帰納函数の標準形について

永 島 孝

帰納函数論において標準形定理は最も重要な定理のひとつである. Kleene は原始帰納述語 T_n と原始帰納函数 U を定義し, n 変数の任意の帰納函数 f が適当な数 e をとって

$$f(a_1, \ldots, a_n) = U(\mu y T_n(e, a_1, \ldots, a_n, y))$$

とあらわせることを証明した. この T_n, U は帰納函数を定義する形式的体系に対して Gödel の算術化の方法を適用して得られたものである. 実は T_n, U が Kalmár [3] の意味で初等的であることが Bereczki によって証明されている. さて, T_n, U の性質として必要なことは標準形定理や帰納可算述語の枚挙定理などがなりたつことであって, 帰納函数の形式的体系の算術化による構成に拘泥する必要はなかろうと思われる. この立場から考えれば標準形定理をはじめとする諸定理がなりたつように T_n と U に相当するなるべく簡単な述語と函数を何らかの方法で定義することによって, ひとつの精密化が得られると考えられる. 一例として Grzegorczyk の函数族 $\mathcal{E}^0$ に属するように T_n と U の定義を修正することは可能であろう.

原始帰納函数の全体, 初等函数の全体 $\mathcal{E}$, 函数族 $\mathcal{E}^0$ などはいづれもいくつかの函数から合成とある種の帰納法（原始帰納法またはこれに制限を加えたものなど）とをもちいて得られる函数の集合である. これに対して, いくつかの初等函数から合成のみによって得られる函数の集合を考え, T_n と U に相当するものをその函数族に属するように定義するのが, われわれの目的である. 自然数の加法 $x+y$, 減法 $x \dot{-} y$, 乗法 xy, 除法 $[x/y]$, 平方根 $[\sqrt{x}]$ と定数から有限回の合成によって得られる（すなわち explicit な）函数の全体を $\mathcal{A}$ とする. この函数族は Diophantos 述語の枚挙定理などを得ることを目的として,

[6] において筆者がはじめて定義したものである．その後，帰納可算述語はすべて Diophantos 述語であることが Matijasevič によって証明され，Hilbert の第 10 問題と Hirose の予想が否定的に解決された．ここでは Matijasevič の上記の定理と [6] の結果をもちいる．函数族 $\mathscr{A}$ が極めてせまいものであることから T_n や U に相当する函数または述語を定義するにあたって Kleene にならって算術化をおこなうようなことはほとんど不可能であり，まったく別な方法によらねばならない．

函数 sg, min, max, rm などは $\mathscr{A}$ に属する．つぎに

$$J(a,b)=[(a+b)(a+b+1)/2]+a$$

と定義される全単射 $J:N\times N\to N$ は $\mathscr{A}$ に属し，その逆函数すなわち

$$K(J(a,b))=a,\ \ L(J(a,b))=b$$

をみたす K, L は [1]，44 頁の結果から $\mathscr{A}$ に属する．この J, K, L を含んでいることが函数族 $\mathscr{A}$ のひとつの特徴であって，これによってたとえばひきつづく同種の限定子 (quantifier) を一個に約すことなどが可能となる．なお， Grzegorczyk [2] の階層 $\{\mathscr{E}^n|n=0,1,2,\dots\}$ との関係については $\mathscr{A}$ は $\mathscr{E}^2$ に含まれるが $\mathscr{E}^1$ には含まれない．以下，表現函数 (representing function) が $\mathscr{A}$ に属するような述語の全体をもおなじく $\mathscr{A}$ と記す．sg $\in\mathscr{A}$ であるから，述語 P が $\mathscr{A}$ に属することは

$$P(a_1,\dots,a_n)\equiv f(a_1,\dots,a_n)=0$$

をみたす函数 $f\in\mathscr{A}$ が存在することと同値である．さて n 変数の述語 R が帰納可算であるためには述語 $P\in\mathscr{A}$ があって

$$R(a_1,\dots,a_n)\equiv\exists y(\forall z\leq y)P(a_1,\dots,a_n,y,z)$$

とあらわされることが必要十分であると云う定理を筆者はすでに得ている ([6]，定理 11) が，この定理における限定子 ($\forall z\leq y$) は除去で

きることがわかる．すなわち，Matijasevič の定理によって帰納可算述語はすべて Diophantos 述語であるから，[6] の定理 3 からただちにつぎの定理が得られるのである．

定理 1. 述語 $R(a_1, \ldots, a_n)$ が帰納可算であるための条件は

$$R(a_1, \ldots, a_n) \equiv \exists y P(a_1, \ldots, a_n, y)$$

をみたす述語 $\mathrm{P} \in \mathscr{A}$ が存在することである．

Kleene の述語 T_n ([4], 281 頁) は原始帰納的であるから帰納可算であり，したがって

$$T_n(c, a_1, \ldots, a_n, b) \equiv \exists y V_n(c, a_1, \ldots, a_n, b, y)$$

がなりたつように述語 $V_n \in \mathscr{A}(n=0, 1, 2, \ldots)$ を定めることができる．述語 W_n を

$$W_n(c, a_1, \ldots, a_n, b) \equiv V_n(c, a_1, \ldots, a_n, K(b), L(b))$$

と定義する．

補題 1. $W_n \in \mathscr{A}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ であり，

$$\exists y T_n(c, a_1, \ldots, a_n, y) \equiv \exists y W_n(c, a_1, \ldots, a_n, y)$$

がなりたつ．

補題のなりたつことは W_n の定義から明らかである．補題によって Kleene の枚挙定理からただちにつぎの枚挙定理が得られる．

定理 2. 述語 $R(a_1, \ldots, a_n)$ が帰納可算であるための条件は

$$R(a_1, \ldots, a_n) \equiv \exists y W_n(e, a_1, \ldots, a_n, y)$$

をみたす数 e が存在することである．

定理 3. 空でない集合 C が帰納可算であるための条件は C が $\mathscr{A}$ に属する函数の値域となることである．

証明. C を空でない帰納可算集合，q をその一つの元とする．定理 1 によって述語 $P \in \mathscr{A}$ があって

$$C=\{x \mid \exists y P(x,y)\}$$

がなりたつ．そこで

$$f(a)=\begin{cases} K(a), & (P(K(a),L(a)) \text{ のとき}), \\ q, & (\text{然らざるとき}) \end{cases}$$

とおけば $f \in \mathscr{A}$ であり f の値域は C に一致する．逆はあきらかである．

この定理によって，たとえば素数の全体，2 の冪の全体，Ackermann の函数の値域，などを値域とするような $\mathscr{A}$ の函数の存在がわかるが，そのような函数の具体的な構成は（定理の証明をたどることによって原理的には得られるべきものであるが）知られていない．つぎに，$n=0,1,2,\ldots$のおのおのに対して $n+2$ 変数の述語 T'_n を

$$T'_n(c,a_1,\ldots,a_n,b) \equiv W_{n+1}(c,a_1,\ldots,a_n,K(b),L(b))$$

と定義する．$T'_n \in \mathscr{A}$ であり

$$T'_n(c,a_1,\ldots,a_n,b) \equiv V_{n+1}(c,a_1,\ldots,a_n,K(b),KL(b),LL(b))$$

がなりたつ．Kleene の標準形定理において T_n を T'_n で，U を K でそれぞれおきかえることができる．すなわち，

定理 4.　任意の帰納函数 f に対して数 e が定まり，

(1)　$\exists y T'_n(e,a_1,\ldots,a_n,y)$,

(2)　$f(a_1,\ldots,a_n)=K(\mu y T'_n(e,a_1,\ldots,a_n,y))$,

(3)　$T'_n(e,a_1,\ldots,a_n,b) \rightarrow K(b)=f(a_1,\ldots,a_n)$

がすべての $a_1,\ldots,a_n,b$ に対してなりたつ．

証明．$n \geq 2$ の場合も全く同様であるから $n=1$ の場合のみを示す．述語 $\lambda xy(f(x)=y)$ は帰納的したがって帰納可算であるから枚挙定理によって

$$f(a)=b \equiv \exists y T_2(e,a,b,y)$$

がなりたつように e を定める．補題 1 から

(4) $$f(a)=b\equiv\exists y W_2(e,a,b,y)$$

を得る．そこで $W_2(e,a,f(a),c)$ をみたす c をとり $d=J(f(a),c)$ とおけば $T'_1(e,a,d)$，ゆえに

(1) $$\exists y T'_1(e,a,y)$$

がなりたつ．つぎに(3)を示す．$T'_1(e,a,b)$ を仮定すると T'_1 の定義から $W_2(e,a,K(b),L(b))$，したがって

$$\exists y W_2(e,a,K(b),y)$$

が得られる．ゆえに(4)によって $f(a)=K(b)$ である．これで(3)が得られた．(2)は(1)と(3)からあきらかである．

定理 5. 任意の部分帰納函数 f に対して数 e が定まり，

(1) $$(a_1,\ldots,a_n)\in D(f)\equiv\exists y T'_n(e,a_1,\ldots,a_n,y),$$

(2) $$f(a_1,\ldots,a_n)\simeq K(\mu y T'_n(e,a_1,\ldots,a_n,y)),$$

(3) $$T'_n(e,a_1,\ldots,a_n,b)\to K(b)\simeq f(a_1,\ldots,a_n)$$

がすべての $a_1,\ldots,a_n,b$ に対してなりたつ．

証明．$n=1$ の場合のみを示すが $n\geq 2$ の場合も全く同様である．部分帰納函数 f のゲーデル数を e_0 とすれば

$$f(a)\simeq b\equiv\exists y(T_1(e_0,a,y)\wedge U(y)=b)$$

であるから述語 $\lambda xy(f(x)\simeq y)$ は帰納可算である．枚挙定理によって

$$f(a)\simeq b\equiv\exists y T_2(e,a,b,y)$$

がなりたつような e をとれば補題 1 によって

$$f(a)\simeq b\equiv\exists y W_2(e,a,b,y)$$

である．ここで $a\in D(f)\equiv\exists x(f(a)\simeq x)$ であるから

$$a \in D(f) \equiv \exists x \exists y W_2(e, a, x, y)$$

したがって T'_1 の定義から

$$a \in D(f) \equiv \exists y T'_1(e, a, y)$$

がなりたつ. (2), (3)の証明は定理4の場合と同様である.

与えられた初等函数の値域に与えられた数が属するか, と云う形にあらわし得る問題を Kalmár は初等問題と名づけている ([3], 6 頁). これにならって, 与えられた数が与えられた函数 $f \in \mathscr{A}$ の値域に属するか, と云う問題を考える. 帰納的でない帰納可算集合たとえば $\{x | \exists y T_1(x, x, y)\}$ を値域とするような $\mathscr{A}$ の函数を具体的に構成することが可能であることから, この問題は決定不能問題であることがわかる. なお, 与えられた $f \in \mathscr{A}$ が全射であるか, と云う問題の決定不能性がすでに Kurata, Hirai によって得られている.

以上に述べた諸結果において函数族 $\mathscr{A}$ をよりせまい函数族におきかえることができるか否かは未解決であるが, すくなくとも umfangreich な函数 (すべての値を無限回とる函数すなわち各点の逆像が無限集合であるような函数) を含む函数族でなければならないことから, 基礎にとった加減乗除と平方根のうちのいくつかを欠くことは困難であろう. たとえば加法と乗法だけから合成で得られる函数 (多項式) は umfangreich でない. 函数族に umfangreich な函数が属していなければならないことの根拠は, h が原始帰納函数であって任意の帰納函数 f に対して原始帰納函数 g が存在して

$$f(a) = h(\mu x(g(a, x) = 0))$$

がなりたつならば h が umfangreich であると云う Markov の定理である.

他のいろいろな函数族と $\mathscr{A}$ との関係については多くの問題が未解決である. たとえば $\mathscr{E}^0$ の函数で $\mathscr{A}$ に含まれないものがあるか否かは解決されていない.

文献

[1] M. Davis: Computability and unsolvability. New York, 1958.

[2] A. Grzegorczyk: Some classes of recursive functions. Warszawa, 1953.

[3] Kalmár László: Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára. *Mat. és fiz. lapok* **50** (1943), 1-23.

[4] S. C. Kleene: Introduction to metamathematics. Amsterdam, Groningen, Toronto and New York, 1952.

[5] Матиясевич Ю. В.: *Доклады Академии Наук СССР* **191** (1970), 279-282.

[6] 永島　孝: ディオファントス述語の枚挙. 一橋大学研究年報, 自然科学研究 **12** (1970), 137-148.

(昭和 49 年 8 月 6 日　受理)