

# ベイズの手法による分布ラグモデルと季節変動の分析

美 添 泰 人

## 1 はじめに

マクロ経済の四半期データの分析で、説明変数のラグ構造を分析するモデルはきわめて一般的なものである。ところで、このようなモデルで、データとして季節変動修正済み系列を用いることには、以下に述べるような難点がある。

センサス局法などの季節変動調整プログラムでは、基本的に移動平均法が用いられているが、その結果として得られる「季節変動調整済み」の  $t$  時点の観測値には、過去の値および将来の値を何らかの意味で含んだ平均が利用される。実際の意味決定にあたっては、現在および過去の観測値にのみもとづき、将来の観測値は利用できないのだから、このようなデータを利用すると、ラグ構造を正しく測定できない可能性がある。

さらに、各系列ごとにその固有の性質を利用して、曜日の数による修正、特異値の処理などの各種の調整手段が取られ、また「オプション」の設定方法も各種存在するため、系列によって少しずつ具体的な計算手順には差が出てくる。その結果、最終的な季節変動修正済み系列を原系列の加重平均として表現すると、系列毎に違うウェイトが利用されていることになる。さらにそのウェイトは時点によっても異なる、すなわち「可変的」である。

このようなデータを用いてラグ構造を推定すると、その推定結果には歪みが生ずる可能性がある。このことは必ずしも正しくないが、単純なモデルでは偏りの大きさを評価することができる。しかし、季節変動調整済みの系列を利用して分析する限り、その偏りの大きさは評価できない。したがってこのような問題においては、

原系列を直接に利用し、季節要因は分析者が自ら処理することが求められる。その際、実際に季節変動を処理するためには、ダミー変数を利用することが広く行われている。

具体的な例として消費関数を考えよう。いま四半期マクロデータの消費 ( $C$ ) を説明するのに、実質可処分所得 ( $Y$ )、物価上昇率 ( $P$ ) および期待物価上昇率 ( $P^e$ ) を説明変数として用いる(舟岡[5]のモデルによる)と、季節変動調整済みのデータでは次のような表現になる。

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \gamma_0 P_t + \gamma_1 P_t^e + u_t$$

ここで、期待物価上昇率は、過去の物価上昇率の分布ラグによって定められると想定し  $\gamma_1 P_t^e$  の代わりに  $\sum_{i=1}^{l_2} \gamma_i P_{t-i}$  を用いることにする。このようなモデルを原系列データであてはめるときには、次のようになる。ただし、もう少し一般的なモデルとして、可処分所得にも分布ラグを想定しておく。

$$C_t = \sum_{j=1}^4 \delta_j D_j + \sum_{i=0}^{l_1} \beta_i Y_{t-i} + \gamma_0 P_t + \sum_{i=1}^{l_2} \gamma_i P_{t-i} + u_t \quad (1)$$

ここで  $D_1, \dots, D_4$

$$D_j = \begin{cases} 1 & \text{第 } j \text{ 四半期} \\ 0 & \text{その他の四半期} \end{cases} \quad (2)$$

が季節を表すダミー変数である。

なお、実際の分布ラグモデルの推定にあたっては、 $Y_t$  と  $P_t$  ラグの係数には何らかの方法で滑らかさを仮定することになる。計量経済分析では、以上のようなダミー変数の利用法が一般的に利用されているが、この方法では、センサス局法で代表される「季節変動調整プログラム」で用いられているような「可変的」な季節変動パターンを実現することは不可能である。

したがって、単なる季節変動ダミーを利用するモデルでは、季節変動パターンを一定と仮定した分析しかできないことになる。

このような状況において、可変的な季節変動を扱うための一般的な手法を提案することが、本論文の目的である。基本的な考え方は、季節変動パターンを表す回帰パラメータに関して、それが年とともに緩やかに変化するという条件を、ベイズの手法を利用することによって表現しようとするものである。一般の回帰モデルのパラメータの推定に事前情報を利用する方法は、これまでもいろいろな形で利用されてきている。純粋なベイズの立場に立つものとして、初期に提案された分布ラグの推定に関する Shiller の推定法 (Shiller[3])、二項回帰モデルの推定に関する筆者の推定法 (美添[7]) など、実際的な手法として Akaike[1] などがある。以上はデータ以外の情報をパラメータに関する事前分布として表現することを試みており、原理的にベイズの手法を利用するものである。しかしこれらと類似の手法の中にはベイズの事前分布にもとづかないまま、たとえば Kitagawa and Gersch[2] のように、ある種の目的関数の最大(最小)化を提案しているものもある。

本稿の手法は、原理的なベイズであり、以上のいくつかとは同様な考え方にもとづいている。

## 2 分布ラグのモデルと季節変動調整

分布ラグを含むモデルとして、原系列  $y_t, x_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) に関して次のような回帰式を想定する。なお誤差項に関する正規性、独立性の仮定は、議論の本質ではなく、簡単のためである。

$$y_t = \sum_{i=0}^l \beta_i x_{t-i} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \tau^{-1}) \quad (3)$$

移動平均によって処理されたデータを利用するとき、ラグ構造の推定にどのような問題が生ずるかを見るために、以下のような  $(2k+1)$  項の移動平均系列  $y_t^*, x_t^*$  を想定しよう。

$$y_t^* = \sum_{s=-k}^k w_y(s) y_{t+s}, \quad x_t^* = \sum_{s=-k}^k w_x(s) x_{t+s}$$

ただし、 $w_y(s), w_x(s)$  ( $s=-k, \dots, k$ ) は、 $y, x$  の系列の移動平均において利用される固定したウェイトであり、 $\sum w_y(s)=1, \sum w_x(s)=1$  を仮定しておく。このとき (3) 式から

$$\begin{aligned} y_t^* &= \sum_s w_y(s) \left( \sum_i \beta_i x_{t-i+s} + u_{t+s} \right) \\ &= \sum_i \beta_i \left( \sum_s w_y(s) x_{t-i+s} \right) + \left( \sum_s w_y(s) u_{t+s} \right) \end{aligned}$$

が得られる。この式と (3) 式との比較から明らかのように、 $y_t^*$  を  $x_{t-i}^*$  ( $i=0, \dots, l$ ) に回帰して得られるパラメータの推定値  $\hat{\beta}_i$  が (3) の  $\beta_i$  に対応するためには  $y$  と  $x$  の系列で同じウェイトが利用されることが必要である。ところで、現実のデータ処理においては、各系列ごとに異なるウェイトが用いられ、したがって  $w_y$  と  $w_x$  とは異なるのが普通である。このとき  $y_t^*$  を  $x_{t-i}^*$  ( $i=0, \dots, l$ ) に回帰するモデルからは本来の  $\beta_i$  の推定値は得られない。形式的には (3) の代わりに

$$y_t^* = \sum_{i=0}^l \beta_i^* x_{t-i}^* + u_t^*$$

というモデルを用いたとき、 $\beta_i^*$  の最小 2 乗推定量  $\hat{\beta}_i^*$  は  $\beta_i$  の一致推定量ではないということになる。その漸近バイアスは

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^* - \beta &\rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} X_+^* L(w_x)^* (L(w_y) - L(w_x)) X_+ \right]^{-1} \\ &\quad \left[ \frac{1}{T} X_+^* L(w_x)^* (L(w_y) - L(w_x)) X_+ \right] \beta \quad (4) \end{aligned}$$

と与えられる。詳細は付論に述べられているが、類似の議論はラグのない変数  $z_j$  についても成立するから、実は分布ラグのない一般的なモデルでもバイアスが生じる可能性がある。

以上の理由から、原系列  $y_t, x_t$  を直接利用することが要求される。したがって、このときには季節変動の要因を何らかの手段で除去しなければならない。季節変動を明示的に処理するためには、たとえば四半期データであれば、季節ダミー変数  $D_1, \dots, D_4$  を利用することが広く行われている。具体的には (2) 式の  $D_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) を導入して (3) 式の代わりに次のような回帰式が想定される。

$$y_t = \sum_{j=1}^4 \delta_j D_j + \sum_{i=0}^l \beta_i x_{t-i} + u_t \quad (5)$$

しかし、すでに述べたように、この手法では季節性  $D_j$  を固定することになり、センサス局法などの季節変動調整プログラムで扱うことができる「可変的」な季節変動を処理できない。現実の経済データでは、年とともに季節変動パターンは変化してきているから、結局単純なダミー変数の利用によっては不十分な分析しかできないことになる。

### 3 可変的季節変動のモデル

以下では、表現を簡単にするためにデータとしては四半期データのみを想定しておく。もちろん、月次データでも季節変動を扱う際の本質的な問題には変わりがない。

まず、可変的な季節変動の影響を処理するために (5) 式を一般化して

$$y_t = \delta_t + \sum_{i=0}^l \beta_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_j z_{jt} + u_t, \quad (6)$$

$$u_t \sim N(0, \tau^{-1})$$

と表すことを考える。ただし  $z_{jt}$  ( $j=1, \dots, p$ ) は  $x_t$  以外の説明変数を表し、定数項を含めるときには  $z_1$  を定数項とみなすことにする。この場合、第1項の係数  $\delta_t$  は每期変化することになり時間とともに変化する要因を表現できるが、当然ながらこのようなパラメータによって表現されたモデルは識別できない。

しかし、一般的な経済における経験によれば、同じ四半期に対応する  $\delta_t$  は年とともに次第に変化して行くが、その変化は緩やかなものである。このような情報は (6) 式のモデルの下における観測値には明示的には含まれていない。一方、異なる四半期に対応する  $\delta_t$  に関しては、それほど明確な情報を仮定しなくても、その構造は観測値の持つ情報から十分に推定できるものである。

以上のような、ある構造が緩やかに変化するという情報は、ベイジアン立場に立てば事前分布として自然に表現することができる。その際に利用する基本的な考え方は美添[6]に示したもので、その考え方を拡張したひとつの応用

例が美添[7]にある。

いまの問題では  $\delta_t$  に関する条件は、季節変動パターンが年とともに緩やかに変化するというだけであり、各四半期における季節変動の大きさにはほとんど制約がない。このような事前情報は、 $\delta_t$  の4期の差分  $\Delta_{(4)}\delta_t = \delta_t - \delta_{t-4}$  についての事前分布で

$$\Delta_{(4)}\delta_t = \delta_t - \delta_{t-4} \sim N(0, (v_0\tau)^{-1}), \quad t = 5, \dots, T \quad (7)$$

と表現するのが適当であろう。ここで  $v_0$  は  $\delta_t$  の変化の緩やかさを表すパラメータであって、その大きさは次のように解釈できる。まず  $v_0 \rightarrow \infty$  のときは  $\delta_t - \delta_{t-4} = 0$ 、すなわち各四半期における係数が等しくなり、通常のダミー変数を利用する場合と一致する。一方  $v_0 \rightarrow 0$  のときは係数になんら制約を課さないモデルとなり、極限の場合には識別不可能なモデルである (6) 式は推定できない。以上の中間のときが、季節変動調整における可変的な季節変動パターンに対応して、滑らかに変化する季節性を表している。

なお (7) 式では  $\delta_t$  に関する1次の差分  $\Delta_{(4)}\delta_t$  が0に近いことを表しており、したがって  $v_0 \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_t$  は各四半期ごとに等しくなる。これを一般化して  $\Delta_{(4)}\delta_t$  の2次あるいは3次の差分の平均を0とする事前分布、たとえば

$$\Delta_{(4)}^2\delta_t = \delta_t - 2\delta_{t-4} + \delta_{t-8} \sim N(0, (v_0\tau)^{-1})$$

や  $\Delta_{(4)}^3\delta_t \sim N(0, (v_0\tau)^{-1})$  などを想定することは容易である。この場合には、 $v_0 \rightarrow \infty$  のとき各四半期ごとの  $\delta_t$  は直線あるいは2次式で表されるトレンドを持つことになる。しかし、これまでの経験によると、 $v_0 \rightarrow \infty$  とする(実際には大きな値の  $v_0$  を用いる)必要はほとんどない。したがって、このような事前分布を想定することは容易ではあるが、実用上は大きな差は生じないであろう。

### 4 パラメータの推定法

すでに述べたように、分布ラグを含むモデルを実際に推定するには、何らかの手法によってラグ構造  $\beta_i$  ( $i=0, \dots, l$ ) に関する滑らかさを表

現しなければならない。これは経済理論の自然な帰結であると同時に、多重共線性の問題を回避するためにも必要な情報である。季節変動パターンの緩やかな変化を表現するためにベイズの手法を用いたので、これと整合的に、ラグ構造の分析にもシラー・ラグの推定法を利用することが自然であると考えられる。

具体的には次のような手法を用いる。すなわち、 $\beta_i$ に関する事前分布としてその低い次数の差分が0に近いということを、滑らかさのパラメータ  $v_1$  を用いて  $\Delta\beta_i \sim N(0, (v_1\tau)^{-1})$  あるいは  $\Delta^2\beta_i \sim N(0, (v_1\tau)^{-1})$  などによって表現する。いずれも  $v_1 \rightarrow \infty$  のとき、ラグ構造の係数  $\beta_i$  が  $i$  に関する1次関数または2次関数で表されることを示している。シラー・ラグでは、局所的に  $\beta_i$  が1次または2次の多項式で表現できることを仮定しているが、大域的には制約を課していない。したがって、ラグの係数  $\beta_i$  が  $i=0, \dots, l$  の範囲で1次または2次の多項式で近似できるという(大域的な)仮定とは違って、局所的に低次の多項式で表現されること、したがって大域的には滑らかな(任意の)関数を表現することが可能となっている。この仮定は

$$\beta_i = \theta_0 + \theta_1 i + \dots + \theta_d i^d + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (8)$$

とするような多項式の近似とは考え方が異なる。特に  $\varepsilon$  を無視したとき、すなわち  $\text{var}(\varepsilon) = 0$  のときには、この仮定でも Shiller の仮定でも、以前よく利用されたアーモン・ラグのモデルと一致する。しかし、(8) 式のような事前分布の表現によっては局所的な滑らかさは表現できない。したがって、廣松・藤原[4]などのシラー・ラグの解釈は、ベイジアンの有効性を評価したものとはいえない。アーモン・ラグを含めて、一般的な分布ラグに関するベイジアン解釈については美添[6]を参照されたい。

ここでも

$\Delta\beta_i = \beta_i - \beta_{i-1} \sim N(0, (v_1\tau)^{-1})$ ,  $i=1, \dots, l$  という仮定をおくことにする。もちろん、2次以上の差分を用いることも可能である。

以上の仮定のもとで  $\beta, \gamma, \delta$  および  $\tau$  の事後分布は容易に求められる(詳細は付論を参照のこと)。表現を容易にするため、 $t=1, \dots, T$  期

の観測値についての(6)式のモデルを、行列表示で

$$y = \delta + X\beta + Z\gamma + u \equiv W\alpha + u$$

と表す。ここで  $y = (y_t)$  は  $T \times 1$  のベクトル、 $X = (x_t, \dots, x_{t-l})$  は  $T \times (l+1)$  のラグ付きデータの行列、 $Z = (z_{jt})$  は  $T \times p$  の説明変数行列、 $\delta, \beta, \gamma$  はそれぞれ  $T, (l+1), p$  次元のパラメータベクトル、 $u$  は  $T$  次元の誤差項のベクトルである。また、 $W$  は  $I_T, X, Z$  を横に並べた  $T \times (T+l+1+p)$  行列、 $\alpha$  は  $\delta, \beta, \gamma$  を一列に並べた  $(T+l+1+p)$  次元のベクトルである。さらに、パラメータに関する情報を事前分布によって表現するために、次のように  $(T-4) \times T$  次元の行列  $R_0$  および  $l \times (l+1)$  次元の行列  $R_1$  を導入する。

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ & & & \ddots & & & & \ddots \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

このとき、季節変動要因  $\{\delta_{t+s}\} (s=0, \pm 4, \dots)$  が年とともに緩やかに変化するという情報は、事前分布

$$p(\delta | \tau) \propto \exp\left[-\frac{v_0\tau}{2} \delta' R_0' R_0 \delta\right]$$

によって、また、ラグ構造  $\beta_i (i=0, \dots, l)$  が滑らかな変化をするという情報は、事前分布

$$p(\beta | \tau) \propto \exp\left[-\frac{v_1\tau}{2} \beta' R_1' R_1 \beta\right]$$

によって表現される。付論に対応させるために、さらに次のような記号を導入する。

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} I & X & Z \\ v_0 R_0 & O & O \\ O & v_1 R_1 & O \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ O \\ O \end{pmatrix}$$

以上の仮定と付論の議論から  $\alpha$  および  $\tau$  の事後分布は次のような形で与えられる。

$$\alpha | \tau, y \sim N(a, \tau^{-1}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1})$$

$$\text{ただし } a = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \tilde{X}'\tilde{y}$$

および

$$p(\tau | y) \propto \tau^{(T-p-5)/2} e^{-S\tau/2}$$

$$\text{ただし } S = \tilde{y}'(\tilde{I} - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}')\tilde{y}$$

すなわち  $(\alpha, \tau)$  の事後分布は「正規・ガンマ分布」である。特に  $\tau$  の事後モードは  $S/(T-p-5)$  であり、その精度は近似的に

$$-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \log p(\tau | y) = \frac{1}{2}(T-p-5)$$

で与えられる。これは  $T$  が十分大きく、事後分布が正規分布で近似できるときには、分散の逆数にはほぼ等しくなる尺度である。以上の結果にもとづいて、季節変動の時間的な変化と、ラグ構造とを同時に推定することが容易に行える。

### 5 消費関数の推定と今後の課題

前節のモデルを、日本経済のマクロ消費関数の推定に適用してみよう。原系列データでの基本的なモデルは、すでに述べた (1) 式であるが、季節変動  $\delta_t$  に緩やかな変化を想定する。すなわち、前節のように

$$C_t = \delta_t + \sum_{i=0}^{l_1} \beta_i Y_{t-i} + \sum_{i=0}^{l_2} \gamma_i P_{t-i} + u_t \quad (9)$$

とする。このモデルは、前節で扱ったモデルとほとんど同じであり、違う点は2つの変数に分布ラグが用いられている点だけである。定数項を明示的に含めてもいいが、(9) では  $\delta_t$  がその代わりになるので不要である。パラメータに関する情報は次のように表される。

$$\delta_t - \delta_{t-4} \sim N(0, (v_0\tau)^{-1}) \quad t = 5, \dots, T$$

$$\beta_i - \beta_{i-1} \sim N(0, (v_1\tau)^{-1}) \quad i = 1, \dots, l_1$$

$$\gamma_i - \gamma_{i-1} \sim N(0, (v_2\tau)^{-1}) \quad i = 2, \dots, l_2$$

ここでは、以上の情報は独立として扱っている。また  $P$  は  $P^e$  と異なる独立変数だから  $\gamma_0$  には何の制約もない。したがって  $\gamma$  の添字は2から  $l_2$  まで変化する。前節の議論と対応させるためには、前節の  $R_0, R_1$  (ここでは  $l_1 \times (l_1+1)$  次元とする)に加えて、第1列がゼロベクトルで、残りの成分が  $R_1$  とおなじ形の  $(l_2-1) \times (l_2+1)$  次元の行列  $R_2$  を導入する。またデータの行列  $X (T \times l_1 \text{次元})$ ,  $P (T \times l_2 \text{次元})$  と、単位行列  $I (T \text{次元})$  およびこれらを横に並べた行列  $W = (I X P)$ , パラメータのベクトル  $\beta, \gamma$ ,

$\delta$  とこれらを一列に並べた  $\alpha$  などを前と同様に定義すると、以上の情報は次のように表される。

$$y = (I X P) \begin{pmatrix} \delta \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + u \equiv W\alpha + u,$$

$$u \sim N(0, \tau^{-1}I_T)$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{v_0}R_0 \\ \sqrt{v_1}R_1 \\ \sqrt{v_2}R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \equiv R\alpha \sim N(0, \tau^{-1}I_{T+l_1+l_2-5})$$

この形は前節のモデルと同様であり、これまでの議論に従って事後分布を導くことができる。実際には  $v_0, v_1, v_2$  を変化させることによって、可変的な季節変動を処理しながら消費関数の推定が行える。

いくつかのモデルを推定したうちから、回帰式 (9) に前期の消費  $C_{-1}$  を説明変数に加えた

$$C_t = \delta_t + \alpha C_{-1} + \sum_{i=0}^{l_1} \beta_i Y_{t-i} + \sum_{i=0}^{l_2} \gamma_i P_{t-i} + u_t \quad (10)$$

について、 $d_1=d_2=0, l_1=l_2=3$  として、 $v_1=v_2=0.2, 2.0, 20$  の場合に  $v_0=0.02, 2.0, 200$  と変化させたときの推定結果を表1に示す。この計算はIBM PCでGAUSSを利用して行なったが、1本の回帰式の分析に要する処理時間は3秒弱であり、ここで提案されている計算方法が十分実用になることを示している。表の数値は事後分布のモードであり、その下のかっこ内の数値は事後分布の標準偏差である。あてはまりを評価するために  $R = \text{corr}(C, \hat{C})$  と残差の標準偏差  $s$ , および残差から計算された1次の自己相関係数  $\rho$  もあわせて示されている。

推定に用いたデータの期間は1967年第2四半期から1990年第1四半期までの23年間、 $T=92$  のサイズであり、 $C$  と  $Y$  は1985年価格、1兆円単位の最終消費支出(実質)と可処分所得(名目を民間最終消費支出のデフレーターで割ったもの)、また  $P$  はこのデフレーターから計算された対前期伸び率(パーセント)である。 $\delta_t$  についての数値はこの表には含めていないが、 $v_1=v_2=2.0$  のケースについてのみ図1から図3に示しておいた。

この結果から  $v_0=200$  程度ではほぼ完全に一定の

表1 ベイジアン手法による消費関数の推定結果

$v_0$	$v_1=v_2=0.2$			$v_1=v_2=2.0$			$v_1=v_2=20$		
	0.02	2.0	200	0.02	2.0	200	0.02	2.0	200
$\alpha$	0.7383 (0.0023)	0.8659 (0.0444)	0.8520 (0.0526)	0.6976 (0.0023)	0.8624 (0.0443)	0.8494 (0.0480)	0.6966 (0.0023)	0.8494 (0.0837)	0.8316 (0.0570)
$\gamma_0$	-0.3130 (0.0013)	-0.2321 (0.0349)	-0.2278 (0.0488)	-0.2911 (0.0012)	-0.2382 (0.0344)	-0.2291 (0.0487)	-0.2904 (0.0012)	-0.2524 (0.0344)	-0.2408 (0.0538)
$\beta_0$	0.1058 (0.0010)	0.1673 (0.0304)	0.1897 (0.0313)	0.0682 (0.0005)	0.1557 (0.0291)	0.1867 (0.0306)	0.0676 (0.0005)	0.0501 (0.0154)	0.0900 (0.0210)
$\beta_1$	0.0569 (0.0009)	-0.0238 (0.0333)	-0.0483 (0.0342)	0.0674 (0.0005)	-0.0131 (0.0305)	0.0480 (0.0333)	0.0676 (0.0005)	0.0318 (0.0131)	0.0449 (0.0189)
$\beta_2$	0.0316 (0.0008)	-0.0526 (0.0299)	-0.0922 (0.0315)	0.0669 (0.0005)	-0.0433 (0.0275)	-0.0877 (0.0307)	0.0676 (0.0005)	0.0235 (0.0126)	0.0052 (0.0179)
$\beta_3$	0.0375 (0.0010)	0.0242 (0.0297)	-0.0229 (0.0290)	0.0669 (0.0005)	0.0188 (0.0282)	-0.0221 (0.0284)	0.0676 (0.0005)	0.0238 (0.0147)	-0.0033 (0.0199)
$\gamma_1$	0.0417 (0.0010)	0.0861 (0.0352)	0.1388 (0.0516)	-0.0171 (0.0005)	0.0841 (0.0335)	0.1301 (0.0499)	-0.0187 (0.0005)	0.0144 (0.0185)	0.0227 (0.0303)
$\gamma_2$	0.0153 (0.0008)	0.0214 (0.0358)	-0.0044 (0.0531)	-0.0178 (0.0005)	0.0236 (0.0324)	-0.0008 (0.0547)	-0.0187 (0.0005)	0.0045 (0.0163)	0.0016 (0.0263)
$\gamma_3$	-0.0356 (0.0007)	-0.0623 (0.0341)	-0.1147 (0.0519)	-0.0191 (0.0005)	-0.0586 (0.0308)	-0.1046 (0.0486)	-0.0187 (0.0005)	-0.0101 (0.0159)	-0.0225 (0.0260)
$\gamma_4$	-0.0535 (0.0009)	-0.0391 (0.0345)	-0.0159 (0.0542)	-0.0197 (0.0005)	-0.0416 (0.0327)	-0.0231 (0.0521)	-0.0187 (0.0005)	-0.0144 (0.0179)	-0.0253 (0.0304)
$R$	1.0000	0.99973	0.99911	1.0000	0.99973	0.99910	1.0000	0.99967	0.99886
$s$	0.00026	0.23835	0.43625	0.00027	0.23846	0.43649	0.00028	0.26382	0.49262
$\rho$	-0.25504	-0.10229	0.00625	-0.18656	-0.09833	0.01052	-0.18440	-0.04856	0.07270
$\Sigma\beta$	0.2318	0.1151	0.1229	0.2694	0.1181	0.1249	0.2704	0.1292	0.1368
$\Sigma\gamma$	-0.0321	0.0061	0.0038	-0.0737	0.0075	0.0016	-0.0748	-0.0056	-0.0235

注:  $d_1=d_2=0$  のケース。推定期間は1967年第1四半期から1990年第1四半期まで。

数値は事後分布のモード、( )内は事後分布の標準偏差。 $\delta_i$ の値は省略。

$R$ は $C$ と $\hat{C}$ との相関係数。 $s$ は残差の標準偏差。 $\rho$ は残差の1次の自己相関係数。

$\Sigma\beta$ は $\beta_0$ から $\beta_3$ までの和。 $\Sigma\gamma$ は $\gamma_1$ から $\gamma_4$ までの和。

季節変動に対応していること、 $v_0=0.02$ 程度ではまだ緩やかな変化は十分実現されていないことなどが読みとれる。当然のことながら、 $v_0$ が小さいときには $R$ はほとんど1に近くなり、 $s$ は極めて小さくなるから、事後分布の標準偏差もまた小さくなっている。しかし、これは必ずしもモデルのよさを表しているわけではない。

$\delta_i$ の変化の程度から判断すると $v_0=2$ の付近の結果が適当と考えられるが、 $v_1, v_2$ の変化に対応する $Y$ と $P$ のラグ係数に関しても同様な動きが見られる。たとえば $v_1=v_2=20$ のときには $\beta_0=\dots=\beta_3$ および $\gamma_1=\dots=\gamma_4$ が成り立っている。すなわち $\Delta\beta_i=0, \Delta\gamma_i=0$ がほぼ満たされており、分布ラグの代わりに説明変数として $\sum_i Y_{t-i}/4$ および $\sum_i P_{t-i}/4$ を用いた分析と数値的に一致している。また $v_1=v_2=2$ のときにはまだ $\Delta\beta_i=0$ などが近似的に満たされているが、 $v_1=v_2=0.2$ 程度に小さくなると $\beta_i, \gamma_i$

ともに緩やかな変化を示している。

ところで舟岡[5]では、説明変数の符号条件として $P$ が負、 $P^e$ が正の影響を与えることが指摘されている。実際、第一次石油危機の時期における彼の推計でもこれらの条件が成り立っている。

表1の最後の2行は $Y$ と $P^e$ の効果をみるために、分布ラグの係数の和を示したものである。特に $\sum_{i=1}^4 \gamma_i$ の符号が場合によって違っていることが観察される。この表の中では、ある程度の滑らかな分布ラグを示す $v_0=v_1=v_2=2.0$ の場合が、符号条件も満たしており、一応もっともらしい結果と言えよう。

以上のようなベイジアン手法を用いないときには、アーモン・ラグのような多項式の分布ラグと、季節ダミー変数を利用することになる。そのような標準的なプログラムも多数存在しているが、ここでは表1の式を計算したものと

図1  $\delta_t$  の変化  $v_0=0.02, v_1=v_2=2$

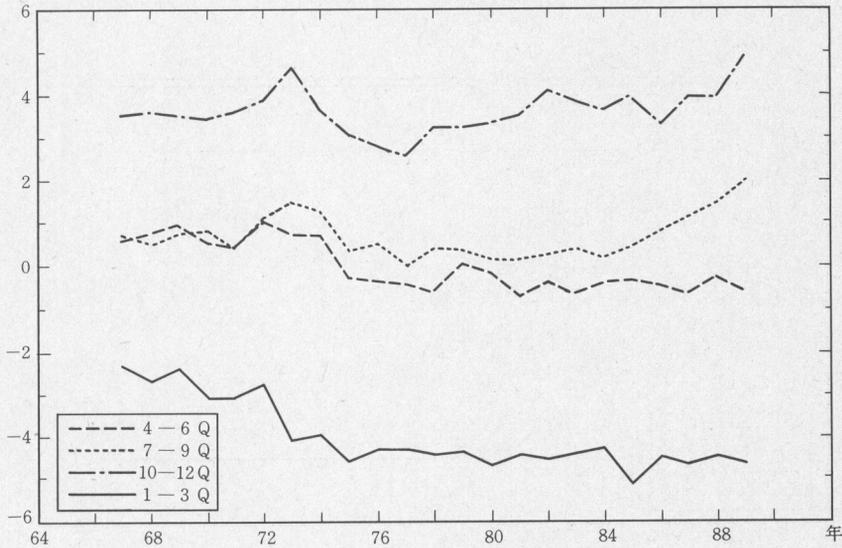
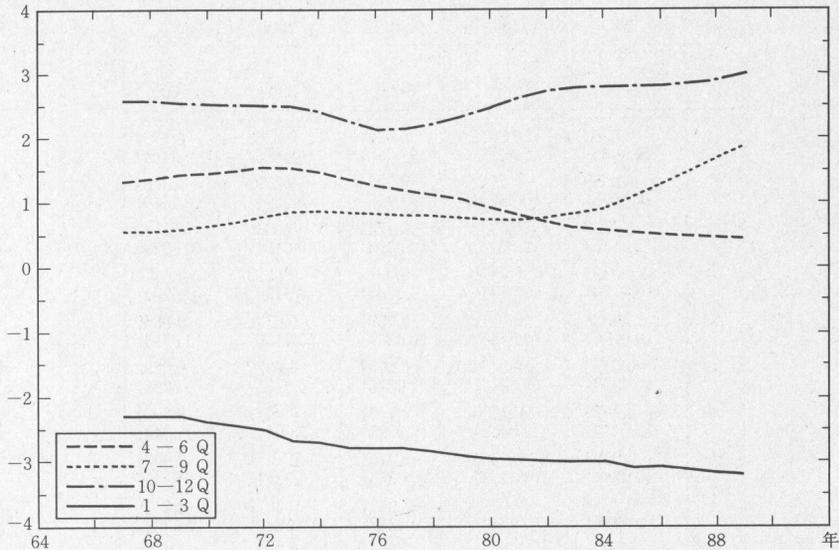


図2  $\delta_t$  の変化  $v_0=2.0, v_1=v_2=2$



一のプログラムで、滑らかさのパラメータ  $v_0, v_1, v_2$  を変化させた場合を表2に示す。表の左側の3列の結果は、多項式分布ラグと季節ダミーを利用した最小2乗法の結果と数値的に小数点以下第3位まで一致した。またパラメータの事後分布の標準偏差は、最小2乗推定量の標準誤差に一致している。

一番左の  $d_1=d_2=0, v_0=200, v_1=v_2=1000$  のケースでは  $\beta_i$  にわずかな違いがあるが  $\gamma_i$  は完全に等しくなっている。また、2列目は  $d_1=d_2$

$=1$  すなわち1次式の分布ラグであるが、この数値について1階の階差を取ると  $\Delta\beta_i=0.0560$  ( $i=0, 1, 2$ ),  $\Delta\gamma_1=0.0728, \Delta\gamma_2=\Delta\gamma_3=0.0729$  となり、わずかな誤差はあるものの両方ともたしかに1次式の関係になっている。3列目(および5列目)は  $d_1=d_2=2$  で、このケースについては3階の差分を表に記してあるが、それによるとほぼ正確に2次式の関係にあることが確かめられる。

表の右側の2列は  $v$  の変化が事後分布にど

図3  $\delta_i$  の変化  $v_0=200, v_1=v_2=2$

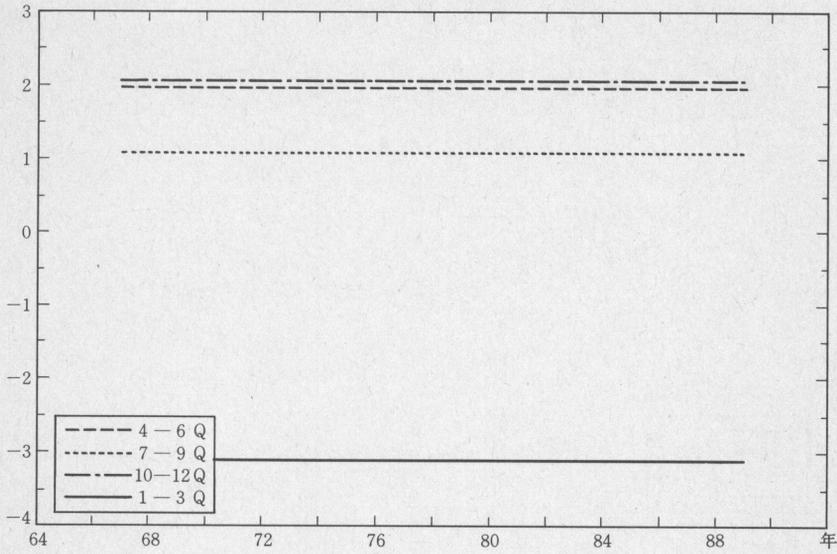


表2 強い制約条件の下での推定結果

$v_0$	200	200	200	200	2.0
$d_i$	0	1	2	0	2
$v_i$	1000	1000	1000	500	1000
$\alpha$	0.8362 (0.0626)	0.8078 (0.0555)	0.8627 (0.0538)	0.8362 (0.0626)	0.8631 (0.0444)
$\gamma_0$	-0.2395 (0.0595)	-0.2562 (0.0526)	-0.2286 (0.0496)	-0.2395 (0.0595)	-0.2304 (0.0349)
$\beta_0$	0.0329 (0.0130)	0.1236 (0.0239)	0.1741 (0.0295)	0.0330 (0.0131)	0.1710 (0.0299)
$\beta_1$	0.0329 (0.0130)	0.0676 (0.0137)	-0.0012 (0.0261)	0.0329 (0.0130)	-0.0177 (0.0231)
$\beta_2$	0.0328 (0.0130)	0.0116 (0.0130)	-0.0594 (0.0263)	0.0328 (0.0130)	-0.0650 (0.0219)
$\beta_3$	0.0328 (0.0030)	-0.0444 (0.0227)	-0.0007 (0.0278)	0.0327 (0.0131)	0.0292 (0.0292)
$\gamma_1$	-0.0078 (0.0244)	0.1034 (0.0455)	0.1477 (0.0529)	-0.0077 (0.0244)	0.0921 (0.0344)
$\gamma_2$	-0.0078 (0.0244)	0.0306 (0.0253)	-0.0181 (0.0385)	-0.0078 (0.0244)	0.0001 (0.0249)
$\gamma_3$	-0.0078 (0.0244)	-0.0423 (0.0253)	-0.0817 (0.0382)	-0.0078 (0.0244)	-0.0448 (0.0231)
$\gamma_4$	-0.0078 (0.0244)	-0.1152 (0.0455)	-0.0431 (0.0542)	-0.0078 (0.0244)	-0.0429 (0.0336)
$R$	0.99860	0.99892	0.99906	0.99860	0.99973
$s$	0.54708	0.48037	0.44816	0.54594	0.23924
$\rho$	0.07200	0.02303	-0.02397	0.07207	-0.10506
$\Sigma\beta$	0.1314	0.1584	0.1128	0.1314	0.1175
$\Sigma\gamma$	-0.0312	-0.0235	0.0048	-0.0311	0.0045
$\Delta^2\beta$			0.0000		-0.0001
$\Delta^2\gamma$			0.0002		0.0003

注：指定期間および記号については表1を参照のこと。  
 $d_i$  および  $v_i$  は  $i=1, 2$  について共通の条件を表している。

の程度の影響を与えるかを見るためのものである。\$v\_1=v\_2\$を1000から500に小さくしてみても \$d\_i=d\_2=0\$のときには \$\beta\_i, \gamma\_i\$ともにそれほど大きな変化はないこと、一方 \$d\_1=d\_2=2\$のときに \$v\_0=2\$とした場合にはやや違いが大きいことなどが読みとれる。後者の場合には \$\delta\_t\$の動きも可変的になるが、その変化は図2と類似のものであるので図は省略する。先に述べた符号条件を考えると、この表の中では \$Y\$および \$P^e\$として2次式を利用したものだけが採用できることになろう。

以上の表は、簡単のためにラグの短いもののみを記したが、ラグが長くなるとアーモン・ラグでは多項式の次数を高くしないと回帰式のあてはまりが悪くなるという傾向がある。ところがそのときには \$P^e\$の符号条件が満たされなくなってしまうことが多いし、分布ラグのパターンも正負が大きく変動して解釈が難しくなる。一方、シラー・ラグの方法によれば、ラグが長くても滑らかに変化するパターンを実現できるので、解釈も符号条件の確認も容易に行える。また、季節変動パターンの緩やかな変化を実現するために類似の滑らかさの母数 \$v\_0\$を利用しているのだから、方法的にも自由度の高いシラー・ラグを利用するのが自然であろう。

これまでに述べた手法は、もう少し違うモデルにも適用することができる。たとえば

$$y_t = \sum_{j=1}^4 D_j \left( \sum_{i=0}^j \beta_{i,j} x_{t-i} \right) + \sum_{j=1}^p \gamma_j z_{jt} + u_t \quad (11)$$

のように \$x\_t\$の係数が季節によって異なるモデルも考えられるが、この場合にも上記の方法を拡張して、各季節の係数が年とともに次第に変化するモデルを表現することも可能である。

## 6 付 論

### 6.1 漸近バイアスの導出

ここでは(4)式を導くために、まず次のように記号を定義する。\$X\_+\$は \$(T+2k) \times (l+1)\$次元の行列であり、これは元の説明変数行列 \$X\$を前後にそれぞれ \$k\$期ずつ拡張したものである。同様に \$y\_+\$も \$y\$を前後に拡張した \$(T+2k)\$次元のベクトルとする。また \$w\_y, w\_x\$を

それぞれ \$w\_y(s), w\_x(s)\$を並べた \$(2k+1)\$次元のベクトルとする。さらに任意の \$(2k+1)\$次元のウェイトベクトル \$w\$に対して、\$w\$の後に \$T+1\$個の0を並べた行ベクトルを巡回的に横にくり返し並べた \$T \times (T+2k+1)\$の行列を \$L(w)\$と定義する。すなわち \$L(w)\$を

$$\begin{pmatrix} w_{-k} & w_{-k+1} & \cdots & w_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{-k} & w_{-k+1} & \cdots & w_k & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & w_{-k} & w_{-k+1} & \cdots & w_k \end{pmatrix}$$

とする。このとき移動平均のベクトルは、たとえば \$y^\* = L(w\_y)y\_+\$と表すことができる。同様に、移動平均を施した後のラグ付き説明変数の行列も \$X^\* = L(w\_x)X\_+\$と書ける。以上から(3)式は \$y = X\beta + u\$と表されるが、この式は拡大された期間でも成立するから \$y\_+, X\_+\$などで置き換えてもいい。ここで \$y\$の移動平均を取ると

\$y^\* = L(w\_y)y\_+ = L(w\_y)X\_+\beta + L(w\_y)u\_+\$を得る。いま \$y^\*\$を \$X^\*\$に最小2乗法で回帰して \$\hat{\beta}^\*\$を求めると、\$T \to \infty\$のとき

$$\frac{1}{T} (L(w_x)X_+)' L(w_y)u_+ \rightarrow 0$$

が成立するという条件の下で

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^* &= (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}y^* \\ &= (X^{*'}X^*)^{-1}X_+'L(w_y)' \\ &\quad [L(w_y)X_+\beta + L(w_y)u_+] \\ &\rightarrow \left[ \frac{1}{T}X_+'L(w_x)'L(w_x)X_+ \right]^{-1} \\ &\quad \left[ \frac{1}{T}X_+'L(w_x)'L(w_y)X_+ \right] \beta \end{aligned}$$

となる。したがって漸近バイアスは

$$\hat{\beta}^* - \beta \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T}X_+'L(w_x)'L(w_x)X_+ \right]^{-1}$$

$$\left[ \frac{1}{T}X_+'L(w_x)'(L(w_y) - L(w_x))X_+ \right] \beta$$

で与えられる。

### 6.2 確率的線形制約のベイズ理論

ここでは線形回帰モデル \$y = X\beta + u\$において、回帰係数 \$\beta\$に線形の制約条件が確率的に与えられたときの、一般的な結果を記しておく。モデルにおいて \$y\$および \$u\$は \$T\$次元のベクトル

ル、 $X$  は  $T \times p$  の行列、 $\beta$  は  $p$  次元のベクトルとする。誤差項の分布としては正規分布  $u \sim N(0, \tau^{-1}I)$  を想定する。ここで条件  $r - R\beta \approx 0$  が確率的に成立する、すなわち事前情報が  $r - R\beta \sim N(0, (\tau V)^{-1})$  という事前分布で与えられる場合を想定する。ただし  $r$  および  $R$  はそれぞれ  $k$  次元の定数ベクトルおよび  $k \times p$  次元の定数行列であり、 $V$  は  $(k \times k)$  次元の既知の精度行列(分散行列の逆行列)とする。 $\beta$  についてはこれ以外の情報がないとすると、厳密な議論としては  $(p-k)$  次元の追加的なパラメータ  $w_1 \sim N(0, M)$  を導入し、これと  $k$  次元の  $w_2 = r - R\beta$  から  $\beta$  の事前分布へ変換することによって「真の」事前分布(proper prior distribution)を定義し、事後分布を導いた後に  $M \rightarrow \infty$  とすれば、improper prior distribution による困難を避けることができる。しかし、いまの問題においては初めから  $M \rightarrow \infty$  として

$$p(\beta | \tau) \propto \tau^{\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(r - R\beta)' V (r - R\beta)\right\}$$

としても困難は生じないことが確かめられる。さらに  $\tau$  に関しては、一般的にはガンマ分布を想定するが、ここでは  $w_1$  の分布に情報のない分布(non-informative prior distribution)を用いるのと同じく、簡単のため

$$p(\tau) \propto \tau^{-1}$$

という improper prior を想定する。もちろん、一般のガンマ分布を仮定しても、基本的な結論は同じ議論で導かれる。

この事前分布と、次の尤度関数

$$p(y | \beta, \tau) \propto \tau^{T/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(y - X\beta)' (y - X\beta)\right\}$$

から事後分布を求めることができるが、その導出は次のような工夫をすると、さらに容易になる。

$$\begin{aligned} p(\beta, \tau | y) &\propto \tau^{(T+k-2)/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}[(y - X\beta)' \right. \\ &\quad \left. (y - X\beta) + (r - R\beta)' V (r - R\beta)]\right\} \\ &= \tau^{(T+k-2)/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\tilde{y} - \tilde{X}\beta)' \right. \\ &\quad \left. (\tilde{y} - \tilde{X}\beta)\right\} \end{aligned}$$

ただし

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ UR \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ Ur \end{pmatrix}$$

は、それぞれ拡大された  $(T+k) \times p$  次元の行列と  $(T+k)$  次元のベクトルであり、 $U$  は  $U'U = V$  となるような行列とする。このとき上式の  $\exp$  の中は通常の回帰モデルの分解と全く同じ形となり、

$$(\tilde{y} - \tilde{X}\beta)' (\tilde{y} - \tilde{X}\beta) = (\beta - b)' \tilde{X}' \tilde{X} (\beta - b) + \tilde{y}' \{ \tilde{I} - \tilde{X} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \} \tilde{y}$$

と表される。ここで  $b = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \tilde{y}$  であり、 $\tilde{I}$  は拡大された  $(T+k)$  次元の単位行列である。

結局  $\beta, \tau$  の事後分布は「正規・ガンマ分布」となる。すなわち  $\tau$  が与えられたときの  $\beta$  の事後分布は、正規分布

$$\beta | \tau, y \sim N(b, \tau^{-1}(\tilde{X}' \tilde{X})^{-1})$$

であり、 $\tau$  の事後分布はガンマ分布

$$p(\tau | y) \propto \tau^{(T+k-p-2)/2} \exp\left\{-\frac{S}{2\tau}\right\}$$

となる。ただし  $S = \tilde{y}' \{ \tilde{I} - \tilde{X} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \} \tilde{y}$  とする。周知のように、このときの  $\beta$  の事後分布は  $t$  分布となる。

(青山学院大学経済学部)

本稿の作成にあたっては平成5年度文部省科学研究費補助金・一般研究(C)課題番号0503007の助成を受けた。

#### 参考文献

- [1] Akaike, H. (1980) "Likelihood and the Bayes Procedure," in *Bayesian Statistics*, proceedings of the first international meetings held in Valencia (Spain), (Bernardo, J. M. et al. eds.), Valencia University Press, pp. 143-203.
- [2] Kitawaga, G. and W. Gersch (1984) "A Smoothness Prior - State Space Modeling of Time Series with Trend and Seasonality," *Journal of the American Statistical Association*, 79, pp. 378-389.
- [3] Shiller, R. J. (1973) "A distributed lag estimator derived from smoothness priors," *Econometrica*, 41, pp. 775-788.
- [4] 廣松毅・藤原直哉(1990)『計量経済学の実際』新世社。
- [5] 舟岡史雄(1978)「物価上昇と個人消費」、『経済評論』第27巻2号, pp. 118-129.
- [6] 美添泰人(1983)「ベイズの手法による統計分析」, 竹内啓(編)『計量経済学の新展開』東京大学出版会, 第6章, pp. 155-184.
- [7] 美添泰人(1987)「ベイズの手法による2項回帰モデルの推定法」, 鈴木雪夫・竹内啓(編)『社会科学の計量分析』東京大学出版会, 第3章, pp. 47-70.