論は可能である。しかしそのケースでは、考慮すべきマッチングの種類が可算無限個存在するので、上の証明の手順の他に、それらの和が収束するための条件が必要である。Kamiya and Shimizu [4] ではその一つの十分条件を示しており、それは Green and Zhou モデルでは常に成立している。実際、(9)、(10) を用いれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(O_n - I_n) = 0,$$

を直接示すことが出来る。Green and Zhou モデルでは、定常性の条件は

無限本の式からなるので、単純に「自由度が1」などとは言えない。しかし、やはりこの定常性の条件を通じて、(11)のように、定常貨幣分布が連続的に発生してしまうことは明らかである。

5.3 定常均衡の実物的非決定性

Green and Zhou モデル, Zhou モデル, Camera and Corbae モデルにおいては、定常性の条件で発生した定常分布の決定の自由度を、最適性の条件によってすべて消し去ることは出来なかった。このことは一般的にもあてはまる。

V_n を状態 n の利得の割引現在価値とし、 $V = (V_0, \dots, V_N)$ とする。このとき、 $x = (V, h, \beta)$ によって定常均衡が定められる。より具体的には、 $W_{nj}(x)$ で、状態 n で行動 a_j を選択したときの利得の割引現在価値とすると、定常均衡は (25) と次を満足する $x^* = (V^*, h^*, \beta^*)$ として定義でき⁽¹⁵⁾る。

$$\begin{aligned} O_n - I_n &= 0, & n &= 2, \dots, N \\ \sum_{n=0}^N h_n^* - 1 &= 0 \\ \sum_{j=1}^{k_n} \beta_{nj}^* - 1 &= 0, & n &= 0, \dots, N \\ V_n^* - W_{nj}(x^*) &= 0 & \text{if } \beta_{nj}^* > 0 \\ V_n^* - W_{nj}(x^*) &\geq 0 & \text{if } \beta_{nj}^* = 0 \end{aligned}$$

この定義式で重要なのは、 $O_n - I_n = 0$ の条件が2から N の範囲までしか要求されていないことである。前節の議論から、それらがすべて満たされれば、自動的に定常性の条件が満たされるからである。

ここで、 $\#\beta^* = \#\{\beta_{nj}^* | \beta_{nj}^* > 0\}$ と定義すると、正の値をとる変数の数は、一般的には $2(N+1) + \#\beta^*$ 個となる。一方、等式の本数は $2N+1 + \#\beta^*$ となってる。これより、一般的な状況では、何か1つ定常均衡が存在する

と、その周辺に連続的に定常均衡が存在することが示せるのである。⁽¹⁶⁾ また同様の条件下で、その非決定性が実物的なものであることも示すことが出来る。やはり、定常均衡の実物的非決定性は定常性の条件に源泉があるのである。

またここでの議論は、すべて貨幣が完全に分割可能であることに依存している。オリジナル・ヴァージョンの Camera and Corbae モデルのように、もし貨幣がこれ以上分割できない最小単位を持つならば、そもそも許容される p も有限個になり、それに対応して定常均衡もただか有限個しか存在しなくなる。しかし、その最小単位を小さくして行けば、それに対応して定常均衡の個数はどんどん増えて行く。すなわち、貨幣が完全に分割可能でないとしても、本質的に非決定性から抜け出せる訳ではないのである。

5.4 所得再分配政策

Green and Zhou モデルの説明の際述べたように、均衡が非決定的などときには単純な比較静学は適用できないし、そこから政策的含意を汲み取るのにも慎重さを要する。

しかし Kamiya and Shimizu [4] では、ある種の所得再分配政策によって定常均衡の非決定性を排除できることを示した。例として、 $N=2$ の Camera and Corbae モデルを考えよう。定常性の条件は次のようになる。

$$O_0 = \kappa(h_1 + h_2)h_0 = \kappa(h_0 + h_1)h_1 = I_0$$

$$O_1 = \kappa(h_0 + h_1)h_1 + \kappa(h_1 + h_2)h_1 = \kappa h_0(h_1 + h_2) + \kappa(h_0 + h_1)h_2 = I_1$$

$$O_2 = \kappa(h_0 + h_1)h_2 = \kappa(h_1 + h_2)h_1 = I_2$$

$$h_0 + h_1 + h_2 = 1.$$

いままでの議論と同様、 $\sum_{n=0}^2 (O_n - I_n) = 0$ と $\sum_{n=0}^2 n(O_n - I_n) = 0$ とが恒等的に成立するために、上の連立方程式のうち 2 本が余計なものとなり、こ

のことが貨幣保有分布の決定の自由度を招く。

ここで次のような所得再分配政策を考えよう。各期末において、 h_0 の中で当期取引に参加しなかった人のうち、 τ_0 の人達に p を与える。一方、 h_2 の中で当期取引に参加しなかった人のうち、 τ_2 の人達から p を徴収する。その際、貨幣が足りないならば追加的に貨幣を発行して経済に投入し、また逆に貨幣が余ってしまったらその分は吸収するものとする。

この所得再分配政策の下での流出、流入を $\bar{O}_n$, $\bar{I}_n$ で表すと、新しい定常性の条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{O}_0 &= \kappa(h_1+h_2)h_0+\tau_0h_0 = \kappa(h_0+h_1)h_1 = \bar{I}_0 \\ \bar{O}_1 &= \kappa(h_0+h_1)h_1+\kappa(h_1+h_2)h_1 = \kappa h_0(h_1+h_2)+\kappa(h_0+h_1)h_2+\tau_0h+\tau_2h_2 \\ &= \bar{I}_1 \\ \bar{O}_2 &= \kappa(h_0+h_1)h_2+\tau_2h_2 = \kappa(h_1+h_2)h_1 = \bar{I}_2 \\ h_0+h_1+h_2 &= 1.\end{aligned}$$

注意すべきなのは、この所得分配再分配政策の下では、 $\sum_{n=0}^2 n(\bar{O}_n - \bar{I}_n) = 0$ が成立するのは、 h が定常性の条件を満たすときに限られることである。よって h は、少なくとも局所的には、⁽¹⁷⁾ 決定的になり得る。これに対し、政府がさらに収支を一致させるような原則を課すことにすると、今度は逆にいかなる所得再分配政策を実施しても定常分布は再び非決定的になることが確かめられるのである。

この背景にある原理は次のようなものである。(27) を用いると、 $\sum_{n=0}^N n(\bar{I}_n - \bar{O}_n)$ は所得再分配政策によって発生する財政赤字を表していることが判る。よって収支一致の原則を建てない限り、定常状態以外ではゼロにならない。これにより、 $\sum_{n=0}^N n(\bar{I}_n - \bar{O}_n) = 0$ が追加的に定常性の条件として課されることになり、解の決定の自由度を消すことになる。一方、収支一致のルールを課すということは、 $\sum_{n=0}^N n(\bar{I}_n - \bar{O}_n) = 0$ を定常状態以外でも実現するように、政策変数 τ_0 , τ_2 のうちどちらかを調整することを意

味するので、この式が独立の式とならず、依然として自由度が存在してしまうことになるのである。

また、さらに Kamiya and Shimizu [4] では、任意の定常均衡について、その近傍に均衡を誘導するような所得再分配政策が存在することを示した。すなわち、連続的に存在する定常均衡の中から、最も大きい経済厚生をもたらすものを選び、その近傍に経済を誘導することが所得再分配政策によって可能となるのである。

6 まとめと将来の研究課題

以上、この稿では既存の貨幣の探索理論モデルには共通の構造があることを明らかにした。それは、定常性の条件より (27) が常に成立させ、これを源泉として定常均衡の実物的非決定性を発生させるようなものであった。さらにこうした原理は、ランダム・マッチング・モデルに留まらず、より一般的な探索理論モデルでも作用していることを説明した。

しかし一方、Cash-in-Advance モデル（例えば、Lucas [10]）や Trading Post モデル（例えば、Hayashi and Matsui [3]）といった、大雑把に言えば、一般均衡的な貨幣モデルでは、一般的には定常均衡は決定的となることが知られている。しかし、これらのモデルでも、当然 (27) に類する式は成立しているはずである。すると、これらのモデルでは、探索理論モデルでは存在しなかったなんらかの力が作用して定常均衡を決定的にしているのではないかと推論したくなる。こうした問いに答えるためにも、探索理論モデルを越えた、より一般的なモデルを構築し、どの範囲で定常均衡の実物的非決定性が発生するのかを明らかにすることは将来の研究課題である。

またこれとも関連して、どのような力が作用すれば、定常均衡の実物的

非決定性を除去できるのかを明らかにすることも将来の研究課題である。本稿では、ある種の所得再分配政策によって実物的非決定性が除去できることを説明した。その他にも、Matsui and Shimizu [8] は、進化論的ゲーム理論の枠組を用いて、淘汰圧が定常均衡を決定的にすることを示した。この淘汰圧を市場の競争圧力と解釈するならば、短期的には均衡は非決定的であるが、より長期的な競争圧力が定常均衡を決定的にする、という解釈が得られる。この論点をより詳しく分析することは、貨幣経済の原理を理解する上で重要な示唆をもたらすであろう。

また、この稿では定常均衡の実物的非決定性という側面を強調してきた。しかし、その源泉が(27)にあることは、Kamiya and Shimizu [4] によって初めて明らかになった。これは、従来の研究がそれぞれ個別のモデルを分析することに終止しており、Kamiya and Shimizu によって初めて包括的なモデルによる分析がなされたことに起因していると考えられる。このように一般的な立場から貨幣の探索理論モデルを考察するという研究プログラムはまだ始まったばかりであり、ここで明らかにした他に、どのような一般的な構造が潜んでいるかはまだ誰にも判ってはいないと言えよう。

注

- (1) ただしタイプ K の生産財は財 1 であるとする。このことを文献では " $k+1(\bmod K)$ " と表現することがあるが、この論文では単に本文のように書くことにする。
- (2) ただし当該主体の発行した借用書自体が交換手段として流通するならば、信用取引は理論的には可能である。
- (3) 消費による効用も得られる「物品貨幣」(commodity money) の研究もある。例えば、Kiyotaki and Wright [6] を見よ。
- (4) 探索理論モデル以前の貨幣モデルについては、例えば Kareken and Wal-

- lace [5] や Ostroy and Starr [9] などを参照せよ。
- (5) 対称的な均衡を考えているので、割引現在価値はタイプには依存しない。
また定常均衡を考えているので、時間にも依存しない。
- (6) 詳しくは Kiyotaki and Wright [7] を見よ。
- (7) p 未満の貨幣保有量の買い手は何も提示しない。
- (8) 以降では、(6) も定常性の条件に含めるものとする。
- (9) そのような解が唯一つだけ存在することが示せる。
- (10) Green and Zhou [2] のオリジナルのモデルではここでの交渉過程と異なったものを想定しているので、さらなる均衡条件が必要になる。
- (11) N 単位貨幣を持っている売り手は絶対に取引に応じないことに注意。
- (12) すなわち、 $q_{(n', n'')} = q_k$ 。
- (13) 具体的には、Camera and Corbae [1] を参照せよ。
- (14) 厳密に言えば、ここで定義している流出・流入は、今までの定義とは異なり、実際には n から変化しない人々の割合も含んでいる粗流入・粗流出になっている。しかし、最終的に定常性の条件 " $O_n = I_n$ " を考える際には、両辺でその部分が相殺し合うので、このような定義を与えても議論に影響はない。
- (15) 一般に定常均衡を定義する際には、ここでの行動集合から排除した明らかに最適にならないような行動についても、逸脱の誘引がないことを形式的に保証しなければならない。そこで、Kamiya and Shimizu [4] では、ここでの条件を満たすものを定常準均衡 (stationary quasi-equilibrium) と定義し、以下で定常準均衡の性質を分析することによって、定常均衡の性質に示唆を与える、という方法を採用している。
- (16) ここでの「一般的な状況」を厳密に定義するためには、微分位相幾何学の概念を導入する必要がある。より厳密な議論については Kamiya and Shimizu [4] およびその付録を見よ。
- (17) この例で定常分布を唯一にするような τ_0 と τ_2 を具体的に見つけることは容易である。

参考文献

- [1] Gabriele Camera and Dean Corbae. Money and price dispersion. *International Economic Review*, 40(4): 985-1008, 1999.

- [2] Edward J. Green and Ruilin Zhou. A rudimentary random-matching model with divisible money and prices. *Journal of Economic Theory*, 81 (2) : 252-271, 1998.
- [3] Fumio Hayashi and Akihiko Matsui. A model of fiat money and barter. *Journal of Economic Theory*, 68 : 111-132, 1996.
- [4] Kazuya Kamiya and Takashi Shimizu. Real indeterminacy of stationary equilibria in matching models with media of exchange. 2002.
- [5] John H. Kareken and Neil Wallace, editors. *Models of Monetary Economies*. Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1980.
- [6] Nobuhiro Kiyotaki and Randall Wright. On money as a medium of exchange. *Journal of Political Economy*, 97(4) : 927-954, 1989.
- [7] Nobuhiro Kiyotaki and Randall Wright. A search-theoretic approach to monetary economics. *American Economic Review*, 83(1) : 63-77, 1993.
- [8] Akihiko Matsui and Takashi Shimizu. A theory of money with market places. 2001.
- [9] Joseph M. Ostroy and Ross M. Starr. The transactions role of money. In Benjamin M. Friedman and Frank H. Hahn, editors, *Handbook of Monetary Economics Volume I*. North-Holland, 1990.
- [10] Jr. Robert E. Lucas. Equilibrium in a pure currency economy. *Economic Inquiry*, 18 : 203-220, 1980.
- [11] Shouyong Shi. Money and prices : A model of search and bargaining. *Journal of Economic Theory*, 67 : 467-496, 1995.
- [12] Shouyong Shi. A divisible search model of fiat money. *Econometrica*, 65 (1) : 75-102, 1997.
- [13] Alberto Trejos and Randall Wright. Search, bargaining, money, and prices. *Journal of Political Economy*, 103(1) : 118-141, 1995.
- [14] Ruilin Zhou. Individual and aggregate real balances in a random-matching model. *International Economic Review*, 40(4) : 1009-1038, 1999.