数理論理学への招待

永　島　孝

序

数学が危機に瀕した今世紀の初頭に、数学の再建という使命をもって数学の新たな分野「数学基礎論」が生まれた。いまはむしろ「数理論理学」という名称が好まれる傾向があるのは、もはや数学の基礎づけという初期の目的のみにとどまらなくなったことによるのであろう。証明や計算を対象とする研究はそれ自身意義のあり興味のあることであって、数学の安全を保障するためにのみ行われるものではない。証明や計算の研究もまた代数学、幾何学、解析学などとならぶ一つの部門として数学の中に位置づけられるべきものである。また計算機科学との深い関わりはもとより、その他の学問分野へも応用されるようになってきている。この数理論理学がどんな学問なのか、簡単に紹介する。なお、筆者自身の興味と紙数の制約で話題が偏るのをご寛恕いただきたい。

数学の三大危機

数学が危機に襲われたと、はじめに述べた。長い歴史の中で数学はつねに安泰であったわけではなく、いままでに三回の深刻な危機に見舞われたといわれている（フレンケル、バー・ヒレル「集合論の基礎」による）。その三大危機とはどんな事件であったのか、少

し歴史を振り返ってみよう。第一の危機は紀元前のことである。

理論的数学の創始者は（メソポタミア説などもあるが）ギリシア人とされている。かれらは先進諸国から測地術や商業算術などを学んだが、遅くとも前四世紀半ばには確かに理論的数学を持っていた。実用を超えた学問である数学の創始は人類文化史上最大の事件の一つで、以後現在までの学問、文化の発展に本質的な影響を与えた。（日本数学会編「岩波数学辞典」の「ギリシアの数学」の項目から）

ところが理論的なギリシャの数学はまもなく危機に陥る。一つは、正方形の一辺の長さと対角線の長さとの比が整数の比であらわされないこと（現代的に言えば2の平方根が無理数であること）の発見で、量を整数の比であらわす考え方が破綻した。もう一つは有名な「アキレスが亀を追い越せない」に代表されるゼノンの逆理の発見である。この危機に直面して考え出されたのがエウクレイデス（ユークリッド）の「原論」に論じられている量の理論やアルキメデスの取り尽くしの方法だと言われているが、それを論ずるのはこの論説の目的ではない。

二千年あまりを経て、第二の危機が来る。微分積分学の発見に始まり、解析学は一七世紀から一八世紀にかけて豊かな成果を得る。観測によって知られていた惑星の軌道が理論的に説明されるなど、自然現象をモデルに数学の理論がつくられまた数学の理論で自然現象が説明され、解析学を中心とする数学は自然科学や科学技術と相俟って輝かしく発展する。しかし、この時期には新たな定理の発見を急ぐあまり、解析学を支える基礎について注意が払われなかった。一九世紀のはじめころには極限概念にかかわるさまざまな矛盾が現れて来て、数学の第二の危機となる。

基礎概念を明確にしないまま砂上の楼閣を築いてきたことに気づいて、一九世紀には解析学の基礎を厳密に確立することが試みられる。収束の概念を「$\varepsilon \cdot \delta$論法」で明確に定義したコーシーはじめ、ワイエルシ

ュトラスらによって解析学の基礎が整備されるが、これについてもくわしくは述べない。なお、一九世紀には非ユークリッド幾何学の発見を契機として公理というものに対する見方が変わる。自明な真理ではなく、理論の前提になる基本的な仮設と見る近代的な考え方への変化である。やがて数学のいろいろな理論が公理論として整えられてゆくことになる。一九世紀は数学思想がもろもろの束縛から解放され自由を獲得していった時代でもある。

さて、第三の危機について述べる前に、数というものについて考えておきたい。数の体系は理論的には

自然数、整数、有理数、実数、複素数

と拡張されてゆくが、それについて考えてみる。実数から複素数をつくることは代数学的な手法で容易にできる。自然数から整数をつくり、整数から有理数をつくるのもまた容易なことである。

本質的に困難があるのは有理数から実数を構成する段階である。自然数から整数、整数から有理数、実数から複素数の段階はいずれも有限個の数の組をつくったりそれらを類別したりするだけでよいのに対して、有理数からそのような有限的な方法によって実数をつくり得ないことが現在ではわかっている。実数をつくる方法はいくつか知られているが、いずれにしても有理数の無限集合か無限列をもちいなければならない。しかし、無限列や無限集合をもちいることに伴う困難な問題のまだ認識されていなかった一九世紀には実数が有理数からつくれれば十分であった。

数学の危機に話を戻そう。一九世紀末までには有理数から実数を構成する論法が確立され、それによって実数や複素数に関する議論は自然数あるいは整数に関する議論に還元されて、解析学には確固たる基礎が整えられた。こうして第二の危機を免れたところへ、まもなく衝撃的な第三の危機が襲うのである。

一九世紀の末、カントールは集合論という斬新な理論を創り出した。一部の激しい批判にもかかわらず、やがて数学のあらゆる分野で集合論が理解されその有効性が認められるようになり、現在では数学のどの分野を研究するにも集合論が必要不可欠と考えられてい

る。数の体系を自然数から複素数まで次々に拡張してゆくときに唯一の困難な段階すなわち有理数から実数への拡張も、集合論をもちいれば明確に説明できるから、自然数と集合さえあれば複素数までの数の体系はすべて構成できる。自然数の体系さえも集合から作り出すことができるので、数の体系はすべて集合から生み出される。数ばかりではない、数学の概念のほとんどすべてが集合から構成できるのである。解析学をはじめ幾何学も代数学も、カントールの築いた集合論という基礎にしっかり支えられて、数学は安泰なはずであった。

　集合とはものの集まりのことであると説明される。カントールは集合をつぎのように定義している。

> 「集合」とはわれわれの直観または思考の対象であって確定したよく区別しうるものたちmを一つの全体にまとめたものMのことであるとする（ここではmはMの「要素」と呼ばれる）。（田中尚夫訳）

この概念の中に矛盾がひそんでいようとは思いもよらなかったことであろう。ところが集合論に矛盾が含まれていることが発見される。なかでも有名なのは一九〇二年のラッセルの逆理であるが、数年前に集合論の創始者カントール自身が逆理に気づいている。しかしこの逆理の解決策をカントールはついに見いだし得なかった。

　集合論の逆理の発見が集合論だけではなく数学全般の危機であるのは、数学のもろもろの概念の根底には集合の概念がひそんでいることによる。集合論が提唱されるまで人々はそのことに気づいていなかったのであるが、意識して集合を持ち出すか否かにかかわらず昔から数学の議論のなかには集合が使われていたのである。

数学基礎論の誕生

　ラッセルの逆理はごく簡単な議論で導き出される。前掲のカントールの定義によれば「直観または思考の対象であって確定したよく区別しうるもの」を集めて一つにまとめたものは集合である。この定義によって

集合というものがはっきり定義されているとすれば、集合もまた「直観または思考の対象であって確定したよく区別しうるもの」にちがいないから、集合をすべて集めて一つの集合にまとめることができるはずである。この「集合の全体からなる集合」は自分自身の要素になっているが、つぎに「自分自身の要素でない集合」という概念を考えるとこれもまた「直観または思考の対象であって確定したよく区別しうるもの」であるから、自分自身の要素でない集合の全体も集合になるはずである。すなわち、

　自分自身の要素でない集合の全体からなる集合

がある。これをMとする。任意の集合Xについて、XがMの要素であるための必要十分条件はXがXの要素でないことである。Mもまた集合であるから、

　MがMの要素であるための必要十分条件は、MがMの要素でないことである。

これはあきらかに矛盾である。これがラッセルの逆理である。

これらの逆理が引き起こした数学の危機の恐ろしさは、集合論の考え方が前に述べたとおり無意識で使われるほど数学のあらゆるところにあまねく浸透しているものであることによる。したがって、集合とは何かということについての根本的な再検討が求められるだけでなく、数学の基礎の全般についての再検討が緊急かつ重要な課題として解決を迫られることになった。いかなる概念構成が許されるのか、論証にはいかなる論法が許されるのか、数学はいかなる基礎の上に建設されるべきか、徹底的に検討しない限り、蓄積されてきた数学の輝かしい成果はくつがえってしまいかねない。

こうして二〇世紀はじめに数学基礎論の研究が始められた。そして、逆理が生じた原因についての見方、数学をいかにして再建すべきかについての考え方から、思想的な立場が形式主義、直観主義、論理主義の三つに分かれる。形式主義と直観主義とはとくに激しく論争し、互いに影響を及ぼし合ってそれぞれの立場はますます強固なものになっていった。これらの思想につ

いてくわしく説明する余地はないが、論争の時代は半世紀以上前に終わっているとみてよいであろう。今日では、形式主義が主流とはいえ直観主義と共存し、どちらかの立場にこだわることなく研究がなされている。

公理主義をとらず論理だけから数学をすべて導き出そうとするラッセルの論理主義の企てはある段階までは成功し、彼らの初期の成果は大著「プリンキピア・マテマティカ」にまとめられた。ただし論理主義者が「論理」と称するものは、ふつうに論理と考えられているものとはかなり異なったものに見える。ゲーデルの不完全定理によって論理主義の立場の限界が見えて以来、この立場の研究は見られなくなった。

論理だけを全面的に信頼する論理主義とは対照的に、ブラウワーの直観主義は古来もちいられてきた論理を徹底的に批判し、「構成」を重んずる。たとえば、ある条件をみたす対象の存在を主張するには、その条件をみたす対象を具現的に構成することを要請する。存在しないと仮定して矛盾を導くという背理法（帰謬法）による証明は認めない。その結果、命題の肯定と二重否定とは区別を要することになり、直観主義では排中律

A または A でない

を論理の基本法則としては認めない。論理だけをくらべても、直観主義の論理はこのように古典論理とは違ったものになる。このような徹底的に批判的な立場から数学を再構築するのは容易なことではないと思われるが、研究は根気よく続けられている。過去の数学の成果の多くはそのままでは認められないのみならず、伝統的な数学とは相入れない結果さえも認める。逆理に関しては安全と思われても、このように数学の厖大な研究成果の多くを捨て去らねばならないことから、直観主義の立場は数学思想の主流にはならなかったのであろう。しかし、直観主義は単なる「異端の数学」と見られているわけではない。その構成的な思想は最近では計算機科学の方面からも大いに注目されているらしい。

ヒルベルトの形式主義は、過去の遺産を守りながら数学を再建することをめざす。第三の危機に対処する

数学基礎論の建設にとりかかる前からすでにヒルベルトは数学を厳密な公理論として展開することを考えている。エウクレイデスの「原論」には点や直線の定義があるが、論証の根拠としてもちいられるものでないことから、幾何学の厳密な再構築を試みた「幾何学基礎論」(一八九九年)ではこのような定義は排除し、点や直線のような基本概念は「無定義概念」として扱う。そして、公理は自明な事実ではなく、「点」(と称するもの)や「直線」(と称するもの)についての仮設を述べたものと考える。公理だけから出発して論証を重ね、あいまいな直感がまぎれこむのを防いで理論を展開する。これが近代的な公理論に一般な考え方になっている。

第三の危機を迎えて公理主義はさらに厳密化することが急務になる。点や直線についての直感を排除し得ても、公理や定理をふつうの言葉で記述する限りその解釈に言語についての直感がまぎれこむおそれは残る。また、論証に関してもどんな推論を許すのかあらかじめ明確に限定しておかない限り、やはりあいまいさが入り込むおそれがある。そこで、徹底した「形式化」つまり記号による記述を行う。一つの理論を形式化するには、もちいる記号の種類をあらかじめ定めておき、公理や定理などの命題はすべて記号だけで論理式として記述する。論証で許す推論もあらかじめすべて挙げておく。命題が論理式として記述されているから、推論は記号の操作によって論理式を変形する規則として記述できる。推論規則によって変形されてゆく一連の論理式を記述することで、証明もあらかじめ定められた記号だけで記述できる。なお、記号で記述された証明を「証明図」という。

以上のような形式化によって数学の理論は記号を操作するゲームのようなものになり、直感の入りこむ余地のない客観性の高いものになる。逆理を生じないと推測される公理を立て、公理論を形式化したとしても、それだけで逆理から安全とは言い切れないが、ヒルベルトは「何者もカントールが築いてくれた楽園からわれわれを追い出すことはできない」と、理論が矛盾を含まないことの保証を探る。そこで考え出されたのが

「証明論」である。命題や証明が記号で記述されているなら、意味内容から切り離した証明図を数学的な研究対象として扱うことが可能になる。公理をあらわす論理式から始めて推論規則による記号的な変形操作をどのように繰り返していっても矛盾を表す論理式には決して到達しないという「無矛盾性」の証明を、証明論によって実行しようというのが彼の考えである。

問題は、証明論は信頼できるのかということになる。形式化された対象としての証明や計算を数学的に研究するのはいわば「数学の数学」であり一般に「超数学」と呼ばれるが、その超数学が逆理を含まないことはいかにして保証されるのか、それが重要である。ヒルベルトはこれに対して「有限の立場」というきわめて確実と思われる立場を提唱する。有限的に構成され得るもののみを認めようとするその立場には、直観主義の強い影響が見られる。形式主義は、誤解を恐れず標語的に言えば「数学は古典論理で、超数学は直観主義論理で」の二階建てであろう。

さて、ある理論が矛盾を含まないとの仮定の下で別の理論が矛盾を含まないということを示すのは、ヒルベルトの創始ではない。一九世紀中にはユークリッド空間の中に非ユークリッド幾何学の「モデル」をつくることによって、非ユークリッド幾何学が矛盾するならユークリッド幾何学も矛盾を含む、言い換えればユークリッド幾何学が無矛盾ならば非ユークリッド幾何学もまた無矛盾である、ということが証明されている。また、座標幾何学によってユークリッド幾何学の議論はすべて実数の議論に還元できるから、実数論が無矛盾からばユークリッド幾何学も無矛盾である。しかし、自然数論をさらに簡単な理論に還元するなど考え得ぬことで、自然数論については右のような「相対無矛盾性」ではなく、他の理論の無矛盾性という仮定なしに無矛盾性を証明しなければならない。ここで「有限の立場」の意義がある。

第1階自然数論すなわちペアノの自然数論の公理系を第1階述語論理系の上で形式化した体系の無矛盾性を示すことがまず課題になった。さらに、実数論、集合論などがその先の目標になる。現代数学の理論のほ

とんどすべては集合論の中で展開できるから、もし集合論の無矛盾性が証明されれば、現代数学は逆理から救われたことになる。無矛盾性の証明については、やがて困難が見えてくるが、その困難についてはあとで述べる。

二〇世紀はじめのころの形式主義にとっては最も重要かつ緊急な課題は数学の諸理論の無矛盾性を証明することであった。数学基礎論といえばいまだに無矛盾性の追求のみであるかのように誤解される傾向がある。「数理論理学」という名称の方が好まれる傾向があるのは、一つにはこのような誤解を避けたい気持ちからであろう。数学における証明の構造を研究することの意義は、決して無矛盾性のみにとどまるものではない。

ところで、論理学の数学的研究は数学が第三の危機に見舞われる前からすでに始められていて、数学基礎論は前の世紀から記号論理学を受け継いで発展した。「数理論理学」という語がいつから使われているか筆者は知らない。初期には「記号論理学」とほぼ同義であったと思われるが、現在ではバーワイズ編「数理論理学便覧」(一九七七年)に見られるように帰納的函数の理論や集合論なども含んだ広い意味にもちいられ、かつての「数学基礎論」とほぼ同義と思われる。

証明論

論理を前述の意味で「形式化」した体系を論理系または論理計算という。一般に論理系では命題は論理式などであらわされ、論理式を「導出(証明)」するための公理と推論規則とが定められる。導出の過程を記述したものが証明図である。ラッセルらは型の論理の論理系を提案した。またヒルベルトらが構築に着手した第1階古典述語論理の論理系は一九三〇年にゲーデルが完全性定理を証明したことによって完成し、直観主義述語論理もハイティングによって形式化がなされた。

形式主義に話を戻す。ヒルベルトは数学の理論を第1階述語論理系で形式化するのを目標にした。第1階の論理系には完全性という好ましい性質があることなどの理由によるのであろう。無矛盾性とともに重要な問題とされたものに「決定問題」がある。(論理系の)

決定問題とは、その論理系の論理式が与えられたときそれが導出可能であるか否かを一般に判定するアルゴリズム（決定手続き）を求める問題である。述語論理系についてもしそのような決定手続きが得られたなら、無矛盾性を調べるには公理をあらわす論理式と矛盾命題をあらわす論理式とを「ならば」で結んでつくった論理式に対して、その手続きを適用してただちに結果が得られるはずである。すなわち、決定手続きさえ見つかればもろもろの理論の無矛盾性の問題は一挙に解決することになる。

決定問題がどう解決されたかの話はあとにまわして、いましばらく（第1階古典述語論理の）論理系について述べよう。ヒルベルトらの論理系はつぎのようなものであった。恒真論理式のうちのいくつかを論理の公理として採用する。そして推論規則としては「論理式の中の命題変数に論理式を代入する」という代入則や、Aと「AならばB」からBを導くという規則（モードゥス・ポーネンス、MP）など二〜三を採用する。その体系が健全であることすなわち恒真論理式のみが導出されることは一九二〇年代に示され、完全であることすなわち恒真論理式がすべて導出されることは前述のとおり一九三〇年にゲーデルによって証明された。

こうして無矛盾性の問題や決定問題などを扱い得る体系はひとまず整ったのだが、ヒルベルトの論理系で記述した証明図は、ふつうの数学で考える証明の筋道とは非常に異なった筋道をあらわしていて、考えにくいという欠点があった。この論理系では、恒真論理式から恒真論理式を導く推論規則だけがもちいられている。しかしふつうの数学で定理を証明するとき、そのような考え方はしない。「AならばB」という形の定理を証明するときにはAを仮定して、つまりAを公理と同様にみなして、Bを導くであろう。このBは一般に恒真命題ではなくAという仮定のもとで成立する命題であるから、このAからBを導くという論法は論理系で記述できない。この弱点を克服すべく「演繹（えんえき）定理」というものが考え出されるのであるが、ここでは説明しない。

ゲンツェンはまずふつうの証明の考え方を論理系に

反映させることを企て、自然的推論の体系（古典論理系NKと直観主義論理系NJ。なお、この名称はエヌカー、エヌヨットとドイツ読みする）を提唱する。恒真論理式だけを扱うという制約をはずし、仮定に従属な命題を扱えるようにする。出発点には論理の公理のほか、仮定をあらわすどんな論理式も許す。仮定式はそれ自身に従属であり、論理の公理は何ものにも従属でないと定める。そして、推論規則については前提から帰結を得る記号操作を定めるだけでなく、仮定への従属関係も定める。推論規則にはおのおの論理演算に対してその論理演算の意味から自然に要請されるものだけを採用する。

具体的に述べよう。「ならば」という論理演算（含意）についてはつぎの二つの推論規則が採用される。まずふつうの数学での論証の仕方に沿って、仮定Aのもとで推論を重ねてBが導出されれば「AならばB」が得られると考える。すなわち、前提Bから帰結「AならばB」を導くという規則を設け、帰結「AならばB」は前提Bが従属している仮定式のうちA以外のものにのみ従属であると定める。これが「含意の導入」の規則である。つぎに「AならばB」ということはAからBが導出されることを意味するはずだと考えて、前提Aと前提「AならばB」とから帰結Bを導く規則を設け、帰結Bは前提Aが従属している仮定式と前提「AならばB」が従属している仮定式とのすべてに従属であると定める。これが「含意の除去」の規則で、従属関係のことを除いて規則MPとおなじである。

ほかの論理演算に対しても同様に考えて導入規則と除去規則とを定める。こうして推論規則を定めたとき、論理の公理として必要なものは古典論理系については排中律だけである。すなわち、任意の論理式Aに対して「AまたはAでない」を論理の公理として採用する。直観主義論理系については論理の公理は不要である。ゲンツェンの自然的推論の体系は、おのおのの論理演算に対して導入規則と除去規則とが対応し、論理演算の意味がそれぞれの推論規則に反映された美しい体系である。

自然的推論の体系では、意味内容を考えた証明を証

明図として書き下しやすい。しかし証明図に登場する各論理式についてそれがどの仮定式に従属であるか考えねばならない点で、超数学的な扱いは煩雑になる。そこでゲンツェンは超数学的に扱いやすく美しいもう一種の体系すなわち古典論理系ＬＫ（エルカー）と直観主義論理系ＬＪ（エルヨット）とを考える。詳述する余地はないが、その論理系はおおむねつぎのようなものである。

まず、推論をさかのぼらずに仮定式への従属関係が見えるように、論理式の左に右矢印、その左にそれが従属している仮定式を列挙した形式的表現を考えてみる。つまり右矢印を一つ書き、いくつか（0個でもよい）の論理式を左に並べ、一つの論理式を右に書いたものである。つぎにこれを一般化して、矢印の右にも0個以上いくつかの論理式を並べてよいことにする。こうして矢印の両側にいくつかの論理式を並べたものを「ゼクエンツ」とよぶ。矢印の左側・右側をそれぞれ左辺・右辺という。右辺にも複数の論理式を許す対称性の導入は古典論理の双対（そうつい）原理を論理系に反映させるのに有効である。なおＬＪでは右辺の論理式は高々1個とする。

推論規則を適用する単位は論理式ではなく矢印の両辺に論理式を並べたゼクエンツである。論理の公理としては、両辺に同一の論理式をおいた形のゼクエンツだけを採る。推論規則はゼクエンツの構造に関するものと論理演算に関するものとにわけられる。論理演算に関する規則では除去規則というのがなくて、おのおのの論理演算に対してそれを左辺の論理式に導入する規則と右辺の論理式に導入する規則とが定められる。

さて、ゲンツェンは論理系ＬＫ、ＬＪの「基本定理」を証明した。基本定理はＬＫ（ＬＪでも同様）のどんな証明図が与えられてもそれを「まわり道のない」証明図に変換することができるという意味をもつ。この定理は無矛盾性の証明など証明論の問題を扱うのにきわめて有効である。また基本定理から分解証明法というものが得られ、理論的にも計算機への応用にも注目されている。

その後、(第1階)古典述語論理と直観主義述語論理

以外のさまざまな論理についてもそれをゲンツェン流の体系に形式化しその論理系についてゲンツェンの基本定理に相当する定理を証明することがひろく試みられている。とくに第2階古典述語論理の場合は竹内の基本予想とよばれ、実数論の無矛盾性を証明する方針として最も有望なものと期待されて、部分的な結果が多く得られている。超数学的な扱いにはNJ、NKよりもLJ、LKの方が適しているのでゲンツェン以後LJ、LKが主として研究されてきたが、ラムダ計算とNJとの間に美しい対応関係が見いだされ、計算機科学とも関連して自然的推論の体系がふたたび注目されてきている。

不完全性定理

ここで話題を転じて、保留しておいた話題、無矛盾性証明や決定問題類にどんな困難が待ち受けていたかについて述べよう。完全性定理の発表の翌一九三一年、ゲーデルは「不完全性定理」を発表した。その定理とは二つあるのだが、まず第一不完全性定理は、一定の条件をみたす形式的体系では、閉じた（自由変数を含まない）論理式で、その形式的体系でその論理式もその否定をあらわす論理式も導出されないものが存在する、という定理である。ここで形式的体系のみたすべき条件は、無矛盾であって、その体系の中で自然数論がある段階まで展開できることと、推論規則や公理が「帰納的」に生成されること、というゆるやかな条件である。ある程度の理論を形式化した体系ならたいていみたすと考えられる条件である。つぎに第二定理は、第一定理とおなじ条件をみたす形式的体系について、その無矛盾性を体系の中であらわす論理式はその体系の中で導出できない、という定理である。なお、体系の無矛盾性をその体系の中の論理式で記述できることについてはすぐあとで述べる。

ゲーデルの証明はラッセル、ホワイトヘッドの「プリンキピア・マテマティカ」の論理系PMとほぼおなじ体系について行われているが、不完全性定理は第1階自然数論や公理的集合論などにも当てはまるので、衝撃は論理主義のみならず形式主義にも及んだ。ゲー

デルの考えはつぎのようなものである。「クレタ人はみなうそつきだとクレタ人エピメニデスが言った」という有名な逆理と類似の概念構成を行って、その論理式自身の導出不可能性を意味する閉論理式を構成する。これがいわゆる「決定不能」な論理式になる。なお、ここで「決定」とは肯定も否定も導出できないことの意味であり、おなじ語でも決定問題の「決定」とは意味が違うので、混同しないよう注意を要する。自分自身の導出不可能性をあらわすことなどがなぜできるかというと、「超数学の算術化」というゲーデルの独創によるのである。

まず形式的体系の各記号にそれぞれ自然数を対応させる。その自然数を記号のゲーデル数という。このようにコード化すると、論理式には自然数の有限列が対応する。自然数の有限列を一つの自然数であらわすシークエンス・ナンバーの手法をもちいて、論理式に対応する自然数が定まる。これを論理式のゲーデル数という。こうして公理は一つの数値になり、推論規則は数の演算になる。導出可能性など超数学的な概念はゲーデル数によって自然数に関する概念に翻訳される。

つぎに自然数の原始帰納的函数というものを考える。ごく簡単ないくつかの函数から帰納法と合成とを何回か繰り返して得られるような函数と理解しておいていただけばよいので、これも定義は省く。シークエンス・ナンバーの計算に必要な函数などはすべて原始帰納的であり、したがって推論規則にゲーデル数で対応する自然数の演算は原始帰納的函数になる。その結果、証明図のゲーデル数であるか否かを定める函数も原始帰納的になる。さて、形式的体系の中で原始帰納的函数を一般的に扱える程度の自然数論が展開できるなら、その体系についての超数学的な概念はそれをゲーデル数で翻訳したのが原始帰納的函数になる限りその体系の中の論理式で記述できることになる。これが超数学の算術化である。

このようにして、体系の無矛盾性を体系の中であらわす論理式をつくることが可能になる。さらに、超数学の算術化とカントールの対角線論法とを組み合わせて、自分自身の導出不可能性をあらわす閉論理式をつ

くることが可能になる。そして、自らの導出不可能性をあらわす閉論理式は導出不可能であり、その否定の論理式もまた導出不可能である。以上がゲーデルの証明のきわめておおざっぱな概要である。

第二不完全性定理の意味について考えてみる。ヒルベルトの「有限の立場」での議論は超数学の算術化によっておおむね第1階自然数論の中に埋め込めるものと考えられるから、第1階自然数論の形式的体系の無矛盾性の証明がもし「有限の立場」でできたとしたら、ゲーデル数を対応させてやれば体系の無矛盾性をあらわす論理式がその体系自身の中で導出されることになり、第二不完全性定理に反する。したがって第1階自然数論またはそれを含む体系の無矛盾性をヒルベルトの「有限の立場」で証明するのはほぼ不可能なことのように思える。このことからヒルベルトの形式主義は絶望的になったという悲観的な誤解がかなり広まったようで、この古い誤解はいまだに消えずに伝わっている。

算術化して形式的体系に埋め込めるような論法によっては無矛盾性証明はできないことが右の議論であきらかになったから、無矛盾性の証明は生やさしいものではないという事実は深刻に受けとめねばならない。しかし形式主義が破綻したと誤解している人たちはゲーデルを読んでないのだ。ゲーデル自身がその論文で第二不完全性定理のあとに、この定理はヒルベルトの形式主義の見解に反駁するものではない、とわざわざ述べているのである。そしてさらに、有限の立場の証明でしかも形式的体系の中では表現できないものの存在が確信できる、と述べている。第二不完全性定理から形式主義についていかなる教訓を得るべきかは、ゲーデルの論文を読んだ上で考えるべきであろう。「有限の立場」を当初よりややひろく考えて、ゲンツェンは一九三六年に第1階自然数論の無矛盾性の証明に成功した。ゲーデルもまた一九五八年に無矛盾性の別証明を発表している。

無矛盾性と決定問題のうち、無矛盾性については無矛盾性を証明しようとするその体系の中では表現できないような論法を必然的にもちいなければならないと

いう困難がわかったが、決定問題についてはどうだろうか。古典命題論理系の決定手続きはかなり古くから知られている。また第1階古典述語論理系の限られた形の論理式についての決定手続きもいくつか発見されてきた。しかし第1階古典述語論理の論理式全体に対する決定問題は一九三六年、チャーチによって否定的に解決された。すなわち、第1階古典述語論理系の論理式が導出可能か否かを判定するアルゴリズムは存在しない、ということが証明されたのである。この証明にもまた超数学の算術化というゲーデルの考え方がもちいられている。

計算可能性の理論

つぎに計算可能性の理論について少し述べよう。この理論は帰納的函数の理論ともよばれる。決定問題の否定的解決のようなアルゴリズムが存在しないことの証明には、アルゴリズムとは何かの一般的な考察が必要である。ゲーデルはエルブランの示唆を受けて原始帰納的函数の概念を拡張することを提案し、一九三六年クリーネはこれを実行して帰納的函数を定義する。そしてチャーチが決定問題の否定的な解決に当たり、アルゴリズムによって計算できる函数を帰納的函数と同一視することを提唱し、アルゴリズムという概念がはじめて客観化される。同じく一九三六年に発表されたテューリングの仮想的計算機による計算可能性やチャーチのラムダ計算可能性などなど、計算可能性を客観的に定義しようとして得られた多くの概念が、見かけは著しく違うにもかかわらず帰納的という概念と一致することが知られている。このように安定な概念はまれにしか見られぬものである。同値なこれらの概念のうち、帰納的函数がよく研究されてきたが、最近は計算機科学との関連からラムダ計算に対する関心が高まっている。

クリーネはさらに帰納的函数の標準型定理を証明するが、ここでもまた計算の形式的体系の超数学の算術化がもちいられている。この標準型定理は万能テューリング機械などとともに計算可能性に関する最も重要な結果の一つであり、計算機科学の基礎を支えるもので

ある。一九六〇年につくられたコンピュータ言語ＬＩＳＰは標準型定理のみごとな応用の一つである。

集合論

おわりに、集合論のその後について述べる。カントール以後の集合論について述べるに先立って、カントールの業績についてもう少し語っておかねばならない。二つの有限集合同士の間に一対一の対応があるのは要素の個数が等しい場合に限るが、カントールはこの考えを無限集合にも当てはめて、一対一の対応に基づいて集合の「濃度」の概念を導入した。そして濃度についての重要な定理を証明したが、そのいくつかは驚くべきものであった。たとえば、

自然数全体の集合と有理数全体の集合とは濃度が等しい、

実数全体の集合の濃度は有理数全体の集合の濃度より大きい、

直線の濃度と平面の濃度とは等しい、

などである。ここで直線の濃度とは直線を直線上の点の全体からなる集合とみて、その集合の濃度をいう。平面の濃度というのも同様である。さて、自然数全体の集合の濃度は「可算濃度」、実数全体の集合の濃度は「連続体濃度」と呼ばれる。直線の濃度ももちろん連続体濃度である。連続体濃度と可算濃度との間の濃度は存在しないであろうとカントールは予想したが、ついに解決できなかった。この予想を連続体仮説という。

カントールによる集合の定義を前に掲げた。彼の集合論はこの集合の定義だけをもとに展開されるもので、今日では素朴集合論と呼ばれている。その素朴集合論から逆理が見つかり、彼の集合の定義ははたして妥当なのか、明確なのか、問われることになった。たとえ明確に定義されているとしても、自分自身の要素でない集合の全体などを一つの集合と考えれば逆理が生ずる。そこで、集合とは何かを明確に定めることが必要であるとともに、自分自身の要素でない集合をすべて集めて集合をつくることなどは禁止しなければならないことがわかる。

集合論の再建はツェルメロによって始められ、その

後スコーレム、フレンケル、ベルナイス、フォン・ノイマンらによって整備され、その中で現代数学の理論のほとんどが展開できるようになっている。この「公理的集合論」は近代的な公理論であって、集合を無定義概念としてそれに関するいくつかの公理をおく。また、ラッセルの逆理など知られている逆理は再現されないように公理がつくられているが、未知の逆理がひそんでいないという保証はいまのところ得られていない。無矛盾性の証明はまだ得られていないし、それは恐ろしく困難なものと感じられるが、それにもかかわらず大多数の研究者が公理的集合論の無矛盾性を強く確信している。

最も構成的でない原理として早くから論議の的になっていた選択公理については、「集合論の公理系から選択公理を除いた公理系が無矛盾ならば選択公理を含めた公理系もまた無矛盾である」という相対無矛盾性をゲーデルが証明し、選択公理に伴う不安は解消した。なお、この証明は「有限の立場」で認め得る論法でなされている。また選択公理が他の公理から独立であることがコーエンによって示された。

連続体仮説についてはまず「集合論の公理系が無矛盾ならばそれに連続体仮説を公理としてつけ加えた公理系も無矛盾である」ことをゲーデルが証明した。したがって連続体仮説の反例になるような集合つまり可算濃度より大きく連続体濃度より小さい濃度をもつ集合は、公理的集合論の中ではつくれないことがわかる。またコーエンは連続体仮説の独立性すなわち「集合論の公理系が無矛盾ならばそれに連続体仮説の否定を公理としてつけ加えた公理系も無矛盾である」ことを証明した。すなわち、現在の公理が無矛盾である限り、連続体仮説は「決定不能命題」であることが判明したのである。公理的集合論が無矛盾ならば決定不能命題が存在することは第一不完全性定理からわかってはいたが、連続体仮説がその決定不能命題の一つであることがあきらかになって、公理的集合論はいま「連続体仮説を解決するにはいかなる公理を追加すべきか」という難問に直面している。これが単なる技巧によって解決されるような問題ではなく、集合の本質について

のきわめて深い洞察が求められるのは言うまでもない。カントールの残したものは予想をはるかに超える難問なのである。

最後に

数理論理学は証明論、計算可能性の理論、集合論のほかここに紹介しなかったモデルの理論をも合わせた四つの分野からなり、数学のきわめて興味深い分野であるとともに、応用面でも計算機科学はもとより社会科学などへの応用も試みられている。

（一橋大学教授）