定常確率過程の経済分析への應用

経済学研究科第2学年
森田ゼミナール
溝　口　敏　行

(目　次)

1. 序

多くの統計量は、時間の変化に伴なつて変動している。例えば、太陽の黒点数にしてもそうであるし、又経済諸変数も又同様である事は周知の事実であろう。勿論、之等の変動要因は根本的に異つたものであろうが、その分析の才一歩として数学モデルで表現しようとする試みは当然生じて来べき共通の問題である。

先ず才一に考えられる数学モデルは、之等の変動を周期函数の合成函数として表わさんとする試みであり、[註1] A. Schester の一連の論文は、この代表的な一例であろう。

しかし、現実のデーターが、厳密な周期函数によつて表わされるとする仮定は、あまりにも厳格であるとの批判を、まぬがれる事は出来ない。従つて、変動の説明に確率的要素を導入した事は有意義な事であつた。その方法の才一は現実データーの値が周期函数の部分とランダムの変数の和として表わされるとの仮定であり、H. Wold[註2] に依つて「Hidden Periodicity」に依る方法と名附けられたものである。しかしこの仮定にしても、やはり前述の非難をさける事は出来ない。

才二の方法は G. Yule によつて始められた「線型確率定差方程式」に依るものがある。即ちこの方法に於いては、現実データーの価が、一定規則に従つ

たランダム変数の合成変数であると考えるわけである。今データーの価を$x(t)$[註3]平均0のランダム変数を$u(t)$とすれば、

$$x(t)=b_0u(t)+b_1u(t-1)+\cdots\cdots+b_ku(t-k)+\cdots\cdots \qquad (1.1)$$

なる関係で表わされると仮定しよう。この場合$x(t)$は0のまわりを、周期函数に似た曲線をえがいて変動する事が証明される。さてある数学的条件の下で（1.1）は

$$x(t)+a_1x(t-1)+\cdots\cdots+a_kx(t-k)+\cdots\cdots=u(t) \qquad (1.2)$$

の形に変形出来る。こゝで (1.1) で$b_k=0$ $(k>k_0)$ なる時、k_0次の移動平均系 Scheme of moving auerage といゝ又 (1.2) に於いて$a_k=0$ $(k>k_1)$ なる時k_1次の自己回帰 Scheme of autoregressionと呼ぶ事としよう。

之等の諸研究を「定常確率過程」Stationary stochastic process の立場でまとめたのが H. Wold (1938) であり、其後のこの分野に於る諸研究は、確率論に於るスペクトル理論と相まつて発展の一路をたどつている。

他方計量経済学の分野に於ては、景気変動論との関聯で取り上げられ、特に1946年のH. Mann & A. Woldの論文「線型確率定差方程式系について」は定常時系列分析を多変数の連立確率定差方程式の分野に拡張し、今日のモデルの最尤推定[註4]法の基礎を作つた事は、注目すべき事であろう。

本論では2、3に於て定常確率過程の前提を論じ、4に於てその応用の一例として、計量経済学ではあまり注目されていない検定論の問題を取り扱おう。

〔註 1〕 Schester の理論の紹介は T. Davis (1941) The Analysis of Economic Time Series 参照

〔註 2〕 Wold (1938)

〔註 3〕 (　) 内の価はその存在する時点を示す

〔註 4〕 母集団の密度函数が $f(x;\theta)$で表わされるとしよう。但しθは密度函数を決定するパラメーターである。さてこの母集団からNヶの標本 $(X_1 X_2\cdots\cdots X_n)$ を取り出し、その同次密度函数を $f(X_1X_2\cdots\cdots X_n;\theta)$ とする。今$=L=f(X_1X_2\cdots\cdots X_n;\theta)$ をθの函数とみなした時 L を尤度 likelihood といい、それを最大ならしむるθの推定値を最尤推定値という

2. 定常確率過程の前提

Nヶの確率変数よりなるベクトルを

$$X\equiv t[x_1(t)\ x_2(t)\cdots\cdots x_n(t)]$$

で表わし、Xtの系列 $\{Xt\}$ $(t=0\pm1\pm2\cdots)$を考えよう。この場合 $\{Xt\}$ は

（離散）確率過程という。更に$\{Xt\}$が（弱）定常であるとは

$$E\,[Xt]=M \quad (一定) \tag{2.1}$$

$$E\,[(Xt-M)'\,(X\tau-M)]=V(|t-\tau|) \tag{2.2}$$

の条件を満す事をいう。こゝで′はベクトル又はマトリックスの転置形を示し、Mは定数を要素とする(ln)ベクトル、$V(|t-\tau|)$は分散共分散マトリックスが$|t-\tau|$にのみ依存する事を示す。さてこゝで$|t-\tau|=0$とすれば

$$E[(Xt-M)'(Xt-M)]=V(0) \quad (一定) \tag{2.3}$$

となり、従つて

$$E[\{x i(t)\}^2]=一定 \tag{2.4}$$

の結論が出る。即ち定常性の要求するものは

1. 平均値一定
2. 分散一定

の仮定である。この様な仮定は、少なくとも短期的には、多くの自然現象に当てはまるものであるが、経済現象にとつてはあまりにも厳格である。之を回避する方法として、今迄とられて来た方法が、いわゆる「トレンドの除去」といわれるものである。[註1] さて(2.1)の仮定をゆるめて

$$E[Xt]=Mt \tag{2.5}$$

としよう。但しMtはtに依存するベクトルで

$$Mt\equiv[m_1(t)\,m_2(t)\cdots\cdots m_n(t)] \tag{2.6}$$

$$mi(t)=E[x i(t)] \quad (i=1\ 2\cdots\cdots n) \tag{2.7}$$

で表わされる。こゝで(2.2)を一般化して

$$E[(Xt-Mt)'\,(X\tau-M\tau)]=V(|t-\tau|) \tag{2.8}$$

ならば、M^tのまわりに同一分散の変動を示すであろう。この考えに依るものが過去に行われて来た減法を用いたトレンド除去法であり、テイントナー[註2]のVariate Difference Methord もこの一種であろう。之に対して変動の大きさが、平均値の大きさに比例するとの考えから$mi(t)\neq 0\,(i=1,2\cdots n)$に対して

$$X_t\equiv\left(\frac{x_1(t)}{m_1(t)}\quad\frac{x_2(t)}{m_2(t)}\quad\cdots\cdots\quad\frac{x_n(t)}{m_n(t)}\right)$$

考えよう。1で$[\,|,|_1\cdots\cdots1\,]$のベクトルを示せば

$$E\,[Xt]=1 \tag{2.9}$$

$$E\,[(Xt-1)'\,(X\tau-1)]=V(|t-\tau|) \tag{2.10}$$

を仮定する除去法もある。

いずれの方法を取るにしても、平均値の時間的変化を経済変動より分離し得

るとの仮定があり、この点に激しい批判があびせられている。

本論ではこの問題は後にふれる事として、以下トレンドを除去した変数について取扱う事としよう。

さてトレンドを除去した変数は平均値一定であるから、簡単な変数変換に依り平均0の確率変数ベクトルと考える事が出来る。之を新たに Xt で表わす事としよう。従つて

$$E[X_t]=0 \tag{2.11}$$

$$E[X_t{}' X_\tau]=V(|t-\tau|) \tag{2.12}$$

となる。

こゝで定常過程の重要な一形態を考えよう。 U^tで

$$U_t \equiv [U_1(t)\, U_2(t) \cdots\cdots U_n(t)]$$

$$E[U_t]=0 \tag{2.13}$$

$$E[U_t{}' U_\tau]=\delta_{t\tau}\Sigma \tag{2.14}$$

なる正規変数ベクトルを考えよう。こゝで

$$\delta_{t\tau}=0\ (t \neq \tau)$$
$$=1\ (t=\tau)$$

を示す。更に ε^{-R}で

$$\varepsilon^{-R} x_i(t)=x(t-R) \tag{2.15}$$

なる演算を表わす事とし、I で(n,n)単位行列

$A_i(i=1,2\cdots p)$で(n,n)行列を示す時

$$[I+A_1\varepsilon^{-1}+A_2\varepsilon^{-2}+\cdots+A_p\varepsilon^{-p}]X_t{}'=U_t{}' \tag{2.16}$$

は一般化された自己回帰系をなすという。特に左辺に於いて

$$x_i(t-R)=A_i^{p-R}\ (i=1,2\cdots n,\ R=0,1,\cdots p) \tag{2.17}$$

と代置し、左辺＝0と置いた場合の n 元 p 次方程式の根 ―― 之を特性根という――の絶体値が 1 より小なる時、その変数間の分散・共分散の確率極限は存在し、又そのパラメーターの最尤推定値は一致性及漸近有効性を有する事が証明される。 (Mann & Wald:1946) もしこの条件が満足されるならば、之は定常過程分析の一部に他ならず、この前提は 3 の展開に重要な地位をしめるものである。

〔註 1〕 多くのトレンドの定義は数学的表示をしていないものが多い。本論では平均値函数とトレンドを同一視するが、之はいわゆるトレンドの定義よりはやゝ広い範囲にわたるものである。

〔註 2〕 Tintner (1940) the Variate Difference.methord.

3. 経済モデルと自己回帰系

以上進めて来た理論はまつたく形式的なものであつた。しかも、もし之等の形式に経済学的理論が追加されるならば、過去に形式理論の中で完成された技術は、そのまゝ計量経済学に於て有効な力を発揮する事となろう。

経済理論に於ては先ず与件を設定し、その与件に仮説を与え、その前提の下で諸変数間の決定関係を論ずるわけである。しかし計量経済学に於てはこの様な仮定は許されない。経済変数は、（与件の条件を満しているとは限らない）与件の変数の影響を受けているのである。この問題を解決する一方法は内変数と外変数との区別であろう。即ち経済モデル内で説明され得る変数を内変数、内変数には影響を与えるが内変数にかゝわりなく決定される変数を外変数と呼び、内変数ベクトル、外変数ベクトルを

$$Y_t \equiv [y_1(t)\ y_2(t) \cdots\cdots y_n(t)] \tag{3.1}$$

$$Z_t \equiv [Z_1(t)\ Z_2(t) \cdots\cdots Z_m(t)] \tag{3.2}$$

で示す事としよう。A_i $(i=0.1\cdots p)$　B_i $(i=0.1\cdots q)$　でそれぞれ　$(n\ n)$ $(n\ m)$　マトリックスを示す事とし、更に (2.15) の記号を用いて経済理論が

$$[\mathbf{A}_o+\mathbf{A}_1\varepsilon^{-1}+\cdots\cdots+\mathbf{A}_p\varepsilon^{-p}]\ Y_t'+[\mathbf{B}_o+\mathbf{B}_1\varepsilon^{-1}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\mathbf{B}_q\varepsilon^{-q}]\ Z_t'=0 \tag{3.3}$$

として表わされたとする。こゝで少くとも $\mathbf{A}_o$ は非特異マトリックスであるとする。

この経済理論から説明される被説明変数は、現実データーに於いては、モデルに含まれない数多くの説明変数の影響を受けているものと考えられる。

之等の変数の総合効果が平均 0 の非特異正規変数 $\mathbf{U}t$ で表わされるものとして、之を（3.3）に導入すれば

$$[\mathbf{A}_o+\mathbf{A}_1\varepsilon^{-1}+\cdots\cdots+\mathbf{A}_p\varepsilon^{-p}]\ Y_t'+[\mathbf{B}_o+\mathbf{B}_1\varepsilon^{-1}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\mathbf{B}_q\varepsilon^{-q}]\ Z_t'=\mathbf{U}t' \tag{3.4}$$

となり両辺に $\mathbf{A}_0^{-1}$ を左乗すれば

$$[I+A_1\varepsilon^{-1}+\cdots\cdots+A_p\varepsilon^{-p}]\ Y_t'+[B_o+B_1\varepsilon^{-1}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+B_q\varepsilon^{-q}]\ Z_t'=U_t \tag{3.5}$$

となる。但し

$A_i=\mathbf{A}_o^{-1}\mathbf{A}_i$　　$(i=1,2\cdots\cdots p)$

$B_i=A_o^{-1}\mathbf{B}_i$　　$(i=1,2\cdots\cdots q)$

$U_t=A_o^{-1}\mathbf{U}t$　　である。

こゝで（3.5）を（3.4）の誘導形 Reduced form と呼ぶ事とする。

さて (3.5) に於ける統計的推測結果より (3.4) を推測する為には (3.5) より (3.4) への変換が「各要素を一定倍するという無意味な変換以外の変換」が生じない様な制約条件が (3.4) に対して課されなければならない。これがアイデンテイフイケイションの問題と呼ばれているものである。[註1] こゝではアイデンテイフイケイションの条件を満足しているものと仮定して誘導形に対する推測理論を考えよう。

さて計量経済学に於ける分析法の有力な手段は最尤推定法に依る方法である。[註2] これは先に述べた Mann=Wald の方法を Koopmans=Rubin=Leipnik が外変数を含む場合に一般化したものであり、その基本的性質は定常過程に於る分析法であるといえる。即ち最尤推定法が標本理論で重視される性質は、その一致性（標本数が大なるにつれて、標本よりの推定値が母集団に於ける真の値に確率收斂する事）にあるのであるが、之が先に挙げたモデルに成立する為には次の仮定が必要である。

〔仮定 3.1〕　(3.5) に於いて内変数に関する定差方程式の特性根は 1 より小である。

〔仮定 3.2〕　外変数の標本共分散

$$m_{Z(K)Z(l)}(\tau\,\tau'\,T)=\frac{1}{T-\tau''}\sum_{t-\tau''}^{T}Z_K(t-\tau)\,(t-\tau') \qquad (3.6)$$

$$\tau''=\min(\tau,\tau')$$

は $T\to\infty$ に於いて有限値に確率收斂する。

〔仮定 3.3〕　(3.5) における Ut は

$$E\,[Ut]=0 \qquad (3.7)$$

$$E\,[Ut'\,Ut]=\delta t\tau\Sigma \qquad (3.8)$$

なる正規変数で

$$E\,[Ut'\,Zt]=0 \qquad (3.9)$$

を満す。

〔仮定 3.3〕の正規性の仮定については、過去に充分に論ぜられて来たところであるから、こゝでは取り上げない。[註4] 又 (3.6) の仮定は外変数の定義から要求される仮定であろう。[註5]

さて〔仮定 3.1〕は、明らかに定常過程分析下における自己回帰系のそれと同じであり、経済モデルの立場からいえば收斂系をなす事を示している。

次に〔仮定 3.2〕を検討するに当つて外変数が線形確率定差方程式で決定されると仮定してみよう。この考え方は少くなくとも才 1 次接近としては認めら

るべきであろう。経済モデル内に含まれる外変数ベクトルを Zt、Zt 決定に重要な役割を示すが、経済モデルには含まれない外変数ベクトルを(Z)tとし、更に

$$Zt \equiv 〔Ⓩt,\ (Z)t〕 \qquad (3.10)$$

を表わすとすれば、線形性の仮定から

$$〔I + D^{1}\varepsilon^{-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + D^{R}\varepsilon^{-R}〕\ Z^{t} = W t'$$

によつて Ⓩt が決定されるとしよう。こゝで Wt は Ut と同様の正規変数で、(3.6) より

$$E〔Ut'\,Wt〕 = 0 \qquad (3.12)$$

を満すものとする。さて、仮定 3.2 を満す為には Mann=Wald の結果から、(3.8) の特性根の絶体値は 1 より小でなければならない。即ち (3.11) は定常過程が自己回帰系をなす場合と同一の仮定を満しているといえよう。

さて以上示した如くコールズ・コミッション流の分析は本質的に収斂系のモデルを発展せしめたものであり、もし平均値一定を仮定すれば一定水準で振動を示すに過ぎない。しかるに現実データーは明らかな平均値の変化、特に上向きの移動——仮にこれを「成長トレンド」と呼ぶ事とする——が見出される。この問題をいかに解決すべきであろうか。

これは極めて困難な問題であるので、こゝではその一つの試みを述べるに止めて置こう。我々がよく経験する事であるが、内変数のみで自己回帰モデルを形成した場合、推定されたパラメーターは、その特性根を 1 より大ならしむる事が多いが、之に若干ケの外変数が追加された場合、その特性根を 1 より小ならしむる傾向を有する。さてこの様な方法で外変数の追加により特性根のすべてが 1 より小となつたモデルを考え、それが (3.5) の形になつたとしよう。両辺の期待値をとれば

$$My(t) \equiv 〔My_{(1)}{}^{(t)}\ \ My_{(2)}{}^{(t)} \cdots\cdots My_{(n)}{}^{(t)}〕$$

$$Mz(t) \equiv 〔Mz_{(1)}{}^{(t)}\ \ Mz_{(2)}{}^{(t)} \cdots\cdots Mz_{(m)}{}^{(t)}〕$$

$$My_{(i)}(t) = E〔Y_{i}(t)〕\quad (i=1, 2\cdots\cdots n)\ \ Mz_{(i)} = E〔Z\,i(t)〕\quad (i=1, 2\cdots\cdots m)$$

なる時

$$M'y(t)\quad A_{1}M'y(t-1) + \cdots\cdots + A_{p}M'y(t-p) + B_{t}M'_{2}(t)$$
$$+ B_{1}M'_{2}(t-1) + \cdots\cdots Mz'(t-q) = 0 \qquad (3.9)$$

なる関係が成立する。ここで $M_{2}(t)$=一定 とすれば、少なくとも「成長のトレンド」は生じない事は単純な定差方程式の理論より明らかであり、従つて「成長のトレンド」は、——構造の破壊なき限り——外変数のトレンドに依存する。従つて外変数のトレンドにある仮定がなされれば、そのパラメーターを推定し

(3.9) を解く事に依つて内変数のトレンドを求める事が出来る。

勿論この背後にはトレンドとサイクルが分離出来るとの仮定はありこの欠点に対する批判はまぬがれない。之を解決する為にはより積極的な理論が必要であろう。[註6]

〔註 1〕 Koopmans Rubin & Seipnik; "measuring equation system" Koopmans (ed) (1950)

〔註 2〕 右同133頁以後

〔註 3〕 印刷を簡単にするために、サフイツクスのサフイツクスは〔 〕の記号の中に入れた。

〔註 4〕 この批判については G.F Roos (1934) がある。

〔註 5〕 この条件で逆に外変数を定義する場合がある。

〔註 6〕 マルコフ過程を使用する分析は有望なもの丶一つである。

4. 定常過程分析の応用——検定論の導入について

さて、3で論じた様な方法で、経済モデルを定常過程の分析法と結合せしめた場合、後者に於ける統計理論は、前者に対して大きな効果を示すであろう。既に述べた推定論上の問題は、既に認められたところであり、又その最大なもの丶一つであろう。本節では今一つの例として、経済モデルに於ける変数選択の問題を示そう。勿論こ丶では、定常過程の応用上の制限を経済モデルは満していると仮定する。さて簡単な一例として、国民所得が

$$Y_t+aY_{t-1}=U_t \qquad (4.1)$$

の形に従うか、又は

$$Y_t+aY_{t-1}+bY_{t-2}=U_t \qquad (4.2)$$

に従うかの決定問題が生じたとしよう。これは $b=0$ の検定に他ならない。この様な問題に一つのヒントを与えてくれるものは1951年の P.Whittle の「時系列分析に於ける仮説検定である。この論文の考え方を経済モデルに適用し得る形に一般化して以下論ずる事とする。勿論、本論の主題がこの問題に存するわけではないから細述は別の機会にゆずつてその大綱のみを示す事とする。

表記法を簡単にする為に $X_t \equiv [Y_t\ Z_t]$ で表わす事とし、この分布を決定するパラメーターを θ で表わす事とする。更に X_t をTケの時点にわたつて観察した価を $X \equiv [X_1X_2\cdots X_T]$ で表わそう。今 θ の充足推定量[註1]をCで表わし、この推定の為に X の一部を消費し、その残りが $\widetilde{X_t}$ で表わされるとしよう。この時の θ が与えられた場合の条件附密度函数を $f(\widetilde{X}C\mid\theta)$ で表わす事とす

る。更に Θ の先験的分布を $h(\Theta)$ で表わせばベイズの定理[註2]を用いて θ と独立な密度函数

$$f^*(x)=\frac{\int hfd\Theta}{\int\int hfd\Theta dx} \qquad (4.3)$$

が得られる。しかるに $h(\theta)$ の形を我々は知る事は出来ないから $f^*(x)$ は求める事は出来ない。しかるに whittle はTが大なるにつれて $h(\theta)$ の影響が小なる事を主張して

$$f^*(x)\propto f(X\ I\ \hat{\Theta}) \qquad (4.4)$$

に依つて近似せしめ得る事を明らかにした。但しこゝで $\hat{\Theta}$ は θ の最尤推定値である。この仮定を肯定し之を3で考えたモデルに適用しよう。さて、 Ut 及び Wt の分散共分散マトリックスを各々 $\Sigma\ \Omega$ で表わし、$\|\quad\|$ で行列式の符号を示せば

$$f^*(YZ)\propto(|\hat{\Sigma}|\times|\hat{\Omega}|)^{-\frac{T-S}{2}}$$

なる結果が得られる。但しSはそのモデル内に含まれるパラメーターの数Tは観察時点数である。

さて以上の準備の下で本節初頭にかゝげた問題に移ろう。3で考えたモデルに対して若干ケの説明変数ベクトルの追加の効果を考える事とする。変数を追加する前のモデルに於けるパラメーターと独立な尤度を $f_0(YZ)$ とし説明変数ベクトルを追加した後のそれを $f_1(YZ)$ で示す事としよう。この f_0 f_1 に対して尤度比検定法と呼ばれている方法を適用する。即ち検定函数を

$$\lambda=f_0/f_1 \qquad (4.6)$$

と定めれば $0\leqq\lambda\leqq1$ なる事が証明される。説明変数の効果が極めて小であるならば $\lambda\fallingdotseq1$ となるから、λ の密度函数 $g(\lambda)$ に対して

$$\int_0^{\lambda_0}g(\lambda)d\lambda=\alpha \qquad (4.7)$$

なる λ_0 を定め、λ が $(0,\lambda_0)$ 中に入れば、有意水準 α で「変数追加の効果は無い」との仮説を棄却する事とする。さて (4.5) を (4.6) に代入すれば、Ω は内変数のモデルには依存しないから

$$\lambda\propto\lambda'=(|\hat{\Sigma}_{(0)}|\ \ |\hat{\Omega}|)^{-\frac{T-S_0}{2}}\Big/(|\hat{\Sigma}_{(1)}|\ \ |\hat{\Omega}|)^{-\frac{T-S_1}{2}} \qquad (4.8)$$

Tが S_1-S_0 に対して充分大ならば

$$\lambda'\fallingdotseq\left(\frac{|\hat{\Sigma}_{(0)}|}{|\hat{\Sigma}_{(1)}|}\right)^{-\frac{T-S_0}{2}}$$

となり λ' は外変数の決定機構とは独立である。最後に λ' の分布が求められね

ばならないが、これは 1952年に whittle が導いた定理を応用するのが有効である。即ちTが充分大なる時

$$\Psi^2 = \frac{-2\,(T-S_0-S_1)}{T-S_0}\log\lambda' \fallingdotseq -2\log\lambda' \qquad (4.10)$$

は漸近的に自由度 S_1-S_0 の X^2 分布をなす。かくて検定は完成された。

〔註1〕 Cがθの充足推定値であるとは結合密度函数 $f(x_1\cdots x_n i\theta)$ が $f=g_1(c\theta)\ g_2(x_1\cdots\cdots x_n)$ の形に書け、g_2がθと独立なる事をいう。

〔註2〕 ベイズの定理の利用には R.A. Fisher 一派の反対がある。

〔註3〕 Whittle (1951)

〔註4〕 Whittle (1953) の論文を一般化する事に依つて求められる。

5. 結　　論

本論で述べて来た事は一部を除けば特に新しい主張はない。むしろ定常時系列解析に於ける制限条件を明らかにし、もし経済モデルがこの条件を満し得る様な形にし得るならばその技術的効果が大なる事をのべて来たのである。

しかしそれと同時に、既にのべたごとく、定常性の仮定にはさけられない限界があり、之を乗り越えるにはエボルーテイブな確率過程の研究が必要であろう。今後の研究テーマとして取り上げたいと思う。終りとなつたが本論を一読御批判下さつた宮川公男氏に感謝の志を表させていたゞきたい。

参　考　文　献

Bartlett M.S. (1955) An Introduction to Stochastic Proces; Cambridge Koopmans T. (ed) (1950) Statistical Inference in Dynamic Economic model: Wiley.

Mann & Wald (1946) On Statistical Treatement of Linecr Stochastic Difference Equations: Econometrica 1946 suppl.

Whittle P (1951) : Hypothesis Testing in Time Series Analysis: Upsala. (1952) : Some Recent Contribution to the Theory of Stochastic Process: Appendix to wold "Astncy" seconded (1952)

(1953) : The Analysis of multiple Stationay Time Series; J. of Royal Statistical Soc. series B.

Wold H (1938) A Study in the Analysis of the Stationay Time Series Upsala. (1950) Demand Analysis; Wiley.