ゲーム理論のための論理系

永　島　孝

筆者は金子守氏（筑波大学社会工学系）との共同研究で，ゲーム理論の諸問題を数理論理学の手法によって解明することをめざし，金子氏がゲーム理論の側面を，永島が証明論の側面をおもに分担して，ゲーム論理 (Game Logic) という論理体系を構築した [KN 96, KN 97]．ここでは，その論理体系における証明論的に基本的な結果のうち紙幅の制約で証明を省いたことの一部などについて，やや詳しく述べる．

ゲームのプレーヤーが n 人いるとして，それらのプレーヤーの共有知識 (common knowledge) の記述のために，まず各プレーヤーの知識をあらわす様相演算子 K_i を古典述語論理の体系に追加する．論理式 A であらわされる命題に対して，A であることを第 i プレーヤーが知っている（あるいは信じている）のを K_iA であらわすとする．A が共有知識であるとは，$n=2$ の場合を例示すれば，

$$A, K_1A, K_2K_1A, K_1K_2K_1A, \ldots$$

$$K_2A, K_1K_2A, K_2K_1K_2A, \ldots$$

がすべてなりたつことをいう．それを論理式で記述するために，無限個の論理式に対しても $\wedge$ が適用できるように体系を拡張し，共有知識であることをあらわす論理式

$$A \wedge K_1 A \wedge K_2 A \wedge K_2 K_1 A \wedge K_1 K_2 A \wedge K_1 K_2 K_1 A \wedge \ldots$$

を考えて，これを $C(A)$ と略記する．なお，古典論理の双対性を考慮して，$\wedge$ でだけでなく $\vee$ も無限個の論理式に適用することを許す．従ってわれわれの体系は n 個の様相記号のある多様相論理であるとともにまた無限個の論理式を $\wedge$，$\vee$ で結ぶことを許す無限論理（infinitary logic）でもある．無限論理一般については例えば［T 87］第4章参照．ただし，共有知識の記述という目的のためには無限論理 $L_{\omega_1\omega}$ のかなり小さい部分体系で足りる．

無限論理をもちいずに共有知識を記述することは Halpern and Moses［HM92］が試みている巧妙な方法があるけれども，特殊な推論規則をもちいる彼らの方法はわれわれの目的には採用しがたいものであり，困難を承知の上で敢えて無限論理を採りあげることにする．ゲーム論理と既存のいくつかの論理との関係を図示するとつぎのようになる：

$$\begin{array}{ccccc}
\text{多様相命題論理} & \rightarrow & \text{多様相述語論理} & \rightarrow & \text{ゲーム論理} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\text{様相命題論理} & \rightarrow & \text{様相述語論理} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\text{命題論理} & \rightarrow & \text{述語論理} & \rightarrow & \text{無限述語論理}
\end{array}$$

なお，ここで無限述語論理とあるのは，さまざまな無限述語論理のうちの特定の一つである．

さて，ゲーム論理 GL_ω について，その Russell-Hilbert 流の体系と sequent calculus の体系との二つの体系を定義し，Russell-Hilbert 流の体系における演繹定理や necessitation rule などを示し，また二つの体系がたがいに同値であることなど示す．

記号や用語について，［KN 96, KN 97］と必ずしも一致させてない箇所もある．

例えば公理の名称は，[KN 96] では $\mathrm{L1}_i$ と書いたものをここでは $\mathrm{KL1}_i$ と書く．

まずゲームのプレーヤーの人数をあらわす自然数 n を任意に固定する．応用上興味のあるのは $n \geq 2$ の場合である．$n=0$ の場合は無限述語論理に過ぎず，$n=1$ の場合は様相述語論理 KD4（の無限述語論理の一つへの拡張）になる．つぎの記号をもちいる．

(1)　自由変数 $a_0, a_1, \ldots$.

(2)　束縛変数 $x_0, x_1, \ldots$.

(3)　知識記号 $K_1, \ldots, K_n$.

(4)　論理記号 $\neg, \supset, \wedge, \vee, \forall, \exists$.

(5)　補助記号 括弧，右矢印など．

自由変数，束縛変数はそれぞれ可算無限個あるとする．知識記号を除いて古典述語論理でもちいるのと同じ記号であるが，$\wedge$，$\vee$ を高々可算無限個の論理式に対して適用する点で古典述語論理と異なる．

上に挙げた記号のほかにさらにいわゆる nonlogical symbols すなわちいくつかの函数記号 $f_0, f_1, \ldots$ と 1 個以上の述語記号 $P_0, P_1, \ldots$ とを任意に定め，これら全体を $\mathcal{L}$ であらわす．各函数記号と各述語記号とに対応してその項数（arity）とよぶ自然数が定まっているとする．f の項数が k であるとき f を k 項函数記号という．述語記号についても同様．

自由変数をあらわすメタ記号として $a, b, \ldots$ をもちい，束縛変数をあらわすメタ記号として $x, y, \ldots$ をもちいる．項（term）の定義は古典述語論理の場合と同じく，つぎのとおりである．

(1)　自由変数は項である．

(2)　f が k 項函数記号で $t_1, \ldots, t_k$ が項ならば $f(t_1, \ldots, t_k)$ は項である．

(3)　以上によって得られるものだけが項である．

論理式（formula）の定義はつぎのとおりである．まず，素論理式（atomic formula）は古典述語論理の場合と同じく，$P(t_1, \ldots, t_k)$ の形の

もの（P は $\mathscr{L}$ に属する k 項述語，$t_1,\ldots,t_k$ は項）とする．素論理式は論理式であると定める．

形式的表現の任意の集合 $\mathscr{X}$ に，形式的表現の集合 $\bar{\mathscr{X}}$ をつぎのように対応させる．

(1)　$\mathscr{X}$ に属するものは $\bar{\mathscr{X}}$ に属する．

(2)　A が $\bar{\mathscr{X}}$ に属するならば $\neg A$ は $\bar{\mathscr{X}}$ に属する．

(3)　A，B が $\bar{\mathscr{X}}$ に属するならば $A \supset B$ は $\bar{\mathscr{X}}$ に属する．

(4)　A が $\bar{\mathscr{X}}$ に属し，x が A に含まれないならば，A の中の自由変数 a をすべて x に書き替えた結果を A' とすると，$\forall x A', \exists x A'$ はいずれも $\bar{\mathscr{X}}$ に属する．

(5)　A が $\bar{\mathscr{X}}$ に属するならば $K_i A$ は $\bar{\mathscr{X}}$ に属する $(1,\ldots,n)$．

(6)　以上によって得られるものだけが $\bar{\mathscr{X}}$ に属する．

つぎに集合の列 $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \ldots$ を帰納的に定める．素論理式の全体を $\mathscr{X}$ としたときの $\bar{\mathscr{X}}$ を $\mathscr{P}_0$ とする．$\mathscr{P}_k$ の空でなく高々可算で自由変数を有限個だけしか含まない部分集合 $\varXi$ 対する $\wedge\varXi$ と $\vee\varXi$ との全体を $\mathscr{X}$ とすると，$\overline{\mathscr{P}_k \cup \mathscr{X}}$ を $\mathscr{P}_{k+1}$ と定める．

さらに $\mathscr{P}_\omega = \cup_{k<\omega} \mathscr{P}_k$ とおき，$\mathscr{P}_\omega$ に属するものを理論式という．なお，共有知識を記述する力をそこなわずに，$\wedge$，$\vee$ の適用についての条件をさらにきびしくして，論理式の範囲を狭めることができるけれども，それについてはここで論じない．

定義から，$\varXi$ が $\mathscr{P}_\omega$ の空でない有限部分集合ならば $\wedge\varXi$ と $\vee\varXi$ とは論理式である．なお $\varXi$ が $\mathscr{P}_\omega$ の可算な部分集合であってしかも自由変数を有限個だけしか含まないとしても，$\wedge\varXi$，$\vee\varXi$ は必ずしも論理式にはならないことに注意．

論理式を $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ であらわす．

略記法についていくつか約束する．(4) の A，A' をそれぞれ $A(a)$,

$A(x)$ と書く．$\wedge\{A,B\}$ を $A\wedge B$ と書き，$\vee\{A,B\}$ を $A\vee B$ と書く．ふつうの古典論理の体系の場合と違い，$A\wedge B$ と $B\wedge A$ とは同一の論理式の表記であることに注意．$(A\supset B)\wedge(B\supset A)$ を $A\equiv B$ と書く．$\wedge\{A\}$ と A とは異なる論理式であるが，たがいに同値になる．$\vee$についても同様．

括弧の省略のためにつぎの規約を設ける．結合の優先順位は単項演算子 $\neg, \forall, \exists, K_1, \ldots, K_n$ が最も高く，そのつぎが$\wedge$と$\vee$，そして最も低いのが$\supset$と$\equiv$であるとする．$\supset$の重なりに関しては右優先，すなわち $A\supset B\supset C$ は $A\supset(B\supset C)$ の意味と約束する．

ギリシャ大文字 $\Gamma, \Delta, \ldots, \Xi, \Pi, \ldots$ は，論理式の集合であってつぎの条件をみたすものをあらわすと約束する：

(1)　ある自然数 k に対する $\mathcal{P}_k$ の高々可算な部分集合である．

(2)　自由変数を有限個だけしか含まない．

言い替えれば，$\wedge$，$\vee$の適用を許す集合または空集合のいずれかを意味する．

さらに省略記法として $\{\neg X \mid X\in\Xi\}$ を $\neg\Xi$ と書き，$\{K_iX \mid X\in\Xi\}$ を $K_i\Xi$ と書く．また，$\wedge(\Xi\cup\Pi)$ を $\wedge(\Xi,\Pi)$ と書く．$\vee$についても同様．$\wedge(\{A\}\cup\Xi)$ を $\wedge(A,\Xi)$ と書く．$\vee$についても同様．

ゲーム論理の二つの形式化のうち，まず GL_ω の Russell-Hilbert 流の体系を定める．その準備として体系 GL_0 の Russell-Hilbert 流の体系を定め，のちに公理を追加する．

公理図式（axiom schemata）：

L1. $A\supset B\supset A$.

L2. $(A\supset B\supset C)\supset(A\supset B)\supset A\supset C$.

L3. $(\neg A\supset\neg B)\supset(\neg A\supset B)\supset A$.

L4. $\wedge\Xi\supset A \quad (A\in\Xi)$.

L5. $A\supset\vee\Xi \quad (A\in\Xi)$.

L6. $\forall x A(x) \supset A(t)$.

L7. $A(t) \supset \exists x A x$

推論規則（inference rules）：

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}\ (\mathrm{MP})$$

$$\frac{\{A \supset X \mid X \in \Xi\}}{A \supset \wedge \Xi}\ (\wedge) \qquad \frac{\{X \supset A \mid X \in \Xi\}}{\vee \Xi \supset A}\ (\vee)$$

$$\frac{B \supset A(a)}{B \supset \forall x A(x)}\ (\forall) \qquad \frac{A(a) \supset B}{\exists x A(x) \supset B}\ (\exists)$$

Ξ は空でないとする．推論規則（$\forall$）と（$\exists$）とにおいて自由変数 a は下式に含まれていないとする．この二つについて，a をその推論の eigen-variable という．

ここまでの公理と推論規則からなる体系を GL_0 と記す．この体系には $K_1, \ldots, K_n$ に関する公理も推論規則もないから，GL_0 は古典述語論理を拡張して可算無限個の式に対する $\wedge$，$\vee$ の適用を許した無限論理 $L_{\omega_1\omega}$ の部分体系に過ぎない．

体系 GL_0 の公理系に，まずつぎの公理図式を追加する（$i=1, \ldots, n$）．

KL1$_i$. $K_i(A \supset B \supset A)$.

KL2$_i$. $K_i((A \supset B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C)$.

KL3$_i$. $K_i((\neg A \supset \neg B) \supset (\neg A \supset B) \supset A)$.

KL4$_i$. $K_i(\wedge \Xi \supset A) \quad (A \in \Xi)$.

KL5$_i$. $K_i(A \supset \vee \Xi) \quad (A \in \Xi)$.

KL6$_i$. $K_i(\forall x A(x) \supset A(t))$.

KL7$_i$. $K_i(A(t) \supset \exists x A(x))$.

KMP$_i$. $K_i(A \supset B) \supset K_i A \supset K_i B$.

K$\wedge_i$. $K_i(\wedge \{A \supset X \mid X \in \Xi\}) \supset K_i(A \supset \wedge \Xi)$.

K$\vee_i$. $K_i(\wedge \{X \supset A \mid X \in \Xi\}) \supset K_i(\vee \Xi \supset A)$.

K∀$_i$. $K_i\forall x(B\supset A(x))\supset K_i(B\supset\forall xA(x))$.

K∃$_i$. $K_i\forall x(A(x)\supset B)\supset K_i(\exists xA(x)\supset B)$.

K⊥$_i$. $\neg K_i(A\wedge\neg A)$.

∧B$_i$. $\wedge K_i\Xi\supset K_i(\wedge\Xi)$.

∀B$_i$. $\forall xK_iA(x)\supset K_i\forall xA(x)$.

PI$_i$. $K_i(A)\supset K_i(K_i(A))$.

さらに，各 i （$i=1,\ldots,n$） に対して，KL1$_i$ から PI$_i$ までの図式に該当するおのおのの公理 A に対する K_iA を公理として追加する．ここまでの公理系を Γ_1 として，

$$\bigcup_{k\in N}\{K_{i_1}K_{i_2}\ldots K_{i_k}X\,|\,X\in\Gamma_1, i_1\neq i_2\neq\ldots\neq i_k\}$$

をさらに公理として追加した体系が GL$_\omega$ の Russell-Hilbert 流の体系である．なお［KN 96］では GL$_0$ と GL$_\omega$ との間にさまざまな体系を考えているが，それらについては説明を省く．

論理式 A と論理式の集合 Γ とに対して，A の Γ からの演繹図（deduction figure）は論理式からなる木構造でつぎの条件をみたすものと定義する：

(1) ある自然数 k に対して，すべての論理式が $\mathcal{P}_k$ に属している．

(2) 枝（branch）の長さはすべて有限である．

(3) 根（root）は A である．

(4) 葉（leaf）はいずれも Γ に属する論理式と公理とのいずれかである．

(5) 葉以外の各節（node）の論理式とその上に隣り合っている論理式全体との関係は，推論規則に該当する推論である．

とくに A の空集合 ϕ からの演繹図を A の証明図（proof figure）という．

A の Γ からの演繹図のあるとき A は Γ から演繹可能（deducible）であるといい，$\Gamma\vdash A$ と書く．A の証明図のあるときすなわち $\phi\vdash A$ のとき A は証明可能（provable）であるといい，$\vdash A$ と書く．$\Gamma\cup\Delta\vdash A$ を

$\Gamma, \Delta \vdash A$ と書き，$\{B, C, \ldots\} \cup \Gamma \vdash A$ を $B, C, \ldots, \Gamma \vdash A$ と書く．

演繹図の根にある論理式を終式（endformula），葉にある論理式を始式（initial formula）という．

古典論理の場合でさえも与えられた論理式の演繹図を Russell-Hilbert 流の体系で書くことは容易でなく，まず演繹定理を証明しておいてそれをもちいて演繹図の存在を間接的に示す方法を採るのがふつうである．しかし，その演繹定理を証明するための準備としていくつかの論理式の演繹可能性を直接に示しておく必要がある．この事情はわれわれの体系においてもまったく同様である．

つぎの補題は新しい結果ではなく，古典述語論理に関しては古くから知られていることであり，無限の $\wedge$，$\vee$ に関しても容易に類推できるものであるけれども，最近は教科書などにも説明が見られないと思われるので，参考までに述べておく．なお，この補題は $K_1, \ldots, K_n$ にかかわらないので，実は GL_0 で成立する．

補題 1. つぎのおのおのが成立する．

$$\vdash A \supset A \tag{1}$$

$$A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C \tag{2}$$

$$A \supset B \supset C \vdash B \supset A \supset C \tag{3}$$

$$\vdash (B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C \tag{4}$$

$$A \supset B \supset C \vdash B \supset A \supset C \tag{5}$$

$$\vdash (A \supset B) \supset (B \supset C) \supset A \supset C \tag{6}$$

$$\vdash A \supset (A \supset B) \supset B \tag{7}$$

$$\vdash (A \supset A \supset B) \supset A \supset B \tag{8}$$

$$\vdash \neg\neg A \supset A \tag{9}$$

$$\vdash (\neg A \supset \neg B) \supset B \supset A \tag{10}$$

$$\vdash A \supset \neg\neg A \tag{11}$$

$$\vdash (A \supset \neg B) \supset B \supset \neg A \tag{12}$$

$$\vdash (\neg A \supset B) \supset \neg B \supset A \tag{13}$$

$$\vdash (A \supset B) \supset \neg B \supset \neg A \tag{14}$$

$$\vdash A \supset B \supset \neg (A \supset \neg B) \tag{15}$$

$$\vdash \neg A \supset A \supset B \tag{16}$$

$$\vdash \neg (A \supset \neg B) \supset A \tag{17}$$

$$\vdash \neg (A \supset \neg B) \supset B \tag{18}$$

$$\vdash \neg (A \supset \neg B) \supset A \wedge B \tag{19}$$

$$\vdash A \supset B \supset A \wedge B \tag{20}$$

$$\vdash A \wedge B \supset \neg (A \supset \neg B) \tag{21}$$

$$(A \supset B) \wedge A \supset B \tag{22}$$

$$\vdash A \vee B \supset \neg A \supset B \tag{23}$$

$$\vdash (\neg A \supset B) \supset A \vee B \tag{24}$$

$$\vdash \neg (A \supset B) \supset A \tag{25}$$

$$\vdash \neg (A \supset B) \supset \neg B \tag{26}$$

$$\vdash (A \supset B) \supset \neg A \vee B \tag{27}$$

$$A \supset B \supset C \vdash A \wedge B \supset C \tag{28}$$

$$A \wedge B \supset C \vdash A \supset B \supset C \tag{29}$$

$$\vdash A \wedge \neg A \supset B \tag{30}$$

$$\vdash \wedge \{A\} \equiv A \tag{31}$$

$$\vdash \vee \{A\} \equiv A \tag{32}$$

$$\vdash \wedge (\Xi, \Pi) \supset \wedge \Xi \tag{33}$$

$$\vdash \wedge (\Xi, \Pi) \equiv \wedge \Xi \wedge \wedge \Pi \tag{34}$$

$$\vdash \wedge (A, \Xi) \equiv A \wedge \wedge \Xi \tag{35}$$

$$\vdash \vee \Xi \supset \vee (\Xi, \Pi) \tag{36}$$

$$\vdash \vee\Xi \vee \vee\Pi \equiv \vee(\Xi, \Pi) \tag{37}$$

$$\vdash A \vee \vee\Xi \equiv \vee(A, \Xi) \tag{38}$$

$$\wedge(A, \Xi) \supset B \vdash A \supset \wedge\Xi \supset B \tag{39}$$

$$A \supset \wedge\Xi \supset B \vdash \wedge(A, \Xi) \supset B \tag{40}$$

$$\vdash \neg\wedge\Xi \equiv \vee\neg\Xi \tag{41}$$

$$\vdash \neg\vee\Xi \equiv \wedge\neg\Xi \tag{42}$$

$$A \supset \vee(\Xi, B) \vdash \wedge(A, \neg\Xi) \supset B \tag{43}$$

$$\wedge(A, \neg\Xi) \supset B \vdash A \supset \vee(\Xi, B) \tag{44}$$

$$\wedge\Xi \supset \vee(\Pi, A) \vdash \wedge(\Xi, \neg\Pi) \supset A \tag{45}$$

$$\wedge(\Xi, \neg\Pi) \supset A \vdash \wedge\Xi \supset (\Pi, A) \tag{46}$$

$$\wedge\Xi \supset \wedge\Pi \supset A \vdash \wedge(\Xi, \Pi) \supset A \tag{47}$$

$$\vdash \vee(\Xi, \vee\Pi) \supset \vee(\Xi, \Pi) \tag{48}$$

□

証明　いずれも演繹定理をもちいずに示す．なお，“$\vdash$”を省いて記す．

(1)　$A\supset(B\supset A)\supset A$ (L1) と $(A\supset(B\supset A)\supset A)\supset(A\supset B\supset A)\supset A\supset A$ (L2) から $(A\supset B\supset A)\supset A\supset A$，これと $A\supset B\supset A$ (L1) から $A\supset A$.

(2)　$B\supset C$ と $(B\supset C)\supset A\supset B\supset C$ (L1) から $A\supset B\supset C$. これと $(A\supset B\supset C)\supset(A\supset B)\supset A\supset C$ (L 2) から $(A\supset B)\supset A\supset C$. 従って $A\supset B$ から $A\supset C$.

(3)　$(A\supset B\supset C)\supset(A\supset B)\supset A\supset C$ (L2) と仮定から $(A\supset B)\supset A\supset C$. これと $B\supset A\supset B$ (L1) に (2) をもちいて $B\supset A\supset C$.

(4)　$(B\supset C)\supset A\supset B\supset C$ (L1), $(A\supset B\supset C)\supset(A\supset B)\supset A\supset C$ (L2) から，(2) による.

(5)　仮定と $(A\supset B\supset C)\supset(A\supset B)\supset A\supset C$ から $(A\supset B)\supset A\supset C$，これと $B\supset A\supset B$ (L1) から (2) によって $B\supset A\supset C$.

(6) $(B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C$ (4) から, (5) による.

(7) $(A \supset B) \supset (A \supset B)$ (1) に (5) をもちいる.

(8) $(A \supset (A \supset B) \supset B) \supset (A \supset A \supset B) \supset A \supset B$ (L2) と (7) による.

(9) $\neg\neg A \supset \neg A \supset \neg\neg A$ (L1), $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset (\neg A \supset \neg A) \supset A$ (L3) から (2) によって $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg A) \supset A$, (5) によって $(\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A \supset A$, これと $\neg A \supset \neg A$ (1) から $\neg\neg A \supset A$.

(10) $B \supset A \supset B$ (L1), $(B \supset \neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset B) \supset A) \supset B \supset A$ (6) から $((\neg A \supset B) \supset A) \supset B \supset A$, これと $(\neg A \supset \neg B) \supset (\neg A \supset B) \supset A$ (L3) から (2) による.

(11) $\neg\neg\neg A \supset \neg A$ (9), $(\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset A \supset \neg\neg A$ (10) から.

(12) $(\neg\neg A \supset A) \supset (A \supset \neg B) \supset \neg\neg A \supset \neg B$ (6) と (9) から $(A \supset \neg B) \supset \neg\neg A \supset \neg B$, これと $(\neg\neg A \supset \neg B) \supset B \supset \neg A$ (10) から, (2) による.

(13) $(B \supset \neg\neg B) \supset (\neg A \supset B) \supset \neg A \supset \neg\neg B$ (4) と $B \supset \neg\neg B$ (11) から $(\neg A \supset B) \supset \neg A \supset \neg\neg B$. これと $(\neg A \supset \neg\neg B) \supset \neg B \supset A$ (10) から, (2) による.

(14) 同様に.

(15) $A \supset (A \supset \neg B) \supset \neg B$ (7), $((A \supset \neg B) \supset \neg B) \supset B \supset \neg (A \supset \neg B)$ (12) から (2) による.

(16) $\neg A \supset \neg B \supset \neg A$ (L1), $(\neg B \supset \neg A) \supset A \supset B$ (10) から, (2) による.

(17) $\neg A \supset A \supset \neg B$ (16), $(\neg A \supset A \supset \neg B) \supset \neg (A \supset \neg B) \supset A$ (13) から.

(18) $\neg B \supset A \supset \neg B$ (L1), $(\neg B \supset A \supset \neg B) \supset \neg (A \supset \neg B) \supset B$ (13) から.

(19) (17), (18) に推論規則 ($\wedge$) をもちいる.

(20) $(\neg (A \supset \neg B) \supset A \wedge B) \supset (B \supset \neg (A \supset \neg B)) \supset B \supset A \wedge B$ (4) と (19) から $(B \supset \neg (A \supset \neg B)) \supset B \supset A \wedge B$. これと $A \supset B \supset \neg (A \supset \neg B)$

(15) から (2) によって $A \supset B \supset A \wedge B$.

(21) $A \supset B \supset A \wedge B$ (7) と $(A \supset \neg B) \supset \neg B) \supset B \supset \neg(A \supset \neg B)$ (12) から (2) によって $A \supset B \supset \neg(A \supset \neg B)$. これと $A \wedge B \supset A$ (L6) から (2) によって $A \wedge B \supset B \supset \neg(A \supset \neg B)$, (5) によって $B \supset A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)$, これと $A \wedge B \supset B$ (L6) から (2) によって $A \wedge B \supset A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)$. これと $(A \wedge B \supset A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)) \supset A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)$ (8) から $A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)$.

(22) $(A \supset B) \wedge A \supset A \supset B$ (L4), $(A \supset B) \wedge A \supset A$ (L4), $((A \supset B) \wedge A \supset A \supset B) \supset ((A \supset B) \wedge A \supset A) \supset (A \supset B) \wedge A \supset B$ (L2) による.

(23) (16) から (2) によって $A \supset \neg A \supset B$, また $B \supset \neg A \supset B$ (L1), 推論規則 (∧) をもちいて得られる.

(24) $\neg A \cup (\neg A \supset B) \supset B$ (7), $((\neg A \supset B) \supset B) \supset \neg B \supset \neg(\neg A \supset B)$ (14) から (2) によって $\neg A \supset \neg B \supset \neg(\neg A \supset B)$. また L7 に (14) をもちいて $\neg(A \vee B) \supset \neg A$, $\neg(A \vee B) \supset \neg B$. (2), (5), (2) をもちいて $\neg(A \vee B) \supset \neg(A \vee B) \supset \neg(\neg A \supset B)$. さらに (8), (10) をもちいる.

(25) $\neg A \supset A \supset B$ (16), $(\neg A \supset A \supset B) \supset \neg(A \supset B) \supset A$ (13).

(26) $B \supset A \supset B$ (L1), $(B \supset A \supset B) \supset \neg(A \supset B) \supset \neg B$ (14).

(27) $\neg A \supset \neg A \vee B$ (L7), $\neg A \supset \neg A \vee B) \supset \neg(\neg A \vee B) \supset \neg B$ (13) から

$$\neg(\neg A \vee B) \supset A, \qquad \text{(a)}$$

また $B \supset \neg A \vee B$ (L7), $(B \supset \neg A \vee B) \supset \neg(\neg A \vee B) \supset \neg B$ (14) から

$$\neg(\neg A \vee B) \supset \neg B. \qquad \text{(b)}$$

$A \supset (A \supset B) \supset B$ (7), $((A \supset B) \supset B) \supset \neg B \supset \neg(A \cup B)$ (14) から (2) によって $A \supset \neg B \supset \neg(A \supset B)$.

これに (a)，(2)，(5)，(b)，(2) をもちいて $\neg(\neg A \vee B) \supset \neg(A \supset B)$. これに (10) をもちいる．

(28) $A \wedge B \supset A$ (L6) と仮定から (2) により $A \wedge B \supset B \supset C$, (5) によって $B \supset A \wedge B \supset C$, これと $A \wedge B \supset B$ (L6) から (2) によって $A \wedge B \supset A \wedge B \supset C$. また $(A \wedge B \supset A \wedge B \supset C) \supset A \wedge B \supset C$ (8), $\therefore A \wedge B \supset C$.

(29) $(A \wedge B \supset C) \supset (B \supset A \wedge B) \supset B \supset C$ (4) と仮定から $(B \supset A \wedge B) \supset B \supset C$. これと $A \supset B \supset C$ (20) から (2) によって $A \supset B \supset C$.

(30) $\neg A \supset A \supset B$ (16) に (28) をもちいる．

(31) (L4) と推論規則 (∧) をもちいる．

(32) (L5) と推論規則 (∨) をもちいる．

(33) 各 $X(\in \Xi)$ に対して $\wedge(\Xi, \Pi) \supset X$ (L4), これに推論規則 (∧) をもちいる．

(34) $\wedge(\Xi, \Pi) \supset \wedge \Xi \wedge \wedge \Pi$ は (33) に推論規則 (∧) をもちいて得られる．逆に $\wedge \Xi \wedge \wedge \Pi \supset \wedge(\Xi, \Pi)$ は (L4) に (2) と推論規則 (∧) とをもちいて得られる．

(35) (34) と同様に $\wedge(A, \Xi) \supset A \wedge \wedge \Xi$. 逆に，各 $X(\in \Xi)$ に対して，$A \wedge \wedge \Xi \supset \wedge \Xi$ (L4) と $\wedge \Xi \supset X$ (L4) から (2) によって $A \wedge \wedge \Xi \supset X$. これと $A \wedge \wedge \Xi \supset A$ (L4) に推論規則 (∧) をもちいる．

(36) 各 $X(\in \Xi)$ に対して $X \supset \vee(\Xi, \Pi)$ (L5), これに推論規則 (∨) をもちいる．

(37) $\vee \Xi \vee \vee \Pi \supset \vee(\Xi, \Pi)$ は (36) に推論規則 (∨) をもちいて得られる．逆に $\vee(\Xi, \Pi) \supset \vee \Xi \vee \vee \Pi$ は (L5) に (2) と推論規則 (∨) とをもちいて得られる．

(38) (37) と同様に $A \vee \vee \Xi \supset \vee(A, \Xi)$. 逆に，各 $X(\in \Xi)$ に対して，$X \supset \vee \Xi$ (L5) と $\vee \Xi \supset A \vee \vee \Xi$ (L5) から (2) によって $X \supset A \vee \vee \Xi$. これと $A \supset A \vee \vee \Xi$ (L5) に推論規則 (∧) をもちいる．

(39)　$A \wedge \wedge \Xi \supset \wedge(A, \Xi)$ (35) と仮定から (2) によって $A \wedge \wedge \Xi \supset B$, ゆえに (29) によって $A \supset \wedge \Xi \supset B$.

(40)　仮定から (28) によって $A \wedge \wedge \Xi \supset B$. これと $\wedge(A, \Xi) \supset A \wedge \wedge \Xi$ (35) から (2) によって $\wedge(A, \Xi) \supset B$.

(41)　各 $X(\in \Xi)$ に対して $\wedge \Xi \supset X$ (L 4) ゆえに (14) によって $\neg X \supset \neg \wedge \Xi$. これに推論規則 (∨) をもちいて $\vee \neg \Xi \supset \neg \wedge \Xi$. 逆に各, $X(\in \Xi)$ に対して $\neg X \supset \vee \neg \Xi$ (L 5), ゆえに (13) によって $\neg \vee \neg \Xi \supset X$ 推論規則 (∧) をもちいて $\neg \vee \neg \Xi \supset \wedge \Xi$ ゆえに (13) によって $\neg \wedge \Xi \supset \vee \neg \Xi$.

(42)　各 $X(\in \Xi)$ に対して $X \supset \vee \Xi$ (L 5), ゆえに (14) によって $\neg \vee \Xi \supset \neg X$. 推論規則 (∧) をもちいて $\neg \vee \Xi \supset \wedge \neg \Xi$. 逆に, 各 $X(\in \Xi)$ に対して $\wedge \neg \Xi \supset \neg X$ (L 4), ゆえに (12) によって $X \supset \neg \wedge \neg \Xi$. 推論規則 (∨) をもちいて $\vee \Xi \supset \neg \wedge \neg \Xi$. これからふたたび (12) によって $\wedge \neg \Xi \supset \neg \vee \Xi$.

(43)　$\vee(\Xi, B) \supset \vee \Xi \vee B$ (38) と $\vee \Xi \vee B \supset \neg \vee \Xi \supset B$ (23) に (2) を二回もちいて仮定から $A \supset \neg \vee \Xi \supset B$, ゆえに (5) によって $\neg \vee \Xi \supset A \supset B$. これと $\wedge \neg \Xi \supset \neg \vee \Xi$ (42) から (2) によって $\wedge \neg \Xi \supset A \supset B$, ゆえに (5) によって $A \supset \wedge \neg \Xi \supset B$, 従って (40) によって $\wedge(A, \neg \Xi) \supset B$.

(44)　仮定から (39) によって $A \supset \wedge \neg \Xi \supset B$, ゆえに (5) によって $\wedge \neg \Xi \supset A \supset B$. これと $\neg \vee \Xi \supset \wedge \neg \Xi$ (42) から (2) によって $\neg \vee \Xi \supset A \supset B$, ゆえに (5) によって $A \cup \neg \vee \Xi \supset B$, これと $(\neg \vee \Xi \supset B) \supset \vee \Xi \vee B$ (24) から (2) によって $A \supset \vee \Xi \vee B$, さらに, これと $\vee \Xi \vee B \supset \vee(\Xi, B)$ (38) から (2) をもちいて $A \supset \vee(\Xi, B)$ を得る.

(45)　(43) と同様に.

(46)　(44) と同様に.

(47)　$\wedge(\Xi,\Pi)\supset\wedge\Xi\wedge\wedge\Pi$ (34) と　$\wedge\Xi\wedge\wedge\Pi\supset\wedge(\wedge\Xi,\Pi)$ (35) から (2) によって $\wedge(\Xi,\Pi)\supset\wedge(\wedge\Xi,\Pi)$. また，仮定から (40) によって $\wedge(\wedge\Xi,\Pi)\supset A$ これと前の式とから (2) によって $\wedge(\Xi,\Pi)\supset A$.

(48)　$\vee(\Xi,\vee\Pi)\supset\vee\Xi\vee\vee\Pi$ (38) と $\vee\Xi\vee\vee\Pi\supset\vee(\Xi,\Pi)$ (37) から (2) による. □

定理 2 [演繹定理, KN96 Theorem 2. 1]. $A,\Gamma\vdash B$ であって A に含まれるどの自由変数も演繹図の中で eigenvariable として使われてないならば $\Gamma\vdash A\supset B$ である. とくに A が閉じた論理式であって $A,\Gamma\vdash B$ ならば $\Gamma\vdash A\supset B$ である. □

なお，この定理は GL_0 においてもなりたつ.

証明　古典述語論理の場合と同様に，A，Γ から B への演繹図を一つ固定して，その中のおのおのの論理式 X を $A\supset X$ の置き換えて得られる木構造を考え，その各部分に対してつぎの変形を施すことによって演繹図を作る.

始式の場合. 公理であっても Γ に属する論理式でもそれを X として

$$\frac{X \quad \overset{\mathrm{L1}}{X\supset(A\supset X)}}{A\supset X}\,(\mathrm{MP})$$

とする.

推論 (MP) の場合.

$$\frac{A\supset Y \qquad \dfrac{A\supset Y\supset Z \quad \overset{\mathrm{L2}}{(A\supset Y\supset Z)\supset(A\supset Y)\supset A\supset Z}}{(A\supset Y)\supset A\supset Z}\,(\mathrm{MP})}{A\supset Z}\,(\mathrm{MP})$$

とする.

推論 (∧) の場合. (28), (29) をもちいて

$$\begin{array}{c} \dfrac{\left\{\begin{array}{c|c} A\supset X\supset Y & \\ \vdots & X\in\Xi \\ A\wedge Y\supset X & \end{array}\right\}}{A\wedge Y\supset\wedge\Xi}\,(\wedge) \\ \vdots \\ A\supset Y\supset\wedge\Xi \end{array}$$

とする.

推論（∨）の場合.（3）をもちいて

$$\begin{array}{c} \dfrac{\left\{\begin{array}{c|c} A\supset X\supset Y & \\ \vdots & X\in\Xi \\ X\supset A\supset Y & \end{array}\right\}}{\vee\Xi\supset A\supset Y}\,(\vee) \\ \vdots \\ A\supset\vee\Xi\supset Y \end{array}$$

とする.

推論（∀）の場合.（28),（29）をもちいて

$$\begin{array}{c} A\supset Y\supset Z(a) \\ \vdots \\ \dfrac{A\wedge Y\supset Z(a)}{A\wedge Y\supset\forall xZ(x)}\,(\forall) \\ \vdots \\ A\supset Y\supset\forall xZ(x) \end{array}$$

とする.

推論（∃）の場合.（3）をもちいて

$$\begin{array}{c} A\supset Y(a)\supset Z \\ \vdots \\ \dfrac{Y(a)\supset A\supset Z}{\exists xY(x)\supset A\supset Z}\,(\exists) \\ \vdots \\ A\supset\exists xY(x)\supset Z \end{array}$$

とする. □

系 3　Γ が空でなくて $\Gamma\vdash A$ ならば $\vdash\wedge\Gamma\supset A$. □

つぎの定理は［KN 96 Proposition 3. 3 (1)］の特別の場合であり，様相論理における necessitation rule に相当する．

定理 4 $\vdash A$ ならば $\vdash K_i A$. □

証明 閉じた論理式 D_0 を一つ固定し，$D_0 \supset D_0$ を $\top$ と略記すると，(1) によって $\vdash \top$ である．

$$\frac{A \quad \overset{\text{L1}}{A \supset \top \supset A}}{\top \supset A}\,(\text{MP}) \text{ を } \frac{A}{\top \supset A}\,(\top\text{I}) \text{ と，}$$

また

$$\frac{\overset{\vdots}{\top} \quad \top \supset A}{A}\,(\text{MP}) \text{ を } \frac{\top \supset A}{A}\,(\top\text{E}) \text{ と，}$$

それぞれ略記する．さらに，

$$\frac{\wedge K_i \Xi \quad \overset{\wedge \text{B}_i}{\wedge K_i \Xi \supset K_i(\wedge \Xi)}}{K_i(\wedge \Xi)}\,(\text{MP}) \text{ を } \frac{\wedge K_i \Xi}{K_i(\wedge \Xi)}\,(\wedge\text{B}) \text{と}$$

略記し，他の公理についても同様な略記法をもちいる．

A の証明図を一つ固定し，その中のおのおのの論理式 X を $K_i X$ に置き換えて得られる木構造を考え，その部分に対してつぎの変形を施すことによって証明図を作る．

公理の場合．X が公理ならば $K_i X$ もまた公理であるか，あるいは $K_i X$ が X と公理 PI_i から (MP) をもちいて導かれる．

推論 (MP) の場合．

$$\frac{K_i A \qquad \dfrac{K_i(A \supset B) \quad \overset{\text{KMP}_i}{K_i(A \supset B) \supset K_i A \supset K_i B}}{K_i A \supset K_i B}\,(\text{MP})}{K_i B}\,(\text{MP})$$

推論 ($\forall$) の場合．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{K_\iota(B\supset A(a))}{\top\supset K_\iota(B\supset A(a))}\,(\top\mathrm{E})}{\top\supset\forall xK_\iota(B\supset A(x))}\,(\forall)}{\forall xK_\iota(B\supset A(x))}\,(\top\mathrm{I})}{K_\iota\forall x(B\supset A(x))}\,(\forall\mathrm{B})}{K_\iota(B\supset\forall xA(x))}\,(\mathrm{K}\forall_\iota)$$

推論（∃）の場合.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{K_\iota(A(a)\supset B)}{\top\supset K_\iota(A(a)\supset B)}\,(\top\mathrm{E})}{\top\supset\forall xK_\iota(A(x)\supset B)}\,(\forall)}{\forall xK_\iota(A(x)\supset B)}\,(\top\mathrm{I})}{K_\iota\forall x(A(x)\supset B)}\,(\forall\mathrm{B})}{K_\iota(\exists xA(x)\supset B)}\,(\mathrm{K}\exists_i)$$

推論（∧）の場合.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\left\{\dfrac{K_\iota(A\supset X)}{\top\supset K_\iota(A\supset X)}\,(\top\mathrm{I})\,\middle|\,X\in\Xi\right\}}{\top\supset\wedge K_\iota\{A\supset X\mid X\in\Xi\}}\,(\wedge)}{\wedge K_\iota\{A\supset X\mid X\in\Xi\}}\,(\top\mathrm{E})}{K_\iota(\wedge\{A\supset X\mid X\in\Xi\})}\,(\wedge\mathrm{B})}{K_\iota(A\supset\wedge\Xi)}\,(\mathrm{K}\wedge_\iota)$$

推論（∨）の場合.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\left\{\dfrac{K_\iota(X\supset A)}{\top\supset K_\iota(X\supset A)}\,(\top\mathrm{I})\,\middle|\,X\in\Xi\right\}}{\top\supset\wedge K_\iota\{X\supset A\mid X\in\Xi\}}\,(\wedge)}{\wedge K_\iota\{X\supset A\mid X\in\Xi\}}\,(\top\mathrm{E})}{K_\iota(\wedge(X\supset A\mid X\in\Xi\}}\,(\wedge\mathrm{B})}{K_\iota(\vee\Xi\supset A)}\,(\mathrm{K}\vee_i)$$

□

つぎにゲーム論理 GL_ω を古典述語論理における Gentzen の LK と同様な sequent calculus の体系として形式化し，Russell-Hilbert 流の体系との同値性を示す.

Γ, Θ を論理式の有限集合として，$\Gamma\longrightarrow\Theta$ の形の表現を sequent とい

う．$\Gamma \cup \Theta$ に属する論理式をこの sequent の要素という．Γ をこの sequent の左辺，Θ を右辺という．（有限の）古典論理との類推のために，また見やすくするために，和集合 $\Gamma \cup \Delta$ を Γ, Δ と書き，$\{A\} \cup \Gamma$ を A，Γ と書く，などの約束を設ける．

以下の図式において a は自由変数，x は束縛変数，t は項，$A(a)$ は x を含まない論理式，$i=1,\ldots,n$ とする．また Γ，Δ，Θ，Λ は論理式の有限集合，Ξ は $\wedge$，$\vee$ の適用の許される集合とする．

Initial sequent の図式：

$$A \longrightarrow A$$

推論規則：

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Theta}{\Delta, \Gamma \longrightarrow \Theta, \Lambda}\,(\mathrm{th})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A \quad A, \Delta \longrightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \longrightarrow \Theta, \Lambda}\,(\mathrm{cut})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \longrightarrow \Theta}\,(\neg\rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \longrightarrow \Theta}{\Gamma \longrightarrow \Theta, \neg A}\,(\rightarrow\neg)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A \quad B, \Gamma \longrightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma \longrightarrow \Theta}\,(\supset\rightarrow)$$

$$\frac{A, \Gamma \longrightarrow \Theta, B}{\Gamma \longrightarrow \Theta, A \supset B}\,(\rightarrow\supset)$$

$$\frac{A, \Gamma \longrightarrow \Theta}{\wedge \Xi, \Gamma \longrightarrow \Theta}\,(\wedge\rightarrow) \qquad \frac{\{\Gamma \longrightarrow \Theta, A \mid A \in \Xi\}}{\Gamma \longrightarrow \Theta, \wedge \Xi}\,(\rightarrow\wedge)$$

$$\frac{\{A, \Gamma \longrightarrow \Theta \mid A \in \Xi\}}{\vee \Xi, \Gamma \longrightarrow \Theta}\,(\vee\rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A}{\Gamma \longrightarrow \Theta, \vee \Xi}\,(\rightarrow\vee)$$

$$\frac{A(t), \Gamma \longrightarrow \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \longrightarrow \Theta}\,(\forall\rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A(a)}{\Gamma \longrightarrow \Theta, \forall x A(x)}\,(\rightarrow\forall)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \longrightarrow \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \longrightarrow \Theta}\,(\exists\rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A(t)}{\Gamma \longrightarrow \Theta, \exists x A(x)}\,(\rightarrow\exists)$$

$$\frac{\Gamma, K_i\Delta \longrightarrow \Theta}{K_i\Gamma, K_i\Delta \longrightarrow K_i\Theta}\ (\mathrm{K}\to\mathrm{K})$$

ただし Θ はたかだか一個の論理式を含むとする．

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, \wedge K_i\Xi \quad K_i(\wedge\Xi), \Gamma \longrightarrow \Theta}{\Gamma \longrightarrow \Theta}\ (\wedge \mathrm{B})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, K_iA(a) \quad K_i\forall xA(x), \Gamma \longrightarrow \Theta}{\Gamma \longrightarrow \Theta}\ (\forall \mathrm{B})$$

変数条件．推論規則（→∀），（∃→），（∀B）において自由変数 a は Γ，Θ にも $A(x)$ にも含まれないとする．自由変数 a をその推論の eigenvariable とよぶ．

Sequent $\Gamma\longrightarrow\Theta$ の証明図（proof figure）は sequent からなる木構造でつぎの条件をみたすものと定義する：

(1)　ある自然数 k に対して，すべての sequent のすべての要素が $\mathcal{P}_k$ に属している．

(2)　枝（branch）の長さはすべて有限である．

(3)　根（root）は $\Gamma\longrightarrow\Theta$ である．

(4)　葉（leaf）はいずれも initial sequent である．

(5)　葉以外の各節（node）の sequent とその上に隣り合っている sequent 全体との関係は，推論規則に該当する推論である．

$\Gamma\longrightarrow\Theta$ の証明図のあるとき $\Gamma\longrightarrow\Theta$ は証明可能であるといい，$\vdash\Gamma\longrightarrow\Theta$ と書く．

なお，推論規則（th）は LK の場合の thinning（t→），（→t）に相当するものである．また，われわれの体系では sequent の左辺，右辺を論理式の列ではなく論理式の集合と見ているので，LK における構造に関する推論規則のうち interchange, contraction にあたるものは不要である．

Barcan rule を initial sequent の図式

$$\wedge K_i \Xi \longrightarrow K_i(\wedge \Xi)$$

$$\forall x\, K_i A(x) \longrightarrow K_i \forall x A(x)$$

の形でなく上掲の推論規則の形で導入したのは，cut 除去定理を考える上で扱いやすくするためである．Initial sequent としての Barcan rule を採用した場合には証明図から cut の除去できない部分が残るが，推論規則として入れれば証明図から cut をすべて除去することができる．もっとも，cut が除去されても subformula property がみたされるわけではない．

定理 5 [KN 97 Lemma 2. 2 (1)]．A が Russell-Hilbert 流の体系で証明可能ならば sequent calculus の体系で$\longrightarrow A$ が証明可能である．□

証明　まず，GL_ω のおのおのの公理に対して$\vdash\longrightarrow A$ であることは容易に確かめられる．つぎに，記述を簡単にするために sequent calculus の体系に推論規則

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A \supset B}{A, \Gamma \longrightarrow \Theta, B}\ (\supset \mathrm{E})$$

を追加する．これが許される推論であることは

$$\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Theta, A \supset B \qquad \dfrac{A \longrightarrow A \quad B \longrightarrow B}{A \supset B, A \longrightarrow B}\,(\supset\rightarrow)}{A, \Gamma \longrightarrow \Theta, B}\,(\mathrm{cut})$$

からわかる．これをもちいて Russell-Hilbert 流の体系の推論のおのおのが sequent calculus の体系で許されることを示せばよい．推論規則（$\supset$E）を追加した sequent calculus の体系でそれぞれつぎのようにしてできる．

推論（MP）の場合．

$$\dfrac{\longrightarrow A \supset B \qquad \dfrac{\longrightarrow A \quad B \longrightarrow B}{A \supset B \longrightarrow B}\,(\supset\rightarrow)}{\longrightarrow B}\,(\mathrm{cut})$$

推論（∧）の場合.

$$\dfrac{\dfrac{\left\{\dfrac{\longrightarrow A \supset X}{A \longrightarrow X}\,(\supset\mathrm{E}) \,\middle|\, X \in \Xi\right\}}{A \longrightarrow \wedge\Xi}\,(\rightarrow\wedge)}{\longrightarrow A \supset \wedge\Xi}\,(\rightarrow\supset)$$

推論（∨）の場合.

$$\dfrac{\dfrac{\left\{\dfrac{\longrightarrow X \supset A}{X \longrightarrow A}\,(\supset\mathrm{E}) \,\middle|\, X \in \Xi\right\}}{\vee\Xi \longrightarrow A}\,(\vee\rightarrow)}{\longrightarrow \wedge\Xi \supset A}\,(\rightarrow\supset)$$

推論（∀）の場合.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\longrightarrow A \supset B(a)}{A \longrightarrow B(a)}\,(\supset\mathrm{E})}{A \longrightarrow \forall x B(x)}\,(\rightarrow\forall)}{\longrightarrow A \supset \forall x B(x)}\,(\rightarrow\supset)$$

推論（∃）の場合.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\longrightarrow A \supset B(a)}{A(a) \longrightarrow B}\,(\supset\mathrm{E})}{\exists x A(x) \longrightarrow B}\,(\exists\rightarrow)}{\longrightarrow \exists x A(x) \supset B}\,(\rightarrow\supset)$$

□

上の定理からただちに［KN 97 Theorem 2. 1］のうちの “if” の部分が導かれる：

系 6 A が Γ から Russell-Hilbert 流の体系で演繹可能ならば sequent calculus の体系で $\longrightarrow \wedge\Gamma \cap \mathrm{A}$ が証明可能である．□

つぎの定理は［KN 97 Theorem 2. 1］のうちの “only if” の部分の特別の場合である．

定理 7 Sequent calculus の体系で$\longrightarrow A$ が証明可能ならば A が Russell-Hilbert 流の体系で証明可能である．□

証明 Sequent calculus の体系をこれと同値な体系に変えることを何段階か繰り返して証明する．Sequent calculus の体系に対して，まず initial sequent の図式としてつぎのものを追加する．

$$\neg A, A \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A, \neg A$$

$$A \supset B, A \longrightarrow B$$

$$\wedge \Xi \longrightarrow A \quad (A \in \Xi)$$

$$A \longrightarrow \vee \Xi \quad (A \in \Xi)$$

$$\forall x A(x) \longrightarrow A(t)$$

$$A(t) \longrightarrow \exists x A(x)$$

$$\wedge K_i \Xi \longrightarrow K_i(\wedge \Xi)$$

$$\forall x K_i A(x) \longrightarrow K_i \forall x A(x)$$

$$K_i A \longrightarrow K_i K_i A$$

$$K_i(A \wedge \neg A) \longrightarrow$$

そして推論規則（$\neg\rightarrow$），（$\rightarrow\neg$），（$\supset\rightarrow$），（$\wedge\rightarrow$），（$\rightarrow\vee$），（$\forall\rightarrow$），（$\rightarrow\exists$），（$\wedge$B），（$\forall$B）を取り除き，さらに推論規則（K→K）を

$$\frac{\Gamma \longrightarrow A}{K_i \Gamma \longrightarrow K_i A}\ (\mathrm{K})$$

の形に制限する．従って，推論規則は（th），（cut），（$\rightarrow\supset$），（$\rightarrow\forall$），（$\exists\rightarrow$），（K）だけになる．こうして得られた体系がもとの体系と同値であることについては，推論規則（K→K）に関することだけ説明すれば足りるであろう．ふたたび閉じた論理式 D_0 を一つ固定し，$D_0 \supset D_0$ を$\top$と略記し，$D_0 \wedge \neg D_0$ を$\perp$と略記する．

まず（K→K）を右辺が空の場合，

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow}{\Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow D_0}\,(\mathrm{th}) \qquad \dfrac{\Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow}{\Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow \neg D_0}\,(\mathrm{th})}{\Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow \bot}\,(\rightarrow\wedge)}{K_\iota \Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow K_\iota \bot}\,(\mathrm{K}\rightarrow\mathrm{K})
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{K_\iota \Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow K_\iota \bot \quad K_\iota \bot \longrightarrow}{K_\iota \Gamma, K_\iota \varDelta \longrightarrow}\,(\mathrm{cut})
$$

によって（K→K）の右辺が空でない場合に還元できる．つぎに（K→K）で右辺が空でない場合は

$$
\dfrac{K_\iota B \longrightarrow K_i K_\iota B \qquad \dfrac{\Gamma, K_\iota B, K_\iota \varDelta \longrightarrow A}{K_\iota \Gamma, K_\iota K_\iota B, K_\iota K_\iota \varDelta \longrightarrow K_i A}\,(\mathrm{K})}{K_\iota \Gamma, K_\iota B, K_\iota K_i \varDelta \longrightarrow K_\iota A}\,(\mathrm{cut})
$$

の形の変形を何回か繰り返して推論規則（K）に還元できる．

つぎの段階では initial seqent の図式につぎのものを追加する：

$$
\begin{gathered}
A \longrightarrow \top \\
\bot \longrightarrow A \\
\neg A, A \longrightarrow \bot \\
\top \longrightarrow A, \neg A \\
\top \longrightarrow K_\iota \top \\
K_\iota(A \wedge \neg A) \longrightarrow \bot
\end{gathered}
$$

これらは証明可能であるから，つけ加えた体系はもとの体系と同値である．

つぎに，sequent の左辺，右辺がそれぞれ空であるか否かで場合をわけるわずらわしさを避けるために，つぎの操作を施す．以上の通り修正してきた sequent calculus の体系における証明図を一つ固定して，その中の各 sequent $\Gamma \longrightarrow \Theta$ を

$$
\Gamma, \top \longrightarrow \bot, \Theta
$$

に置き換える．置き換えて得られたものを証明図に直すためにつぎの変形

を行う．まず，initial sequent については

$$\dfrac{\neg A, A \longrightarrow \bot}{\neg A, A, \top \longrightarrow \bot}\,(\mathrm{th})$$

$$\dfrac{\top \longrightarrow A, \neg A}{\top \longrightarrow \bot, A, \neg A}\,(\mathrm{th})$$

$$\dfrac{K_t(A \wedge \neg A) \longrightarrow \bot}{K_t(A \wedge \neg A), \top \longrightarrow \bot}\,(\mathrm{th})$$

とする．そのほかの initial sequent に対しては，例えば

$$\dfrac{\forall x A(x) \longrightarrow A(t)}{\forall x A(x), \top \longrightarrow \bot, A(t)}\,(\mathrm{th})$$

などとする．つぎに，推論に関しては（K）以外の推論は同じ名前の推論の置き変わるので問題ない．推論（K）についてはつぎのようにする：

$$\dfrac{\dfrac{\top \longrightarrow K_t\top}{\top \longrightarrow \bot, K_t\top}\,(\mathrm{th}) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \top \longrightarrow \bot, A \quad \bot \longrightarrow A}{\Gamma, \top \longrightarrow A}\,(\mathrm{cut})}{K_t\Gamma, K_t\top \longrightarrow K_tA}\,(\mathrm{K})}{K_t\Gamma, \top \longrightarrow \bot, K_tA}\,(\mathrm{cut})$$

さて，以上の操作で得られた証明図には，つぎの性質がある：どの sequent も左辺，右辺ともに空でない．しかも，推論（$\rightarrow\supset$），（$\rightarrow\forall$）の lower sequent の右辺には主式（principal formula）以外の論理式があり，（$\exists\rightarrow$）の lower sequent の左辺には主式以外の論理式がある．

この証明図の中の各 sequent $\Gamma \longrightarrow \Theta$ に論理式 $\wedge\Gamma \supset \vee\Theta$ を対応させ，対応したおのおのの論理式が Russell-Hilbert 流の体系において証明可能であることを示す．

Initial sequent に対応する論理式は例えば

$$\wedge\{\forall x A(x)\} \supset \vee\{A(t)\}$$

などの形になるが，(31) と (32) によって

$$\forall x A(x) \supset A(t)$$

と同値である．各 initial sequent について同様に考えると，それぞれつ

ぎの形の論理式と同値であることがわかる．これらのうち（i），（ii），（iii）以外はそれぞれ右に記した番号の公理または補題に該当する．

$$(A \supset B) \wedge A \supset B \qquad (22)$$

$$\wedge \Xi \supset A \qquad (A \in \Xi) \qquad (\mathrm{L4})$$

$$A \supset \vee \Xi \qquad (A \in \Xi) \qquad (\mathrm{L5})$$

$$\forall x A(x) \supset A(t) \qquad (\mathrm{L6})$$

$$A(t) \supset \exists x A(x) \qquad (\mathrm{L7})$$

$$\wedge K_i \Xi \supset K_i(\wedge \Xi) \qquad (\wedge \mathrm{B}_i)$$

$$\forall x K_i A(x) \supset K_i \forall x A(x) \qquad (\forall \mathrm{B}_i)$$

$$K_i A \supset K_i K_i A \qquad (\mathrm{PI}_i)$$

$$A \supset \top \qquad (\mathrm{i})$$

$$\bot \supset A \qquad (30)$$

$$\neg A \wedge A \supset \bot \qquad (30)$$

$$\top \supset A \vee \neg A \qquad (27)$$

$$\top \supset K_i \top \qquad (\mathrm{ii})$$

$$K_i(A \wedge \neg A) \supset \bot \qquad (\mathrm{iii})$$

（i）は（L1）と（1）から得られる．

（ii）は$\vdash \top$（1）に定理4をもちいて$\vdash K_i \top$，従って（L1）と（1）をもちいて得られる．

（iii）は$\mathrm{K}\bot_i$から（16）をもちいて得られる．

つぎに各推論に対応する関係を考える．なお，ここでΓ，Δ，Θ，Λがいずれも空でないことに注意．

（th）の場合．$\wedge \Gamma \supset \vee \Theta$とする．これと$\wedge(\Gamma, \Delta) \supset \wedge \Gamma$（33），$\vee \Theta \supset \vee(\Theta, A)$（36）に（2）を二回もちいて$\wedge(\Gamma, \Delta) \supset \vee(\Theta, \Lambda)$を得る．

（cut）の場合．$\wedge \Gamma \supset \vee(\Theta, A)$，$\wedge(A, \Delta) \supset \vee \Lambda$とする．第一の仮定から（45）によって$\wedge(\Gamma, \neg\Theta) \supset A$，また第二の仮定から（39）によって$A \supset \wedge$

$\varDelta\supset\vee\varLambda$. この二つから (2) によって $\wedge(\varGamma,\neg\varTheta)\supset\wedge\varDelta\supset\vee\varLambda$ を得る. ゆえに (47) によって $\wedge(\varGamma,\neg\varTheta,\varDelta)\supset\vee\varLambda$ ゆえに (46) によって $\wedge(\varGamma,\varDelta)\supset\vee(\varTheta,\vee\varLambda)$. これに (48) と (2) とをもちいて $\wedge(\varGamma,\varDelta)\supset\vee(\varTheta,\varLambda)$ を得る.
$(\to\supset)$ の場合. $\wedge(A,\varGamma)\supset\vee(\varTheta,B)$ とする. (45) によって $\wedge(A,\varGamma,\neg\varTheta)\supset B$, (39) によって $A\supset\wedge(\varGamma,\neg\varTheta)\supset B$, (3) によって $\wedge(\varGamma,\neg\varTheta)A\supset B$, (46) によって $\wedge\varGamma\supset\vee(\varTheta,A\supset B)$.
$(\to\forall)$ の場合. $\wedge\varGamma\supset\vee(\varTheta,A(a))$ とする. (43) によって $\wedge(\wedge\varGamma,\neg\varTheta)\supset A(a)$, 推論規則 $(\forall)$ によって $\wedge(\wedge\varGamma,\neg\varTheta)\supset\forall xA(x)$, (44) によって $\wedge\varGamma\supset\vee(\varTheta,\forall xA(x))$.
$(\exists\to)$ の場合. $\wedge(A(a),\varGamma)\supset\vee\varTheta$ とする. (39) によって $A(a)\supset\wedge\varGamma\supset\vee\varTheta$, 推論規則 $(\exists)$ によって $\exists xA(x)\supset\wedge\varGamma\supset\vee\varTheta$, (40) によって $\wedge(\exists xA(x),\varGamma)\supset\vee\varTheta$.
(K) の場合. $\wedge\varGamma\supset A$ とする. 定理4によって $K_t(\wedge\varGamma\supset A)$. ゆえに $K_t(\wedge\varGamma\supset A)\supset K_t\wedge\varGamma\supset K_tA$ (KMP_t) から $K_t(\wedge\varGamma)\supset K_tA$. これと $\wedge(K_t\varGamma)\supset K_t(\wedge\varGamma)$ $(\wedge\mathrm{B}_t)$ から (2) によって $\wedge(K_t\varGamma)\supset K_tA$. □

系 8 [KN 97 Lemma 2.2 (2)]. $\varGamma,\varTheta$ が論理式の有限集合であって, $\varGamma\to\varTheta$ が sequent calculus の体系で証明可能ならば $\wedge\varGamma\supset\vee\varTheta$ が Russell-Hilbert 流の体系で証明可能である. ただし$\wedge\phi$は$\top$, $\vee\phi$は$\bot$とみなす. □

系 9 [KN 97 Theorem 2.1 の "only if" の部分]. Sequent calculus の体系で$\wedge\varGamma\longrightarrow A$ が証明可能ならば A が $\varGamma$ から Russell-Hilbert 流の体系で演繹可能である. □

文献

[BS 94] R. A. BULL and K. SEGERBERG : Basic modal logic. In *Handbook of* *philosophical logic* (D. GABBAY and F. GUENTHNER eds.), 1994. Vol. II, pp 1-88.

[HM 92] Joseph Y. Halpern and Yoram Moses : A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. *Artificial Intelligence*, vol. **54** (1992), pp. 319–379.

[KN 91] Mamoru KANEKO and Takashi NAGASHIMA : Final decisions, the Nash equilibrium and solvability in games with common knowledge of logical abilities. *Mathematical Social Sciences*, vol. **22** (1991), pp. 229–255.

[KN 96] Mamoru KANEKO and Takashi NAGASHIMA : Game logic and its applications I. *Studia Logica*, vol. **57** (1996), pp. 325–354.

[KN 97] Mamoru KANEKO and Takashi NAGASHIMA : Game logic and its applications II. *Studia Logica*, vol. **58** (1997), pp. 273-303.

[KN 97a] Mamoru KANEKO and Takashi NAGASHIMA : Axiomatic indefinability of common knowledge in finitary logics. In *Epistemic logic and the theory of games and decisions* (M. BACHARACH, L. A. GERARD-VARET, P. MONGIN, H. SHIN eds.), pp. 69–93.
Center for operations research and econometrics (CORE), 1997.

[T 87] G. Takeuti : *Proof theory. Studies in logic and the foundation of mathematics*, vol. **81**. North-Holland, 1975, 1987.

筆者連絡先：nagasima-t@mta.biglobe.ne.jp