数学と弁証法について I

――マルクスの著作を中心に――

関　恒　義

はしがき

最近，ソヴェトの経済学界をはじめとして，マルクス主義経済学では数学利用の問題がさかんに論議されているが(1)，その基本的な方法的視点については，現在ではもはや異論の余地のないほどに十分に確立されているとみなすことができよう．たとえばソ連の『経済学教科書』でも次のように示されている．「数学的方法は，ただしい方法論でとりあつかうなら，量的側面から経済現象を研究するさいの補助手段として大きな積極的結果をもたらすことができる．ところがブルジョア経済学者たちは，具体的な経済現象の量的側面にこの方法をもちいるにあたって，質的側面，すなわち生産関係の性格を無視するか，または，この方法を，経済現象の本質を認識するための補助的な方法から基本的な方法にかえようとこころみる．こうした試みはいつも破産する(2)」．

基本的にはこうであるけれども，しかしじっさいにその利用を問題とするときには，それがどのような制約とどのような限界をもち，したがってそこにどのような意義があるのかといった具体的な検討については，現在のところまだ十分な解決はえられていないように思われ

(1) ソヴェトにおける討論の紹介として，次のものがある．有沢広己編『統計学の対象と方法――ソヴェト統計学論争の紹介と検討――』日本評論新社，昭和 31 年，岡稔「社会主義経済学における数学の利用」，思想，昭和 35 年 2 月号，山田耕之介「ソヴェト経済学における最近の数理的形式主義について」，立教経済学研究，昭和 35 年 2 月，野々村一雄ほか三氏「社会主義経済学の新しい展開」，経済評論，昭和 35 年 5 月号など．

(2) ソ連邦科学院経済学研究所著『経済学教科書』改訂第 3 版，1958 年，第 2 分冊，497～8ページ．

る．ときには，ランゲのように，ブルジョア経済学における数学利用をそのままうけいれて，労働価値論的なよそおいをこらして利用するという立場さえ登場している．ランゲの試みのなかには，マルクス主義の立場からは多くの欠陥が認められるように思われるが，ここでは，そのうちの一点だけを指摘しておこう．

たとえば，「投入産出分析にかんする若干の考察」のなかで(3)，ランゲは，投入産出の長期模型を設定し，その立場から雇用量と生産量を長期的に極大にするような方策を提言している．しかしそこでのランゲの分析には致命的な欠陥がある．長期を分析しているにもかかわらず「技術係数」を一定と仮定していることである．長期にとっては技術変化を無視してはなんらの方策も提言できないはずである．とくに社会主義社会にあっては，すみやかなたえざる技術変化が行われることがむしろ基本的なのだから，技術変化一定の仮定は非現実的であるのみならず，誤謬でさえある．このようなやり方は，歴史的発展の弁証法的性格を無視するものといわなければならない．あまつさえランゲには，ブルジョア的偏見さえ認められるのである．鋭角的ないい方をすれば，雇用量極大ということは資本主義社会においてこそ問題とはなれ，社会主義ではむしろ逆で，労働時間短縮の方向が問題となるべきであろう．ランゲの見解にはケインズ派的偏見の痕跡さえ見うけられるのである．

数学利用の具体的な方法の確立は，じっさいの利用の過程のなかから実践的に与えられるべきものであって，机上の計算だけで可能となるものではない．本論説では，そのような数学の実践的な意義について若干検討してみたいと思う．この論説は，数学の弁証法的基礎づけ，

---

(3) Применеиие математики в экоиомических исследованиях, под редакцией В. С. Немчинова, Москва 1959. 岡稔訳『マルクス経済学の数学的方法』上下，青木書店 1959～60 年．ランゲの論説は．стс. 241～50（邦訳では，上巻 231 ページ以下）に所収されている．この論説は，『The Indıan Journal of Statistics』Vol, 17, Part Feb　1957, からの再録である．ネムチノフのこの編著書は，ほかに社会主義圏における重要な数学利用の文献を収録している．

さらには数学利用の方法をめぐる筆者の一連の研究の一部をなすもので，ここではとくに，マルクスの著作に焦点をしぼることにする．

1.　マルクスおよびエンゲルスの数学研究について

マルクスが本格的な数学学習をはじめたのは，1858 年 (40 歳) ごろからで，1858 年 11 月 11 日づけのエンゲルスあての手紙には，「経済学の基礎的諸原理の研究にさいして，まったくいまいましいほど計算の誤りに妨げられるので，僕は失望してあらたに代数の速習にとりかかった．算術はいまだかつて物にしたことがない．しかし，まわりくどい方法によってではあるけれど，僕は代数をきわめてすみやかに克服することだろう」とのべている．この手紙は，マルクスの『数学遺稿』[(1)]の整理編纂に従事したヤノフスカヤによれば，マルクスの数学学習について伝える最初の消息であるといわれている[(2)]．マルクスは当時，『経済学批判』の著作にとりくんでいたのであるが[(3)]，手紙にいう「経済学の基礎的諸原理の研究」が，のちに『資本論』で体系化されることになった諸原理に関連するものであることはいうまでもない．

この時期から以後，マルクスの数学研究は多方面にわたる研究活動

(1)　マルクスの数学遺稿は，マルクス・エンゲルス・レーニン研究所の手により，Лод знаменем Марксцзма, No. 1, 1933, にはじめて発表された．邦訳は昭和 9 年にでている．

(2)　山中幸三訳『微分学の基礎と唯物弁証法』昭和 9 年．橘書店．93 ページ．訳者山中幸三氏は玉木英彦氏の変名で，本訳書はのち，玉木英彦・今野武雄訳著『カール・マルクス，数学に関する遺稿』昭和 24 年，岩波書店，におさめられている．この岩波書店版では，ヤノフスカヤの解説を敷衍した玉木氏の解説と．今野氏の論説，「歴史的科学としての自然科学の再編成の一つの試み」，思想，昭和 9 年 6 月号と，「マルクスの数学に関する遺稿について」，理論，昭和 23 年 3 月号，をあわせて収録している．以下では『数学遺稿』と略記する．

(3)　『経済学批判の準備的労作』ノート 1，「アルフレッド・ダリモン『銀行の改革について』批判」は，1857 年 1 月から執筆され，『経済学批判』は，1858 年 5 月から 1859 年 1 月までのあいだ執筆されている．

と実践活動のあいまをぬって，とくに『資本論』の著作活動と平行して着実にすすめられていく．『資本論』の著作活動は 1861 年からはじめられ，1865 年に本質的にはほぼ仕上げられ，多少の推稿ののち，その第一巻は 1867 年に刊行されている(4)．この当時の数学研究の消息を示すものとして，1863 年 7 月 6 日づけのエンゲルあての手紙のなかでマルクスは,「ひまな時間に僕は微分積分学を勉強している．ついでに！　僕のところにはこの問題にかんする書物があまっているから，もし君がこれを勉強したいとおのぞみなら，よろこんでそのうちのひとつを送ってあげよう．僕は，これが君の職業にはほとんど不可欠だろうと思っている」，とのべている(5)．また，1865 年 5 月 20 日づけのエンゲルスあての手紙にも，「ときには，というのはたえず書いてばかりいられるものではないから，微分 dx/dy をやっている．そのほかには何を読むしんぼうもできない．ほかの読書はすべて僕をすぐに書きもの机に追いかえすのだ」，とある(6)．このころのマルクスの数学研究は，もはや代数を克服して，微分積分学へ進展していることがわかる．ヤノフスカヤは，マルクスの数学研究の過程を次のように説明している．「代数の次には解析幾何がつずき，そのあとには微分学がつずいた．……特別の注意を彼は微分学のうえにはらった(7)」．

手紙にも示されているように，マルクスの数学研究は，著作活動に

（4）　第一巻の改訂第二版は 1872 年にだされている．第二巻以後は，マルクスの死後（1883 年歿），エンゲルスの手によって，第二巻は 1885 年に，第三巻は 1894 年に編集刊行された．また第四巻は『剰余価値学説史』として 1904～10 年にカウツキーによって歪曲された形で刊行されたが，のちマルクス・エンゲルス・レーニン研究所の全集版で，その完全版が刊行された．

（5）　『数学遺稿』橘書店版，93 ページ．

（6）　K. Marx, F Engels; Briefe uber "Das Kapital". Besorgt vom Marx-Engels-Lenin-Stalin-Institut beim ZK der SED. Dietz Verlag Berlin 1954. 岡崎次郎訳『マルクス・エンゲルス資本論に関する手紙』法政大学出版局 1954 年，上巻，137 ページ．以下同書の引用は『資本論に関する手紙』と略記する．

（7）　『数学遺稿』橘書店版，93 ページ．

あきたときとかひまなときに行われていたわけであるが，それが気休めのたぐいのものでなかったことは，『数学遺稿』に示されるようなマルクス独自の研究成果，つまり数学とくに微分学の弁証法的基礎づけの仕事をみればあきらかである．ただこの当時には，まだ既成の数学を修得することが中心で，マルクス独自の研究に着手するまでにはいたっていなかったようである．そのような研究があわられるのは1870 年代になってからで，この年代における数学研究については，エンゲルスが『資本論』第二巻および第三巻への序文で報告している．「1870 年以後ふたたび，主として病状のせいである休止がやってきた．いつものことだがマルクスはこの時期をもろもろの研究に利用した．農学，アメリカおよびことにロシアの農村事情，貨幣市場および銀行業，最後に自然科学——地質学や生理学，およびことに独立の数学的労作——がこの時代の多数の書抜帳の内容をなしている．1877 年の初めに，彼はふたたび本来的労作にたずさわりうるまでに健康を回復したことを感じた(8)」．この当時の「独立の数学的労作」が『数学遺稿』として知られているものである．そのほかにこの当時には，1875 年に第三巻への追加原稿として，「数学的に（方程式で）展開された剰余価値率の利潤率にたいする関係」が書かれている．だがこの原稿はほとんど『資本論』のなかへは取りいれられなかったようである．エンゲルスは第三巻第三章の注で，「原稿中にはなお，剰余価値率と利潤率との差額（$m'-p'$）にかんするはなはだ詳細な計算が見出されるが，この差額は種々の面白い特徴をおびており，またその運動はこの二つの率がたがいに遠ざかったり近づいたりする場合を示している．これらの運動は曲線でも表わされる．私がこの材料の採録を断念したのは，けだし，それが本巻の当面の目的のためにはたいして重要でなく，またここでは，この点をさらに研究しようとする読者にたいし，簡単に右のことを注意しておけばたりるからである」，とのべ

（8） 長谷部文雄訳，『マルクス，資本論』青木書店版，第二部，10 ページ．以下『資本論』の引用はすべて同書による．

ているが[9]，おそらく前記の追加原稿の主要内容の一部はこのような種類のものであったように思われる.

またこの当時に書かれた，1873 年 5 月 31 日づけのエンゲルスあての手紙のなかには，まことに印象的な個所がある．そこでマルクスは次のように指摘している.「長いあいだひそかに僕がとっくんでいた問題を，ここでムーアに話してみた．だが，彼は言う，問題は解けない，またはすくなくとも，それには多数の，しかも大部分はこれから初めて見出されるべき要因がはいってくるので，目下のところでは解けない，と．問題はこうだ．君も知るように，物価，割引率，等々の一年中の運動が上下するジグザグの形で表わされている表がある．僕はこれまで何度も——恐慌の分析のために——不規則な曲線をなすこの上下運動を計算しようと試みた．そして，そこから恐慌の基本法則を確定しようと思った（いまでも，充分に選別された材料をもってすればそれは可能だと思っている)．ムーアは，いま言ったように，この問題はしばらくは解決できないと考える．そして僕は当分はそれを断念することにきめた[10]」．このような自信にみちた指摘からみれば，この当時のマルクスの数学研究はそうとうていどの水準にまでたっしていたことがかうがえる．おそらくマルクスは，「恐慌の基本法則を導きだそう」という数学的な試みを何回かくりかえしたにちがいない．だがマルクスは，ムーアの忠告をいれてそれを断念せざるをえなかっ

（9）『資本論』第三部上，129 ページ．この点に関連して，エンゲルスは『資本論』第三巻への序言で次のようにのべている（『資本論』第三部上，18～9 ページ)，「第三章のためには，全一連の不完全な数学的仕上げがあり，ほかに，剰余価値率の利潤率にたいする関係を方程式で示す 70 年代のほとんど完全な一冊のノートもあった．私の友人サミュエル・ムーア……が私の代りにこのノートの仕上げを引受けてくれたが，この仕事については，古いケンブリッヂ出の数学者たる彼の方がはるかに有能だったのである。それで私は，彼のつくった摘要によって，ときどきは主要原稿を利用しつつ，第三章を完成した」.

（10）『資本論に関する手紙』下巻，266～7 ページ．文中のムーアについては註（9）のエンゲルからの引用文を参照.

たわけである．このマルクスの指摘がどのような含みをもっているのかつまびらかではないが，しかしこの指摘だけを，マルクスの全体系からきりはなしてあまりにも過大に評価してはならないだろう．その意味するところをマルクス主義的にあきらかにするためには，まだまだ数多くの中間項が解明される必要がある．おそらくマルクスの脳裏には，衰弱していく体力と闘いながらも，この中間項解明の問題がやきついて離れなかったにちがいない．だがこれはもはや，マルクスの生命力を超える問題となっていた．この仕事は，これ以後，エンゲルスにひきつがれることになるわけである．

エンゲルスが，数学の基礎づけをもふくめて組織的に自然弁証法の研究に着手したのは，前記のエンゲルスあてのマルクスの手紙がかかれた 1873 年以後であるといわれている(11)．1877 年に『反デューリング論』の序説，第一編，第二編が刊行され，翌年には第三編がでている．しかし 1883 年にマルクスがなくなってから，エンゲルスには，マルクスの残した『資本論』の第二巻と第三巻を整理して出版するという義務と，マルクスにかわって国際労働運動を指導するという義務があらたに課せられることになった．そのため数学および自然科学を弁証法的に基礎づけるという仕事はしばしば中断されなければならなかった．この辺の事情をエンゲルスは『反デューリング論』の第二版への序文で次のようにのべている．「カール・マルクスが死んでからは，私の時間はいっそうさしせまったもろもろの義務でしばられることになってしまったので，私は私の仕事を中絶しなければならなかった．私は，目下のところでは，この書物にのべた略説で満足して，獲得した成果をそのうち集大成して，またおそらくはマルクスのきわめて重要な数学上の遺稿といっしょにして，それを出版する機会があるのをまたなければならない(12)」．だが，この約束もはたされないままに，エンゲルスは 1895 年に歿してしまう．

(11)　『マルクス＝エンゲルス選集』大月書店版，第十五巻，550 ページ参照．以下同選集からの引用は『マル・エン選集』と略記する．

(12)　『マル・エン選集』第十四巻，12 ページ．

のち，マルクスの『数学遺稿』の方はマルクス・エンゲルス・レーニン研究所の手によって判読され，ヤノフスカヤらの努力によって1933年に「マルクス主義の旗の下に」第1冊に発表され(13)，また，エンゲルスの『自然弁証法』の方は，1825年にソ連で『マルクス＝エンゲルス・アルヒーフ』第二巻として出版され(14)，その後何回かの修正ののち，1941年に，マルクス・エンゲルス・レーニン研究所の全集版によって，ほぼエンゲルスの腹案どおりの版がだされた．エンゲルスの死後における，マルクス主義の数学観の仕上げについては，さらにレーニンの諸研究を検討する必要があるが，エンゲルス，レーニンについては次の機会にゆずることにする．

2.　『資本論』における数学の利用について

マルクスの数学研究が，『資本論』の著作活動と平行して，具体的な経済問題の解明と直接に結びついて行われていることは，上述したところからもあきらかであるが，『資本論』はまた，数学利用の正しい方法を準備するという面でマルクス主義の文献上きわめて重要な意義をもつ著書といえる．『資本論』のロシア訳の検閲にさいして，検閲委員会でさえ全員一致して次のような判定をくだしている．「この著者はその信念からすれば完全な社会主義者であり，またこの著書の全体が完全に明確な社会主義的性格をおびているとはいえ，叙述がけっして何人にも理解されるものとは言われえないこと，および，他面から見れば叙述が厳密に数学的に科学的な論証の形式を具えていること，を考慮して，委員会は，この著書の訴追が不可能であることを言明する(1)」．検閲委員会も『資本論』が数学的に厳密に論証されていることだけは認めることができたようである．しかしマルクスの数学利用法がたんに形式論理的観点だけから与えられているものでないことは

(13)　註 1 参照.

(14)　"Marx-Engels Archiv" Zeitschrift des Marx-Engels-Institut. vol II.

(1)　『資本論に関する手紙』下巻，264 ページ.

いうまでもない．『資本論』のなかでは，経済学の諸法則と対比させて，数学をはじめ諸科学の成果が豊富に引用されているのであるが，これらの引用の大部分は，主として弁証法的思考方法を理解するための一助としてつかわれている．

たとえば，第一巻，第九章「剰余価値の率と分量」のところで，労働力の価値と労働力の搾取度が与えられているときには，剰余価値の量は資本の可変的成分の大いさに正比例する，という法則が示されているが，これに関連してマルクスは次のようにのべている．「この法則は，外観を根拠とするすべての経験とは明かに矛盾する．誰でも知っているように充用総資本の百分比で計算してみて相対的に多くの不変資本とわずかの可変資本とを充用する紡績業者は，だからといって，相対的に多くの可変資本とわずかの不変資本とを運動させる製パン業者よりも小さい利得または剰余価値を獲得するわけではない．この外見的な矛盾を解決するためにはなお多くの中間項を要するのであって，それはあたもか，0/0 が一つの実数を表わしうることを理解するためには，初等代数学の立場からは多くの中間項を要するのと同じことである[2]」．ここでいう外見的な矛盾は，第三巻，第二編，第九，十章で，一般的利潤率の均等法則や，価値から価格への転形過程が説明されてはじめて解決されるわけであるが，この解決の過程がここでは，微分概念形成の過程，つまり 0/0 という外見的な矛盾が微分概念の導入によって解決される過程と対比されているのである．

このような対比は『資本論』のなかには随所に見うけられるのであるが，もう一つの例を説明しておこう．1868 年1月 8 日づけのエンゲルスあての手紙のなかでマルクスは次のようにのべている．「労賃が，その背後にかくされた一関係の非合理的な現象形態として示され，この関係が労賃の両形態たる時間賃金と個数賃金とにおいて精確に示されるということ．（高等数学でしばしばかような公式が見出されることは僕の助けになった）[3]」．ここでいう労賃のもつ非合理性とは，

（2） 『資本論』第一部上，520 ページ．

労賃形態が支払労働と不払労働とへの労働日分割の痕跡をすべて消しさって，すべての労働が支払労働であるかのように，つまり時間賃金は労働時間に正確に対応して，また個数賃金は労働生産物に正確に対応して支払われているかのように，現象するという非合理性をさしている(4)．そしてこの非合理性が，数学上の公式のもつ非合理的と対比されているわけである．このような公式の例としては多くのものをあげることができるだろうが，ここでは『数学遺稿』のなかから一つ引用しておこう．たとえば，ニュートンなどの神秘的微分学にかんして，「この数学的に正しい結果がかんじんの土台において同じくらい数学的に虚偽である仮定の上に基礎づけられている(5)」という非合理性が批判されている個所がある．マルクスはそこでのべている．「かくて彼らじしん新発見の算法たるや数学的に積極的に不正な道をとおりながら，正しい（単に正しいどころか，幾何学的応用においてまさに驚嘆すべき）結果を与えた神秘的なものである．かようにして彼らは自分じしんを神秘化し，新発見をますます高く評価すればするだけ，……新しい道を開拓するためにはぜひ必要なものである敵対的な叫び声をひき起したのであった(6)」．つまり，労賃形態のもつ欺瞞性と神秘的微分のもつ虚偽性とが対比されうることになるわけで，この欺瞞性と虚偽性とをはぎとるためには，剰余価値という，また代数的微分という中間項をそう入することによって，ともに正しく解明されなければならないのである（『数学遺稿』についてはあとの4節を参照）．

われわれは，このような例から，数学においても経済学におけると同様に弁証法的方法が貫徹されていることを知りうるであろう．そのような観点からみれば，『資本論』のなかには，エンゲルスの『自然弁証法』への萌芽も形成されていたとみなすことができる．たとえば，第一巻，第十三章のなかに，道具と機械との区別をめぐって，数学者

(3)　『資本論に関する手紙』上巻，188～9 ページ．
(4)　『資本論』第一部下，第六編労賃，参照
(5)　『数学遺稿』岩波書店版，75 ページ．
(6)　同上同ページ．

の見解（ハットンの『数学講義』）を批判している個所がある．「数学者や機械学者は，……そこになんらの本質的な区別も見ないのであって，梃・斜面・螺施・楔などのような簡単な力学的力能をさえ機械と名づけている．なるほど，機械はいずれも，いかに仮装され結合されていようとも，かの簡単な諸力能から成立っている．だが，経済学的立場からすれば右の説明はなんの役にもたたない．けだしそれには歴史的要素が欠けているからである[7]」．また同じ問題に関連して，1863 年 1 月 28 日づけのエンゲルスあての手紙で，マルクスは，「単なる数学者にとってはこれら（道具と機械の区別）はどうでもよいことだが，人間の社会的関係と，これらの物質的生産様式の発展との関連を論証するということになれば，それは非常に重要なことになる」，とのべている[8]．また同所の註に，「歴史的過程を排除する抽象的・自然科学的な唯物論の欠陥は，その代弁者たちが彼らの専門からとびだすやいなや，彼らの抽象的で観念論的な諸表象からも看取されるのである」，と示されている[9]．つまり，機械論的唯物論の立場では道具と機械に関連する歴史的社会的性格さえ無視されてしまう．このようなところに形式的機械論的な数学者や自然科学者の欠陥があるわけで，マルクスはかれらが弁証法的視点を無視することを強く批判するのである．自然科学にあっても弁証法的発展過程を理解することは不可欠であって，マルクスは 1867 年 6 月 22 日づけのエンゲルスあての手紙で次のように指摘している．「ホフマン（『近代化学序説』）のことでは君は完全に正しい．なお，手工業親方の資本家への転化——たんなる量的変化による——が示唆される僕の第三章の結論から君が見てとるであろうように，僕はそこの本文で，たんなる量的変化の質的変化への転化の法則にかんするヘーゲルの発見を，歴史でも自然科学でも等しく確認されたものとして引用している[10]」．

（7）　『資本論』第一部下，611 ページ．
（8）　『資本論に関する手紙』上巻，124 ページ．
（9）　第一部下，612 ページ．
（10）　『資本論に関する手紙』上巻，154 ページ．なおこの手紙に引用され

すべて科学が弁証法的唯物論の立場から基礎づけられなければならないものである以上，経済学における数学利用の方法もまた，この立場から準備されなければならない．『資本論』にはその意味で，数学利用の正しい方法にかんするきわめて重要な先駆的萌芽がすでに形成されているのである．

3. 価値形態論における数式の役割について

『資本論』で，数学利用の観点からみてとくに重要な個所として，「価値形態論」「再生産論」「価値より価格への転形問題」などをあげることができるが，ここでは，「価値形態論」における数式利用の方法を検討するにとどめ，他の部分の検討は別の機会にゆずることにする．

マルクスは，価値形態論を展開するにあたり，次のようにのべている．「ここで肝要なことは，ブルジョア経済学によってはかつて試みられなかったこと，すなわち，この貨幣形態の発生史を証明すること――つまり，諸商品の価値関係に含まれている価値表現の発展を，それのもっとも簡単な最も見すぼらしい姿態から，燦爛たる貨幣形態までたどること――をなしとげることである．それによって同時に，貨幣の謎も消滅する[(1)]」．ここにいうもっともみすぼらしい姿態とは，一商品の他商品にたいする価値関係，つまり簡単な単独の価値形態であって，この形態は，

$$x \text{ 量の商品 } A = y \text{ 量の商品 } B \qquad (1)$$

簡単に x 商品 $A=y$ 商品 B という方程式で表現されている[(2)]．だか

ている『資本論』の個所では次のように説明している（第一部上，522 ページ）．「……貨幣＝または商品所有者は，生産のために投下される最小限額が中世的最大限をはるかにこえるときに，はじめて現実に資本家に転化する．単なる量的変化が特定の点で質的区別に急変するという，ヘーゲルがその論理学で明かにした法則の正しさが，自然科学におけると同様にここでも確証される」．

（1）　『資本論』第一部上，133 ページ．

ら「もっとも見すぼらしい姿態から，燦爛たる貨幣形態までたどること」は，一面ではまた，表現形式としての方程式の展開過程をあとづけることでもある．形式は内容と密着して，歴史の弁証法的発展過程の表現形態とならなければならない．その意味で，形式はつねに歴史的に制約された限定をもち，そのかぎりで意義をもつ．マルクスは，このような形式と内容の相互関連性を価値形態論のなかで明確に示しているのである．

『経済学批判』では，価値関係は $A=B$ という等式関係で表現されていた[3]．『資本論』においても，価値の質的関係が考察の主要な対象となるときには，この方程式は等式関係として利用されている．つまり，「ある与えられた分量の亜麻布が多くの上衣に値しようと，わずかの上衣に値しようと，あらゆるかかる比率は，つねに，亜麻布と上衣とは価値の大いさとしては同じ単位の表現であり，同じ本性をもつものであるということを含んでいる．亜麻布＝上衣ということが，方程式の基礎である」という[4]．価値形態の質的規定についてはこの等式が基礎である．だが価値を形成する実体（つまり抽象的人間的労働）の正確な量的規定が問題となるときには，この方程式という表現が必要となる．「たとえば小麦と鉄とをとって見よう．それらの交換関係がいかようであろうとも，その関係はつねに，ある与えられた分量の小麦がどれだけかの分量の鉄に等置される一つの方程式，たとえば，1 クオーターの小麦＝a ツエントネルの鉄，によって，表示されうるものである[5]」．このばあい，方程式の両辺にある商品量はそれぞれ同一量の社会的に必要な平均労働時間に還元されうるのでなけれ

（2）　同書 134 ページ．ただし本論説では価値実体論および測定論はすでに解決されたものとしてここでは省略する．この点については，拙稿「「近代経済学批判」に関する覚え書」経済学研究 4（一橋大学研究年報），1960年 3 月，138ページ以下を参照されたい．

（3）　『マル・エン選集』補巻 3，23～37 ページ．

（4）　『資本論』第一部上，136～7 ページ．

（5）　同書 116 ページ．

ばならない．つまり，1 クオーターの小麦が 20 時間，1 ツエントネルの鉄が 10 時間の労働時間を要費するとすれば，方程式 (1) は，$20=10a$，とあらわされ，方程式の未知数である交換比 a は 2 となり，価値関係としては，1 クオーターの小麦が 2 ツエントネルの鉄に等置されることになるわけである．

価値形態の表現である方程式 (1) は，このような量的関係を反映し，同時に，質的関係をも取り扱いうるような形態で，規定されている．つまり，A 商品 1 単位に要費される労働時間を α_A，B 商品 1 単位に要費される労働時間を α_B とすれば，量的関係としては，

$$\alpha_A x=\alpha_B y$$

とあらわされ，これをとけば交換比率 y/x は α_A/α_B となる．また価値形態の質的関係を考えるときには，この方程式は，使用価値としては質的にあい異なる一商品が交換の対立物として対置されながら，価値としては等式関係をとおしておたがいに制約されあうという関係を表現している．それはけっして単純な形式的同格をあらわすものではない．質的な内容と密着し，それをも反映するものでなければならない．だから，同一商品が同一商品に等置されるという，つまり $A=A$ という関係は，価値形態としてはまったく無意味であり，なんらの価値をも表現しない．

この方程式 (1) の両辺は価値形態としては異なった役割を演ずる．商品 A は商品 B のなかにみずからの価値の等価を見出し，商品 B にみずからの価値表現としての役割をおしつける．商品 A の役割は能動的である．しかもこれが可能であるのは，両商品が抽象的人間的労働の凝結であるからにほかならない．これに反して，商品 B は商品 A の等価としての価値表現をひきうけるという消極的な役割を演ずる．商品 B は，その使用価値そのままの姿で価値の現象形態となり，その具体的労働そのものが抽象的人間的労働の現象形態となる．したがってまた，私的労働がそのままで社会的労働のにない手となりうるのである．方程式 (1) の左辺の商品 A は相対的価値形態にあるといい，右辺の商品 B は等価形態にあるという．両辺の役割は質的にまった

く異なっている．だから，$A=B$ はただちに $B=A$ とはなりえない．$A=B$ を $B=A$ にするためには価値形態のいっさいの質的関係を転倒させなければならない．

マルクスにあっては，純粋に数学的な意味でも，等式の左辺と右辺とは区別されている．たとえば『数学遺稿』では，$y=f(x)$ という函数について，左辺は x に依存するという意味で x の函数（funktion von x）と呼ばれ，右辺は x であらわされた函数（funktion in x）と呼ばれている(6)．マルクスがそこで問題としているような，数学発展の過程に生じるあらたな数学的操作なり概念なりを意味づけるばあいには，さらに数学発展そのものの方向をあきらかにするさいには，この種の区別はとうぜん必要となってくることである．まして，具体的な現象への数学利用にさいしては，質的な差異を正確に反映するような形で数式を利用することは絶対に不可欠な条件といえるだろう．

ところで，商品交換の歴史的な発展過程の端緒にあっては，現象的には物々交換となんら変るところのない，簡単な単独の商品交換が登場することがある．両者のちがいは，価値のにない手としての役割をもっているかどうかにあるが，そのことじたいがすでにあるていどまで発達した社会を必要とすることを意味している．単純な物々交換にあっては，たんに生産物どうしが対立しあっているだけであって，方程式 (1) のような価値表現をまだうけとらない．商品交換社会にあっては，どの商品所有者も，方程式 (1) によって表現される価値関係をとおして，自分の直接の欲望の対象となる他人の商品に，自分の商品の等価としての役割をおしつけようとする．だから，両商品所有者の商品が，たまたまともに相手方の等価となりうるときに交換は可能となる．しかもそのばあいにかぎって，一方の商品所有者にとって $A=B$ であったものが，他方の商品所有者にとって $B=A$ となる．だがこれは，商品交換としてはまことに偶然的なことである．したがってまた，単独な価値形態は偶然的な価値形態でもある．

（6）『数学遺稿』岩波書店版，6 ページ．

単独の価値形態のもつ偶然性は，価値形態の発展過程のなかでおのずから解決される．商品所有者は自分の欲望の対象となるいずれの他人の商品にも特殊的な等価としての役割をおしつけようとする．そのかぎりで，全体的な開展された価値形態が発生する．つまり単独な価値形態は，x 商品 $A=y$ 商品 B，または$=v$ 商品 C，または$=w$ 商品 D などなど，という価値表現のたえず延長する系列に転化する．こうして商品 A は，単独の商品とだけではなく，商品世界と社会関係を結ぶことになる．だがこの系列では，たがいに他を排除しあう限定された等価諸形態が登場するだけで，そこにはまだ一般的な人間的労働の現象形態としての貨幣はまったく登場していない．その意味でまだ不完全である．

じっさいの交換過程では，すべての商品所有者は，他人の商品をすべて自分の商品の等価たらしめようと，したがってまた自分の商品を他人の商品すべての等価，つまり一般的な等価たらしめようとするであろう．だがすべての商品所有者が同じことをするわけであるから，そのかぎりでは各所有者の行為はなんらの解決ももたらさない．そこには各商品所有者の対立した矛盾した行為があるだけである．この矛盾は，一般的な等価形態が社会全体の行為として特殊な商品にこびりつくときに，一つの現実的な解決をうけとる．こうして開展された価値形態は転倒されて，一般的な価値形態に転化する．つまり，

$$\left.\begin{array}{r} y \text{ 商品 } B= \\ z \text{ 商品 } C= \\ u \text{ 商品 } D= \\ \vdots \\ \text{等々の商品}= \end{array}\right\} x \text{ 商品 } A$$

となる．ここでは，「商品世界の一般的な相対的価値形態は，商品世界から排除された等価商品たる A に，一般的な等価という性格をおしつける．……A の物体形態は，あらゆる人間的労働の眼にみえる化身，一般的・社会的な蛹化，として意義をもつ」．さらにより積極的に，「すべての現実的労働の，人間的労働というそれらに共通な性格

への，人間的労働力の支出への，還元」が現実的に可能となるのである[7]．この一般的な等価形態が，金という特定の独自の自然的形態に癒着するときに，一般的な価値形態は貨幣形態に転化する．

このように，価値形態の発展は商品形態の発展に照応し，また方程式の展開過程もそのかぎりで意味をもつことになる．つまり，貨幣形態に到達すると同時に，価値形態の表現形式としての方程式（1）の役割も終る．

もちろん形式的には，この方程式をさらに拡張して利用することも可能ではあろう．貨幣が登場してくるばあいの交換にあえて方程式（1）を利用すれば，次のようになるであろうか．商品 B の所有者は，まず自分の商品を一般的等価としての貨幣 A にたいする単独な相対的価値形態として，つまり $B=A$ として対置させ，その交換からえられる貨幣 A を自分の直接的な欲望の対象である単独な等価商品 C に，$A=C$ として対置させる．こうして $B=C$ という価値形態の転形式が成立し，また商品 B から商品 C への交換が成就する．このような交換の表現形式は，価値の量的関係という一面にかんするかぎり，たしかに意味をもっている．そこにはいちおう等式の推移律（つまり $B=A$，$A=C$ ならば $B=C$）も成立しているように見える．しかしこの推移律も現実の交換においてはけっして一般的に成立するのではない．貨幣が中間項をとるばあいにかぎってのみ成立するにすぎない．

交換のこのような表現形式は，量的関係としてはいぜんとして意味をもちつづけるけれども，しかし質的関係としては，ここには表現上の矛盾が認められる．貨幣は一般的等価物として商品世界から排除され，つねに方程式の右辺に位置づけられていなければならないにもかかわらず，ここでは，方程式の左辺に相対的価値形態として，つまり，A（貨幣）$=C$ としてあらわれている．これでは表現として首尾一貫しない．のみならず．前記の $B=C$ という表現は，価値形態論における商品間の対立関係を示す方程式とは質的に異った関係を表現してい

（7）　前掲書 164 ページ．

る．ここでの $B=C$ は貨幣を媒介としてのみ可能であり，そのかぎりでのみ意味をもつ．だから価値形態の表現形式としての方程式 (1) の役割はまさにここで終るのである．商品から貨幣への，さらに貨幣から商品への姿態変換にとっては，方程式はあらたな表現形式へと転化されなければならない．マルクスは，この転化された形式を，$W-G-W$ とあらわしている．かくて，価値の量的規定性をそのまま保存しながら，価値形態における商品間の矛盾・対立は，貨幣形態への結晶とともに，あらたに商品と貨幣とへの商品の二重化と対立をうみだすことになるわけである．ここでは交換は，$W-G$, $G-W$ という販売と購買への二分極に分解されることになるのである．

4.　『数学遺稿』について

マルクスの『数学遺稿』が主要な研究対象としているのは微分学であるが(1)，それは，ニュートン，ライプニッツから，テイラー，マクローリン，ダランベール，オイラー，ラグランジュ，ラプラースなどにいたるまでの，だいたい解析学の展開史からみれば，18 世紀末までのものである．

ここで，解析学の歴史的な展開過程について若干解説を加えておこう．それはマルクスの研究を客観的に評価し位置づけるためにも必要なことであろうと思われる．ニュートン（1642〜1728）が物理学の強力な武器として微積分学を創始したのは，1666 年であるといわれているが，その理論は，1670〜71 年のあいだに “Methodus fluxionum et serierum infinitarum” としてまとめられている．また有名な

（1）　マルクスの数学研究の対象は微分学だけにかぎられないが，この点についてはヤノフスカヤの解説参照．『数学遺稿』橋書店版，96〜103 ページ．またヤノフスカヤの解説は，マルクスの数学研究の消息をあますところなく伝え，マルクスの研究の正しい評価を与えている点で，それにつけ加えるべきものはなにもないと思われるほどに完全である．もしここで，しいて問題を求めるとすれば，極限概念による微分学の基礎づけと，マルクスによる基礎づけとの関係が十分に究明されていない点をあげることができよう．筆者がここで問題としたいのは主としてこの点である．

"Philosophiae naturalis principia mathematica" がだされたのは1687 年である．他方ライプニッツ（1646～1716）は，1672 年にロンドン，パリに遊学し，その翌年にニュートンとは独立に微積分学の統一的な算法を案出している．ライプニッツの微積分学にかんする最初の論文は，1684 年に "Acta Eruditorium" 誌上に発表された "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus etc." である．

この当時は，とくにイギリスでは，封建主義社会の解体期にあたり，1640 年から 1688 年までのイギリス革命をとおして，ようやく資本主義化への傾向が顕著となりはじめていた．この歴史の転換期に，微積分学が樹立されていることは銘記すべきことであろう．18 世紀前半には，すでに簡単な微分方程式論も登場していた．しかし解析学の急速の発展が可能になったのは，18 世紀なかごろから進行を開始した産業革命以後である．技術の発展とそれに関連する物理学・工学をはじめとする自然科学部門のあらたな開拓があいつぎ，これがとうぜんのことながら，解析学の発展をも刺戟した．変分法，複素函数論，ベクトル解析，積分方程式論，函数解析など，新しい分野の研究があいついで開かれるようになった．マルクスがとりあげているオイラー（1707～1783），ラグランジュ（1736～1813），ラプラス（1749～1827），ルジャンドル（1752～1833）などは，すべてこの時代に活躍した人たちである．

19 世紀になってからもいぜんとして解析学の活発な発展がつづき，解析学の基礎はしだいに確立されていった．ガウス（1777～1855），コーシー（1789～1857），ロバチェフスキー（1793～1856），アーベル（1802～1829），ワイエルシュトラス（1815～1897），リーマン（1826～1866），などの偉大な数学者が輩出している．なかでも解析学上で忘れることのできない業蹟は，コーシーの "Cours d'analyse de l'École Polytechnique" (1821) で，コーシーはここで，微積分学を極限概念によって基礎づけている．これ以後，解析学はコーシーの与えた基礎の上に展開されていくのであるが，マルクスの『数学遺稿』が書かれた

1870 年代までには，すでにワイエルシュトラスらによって，近代的な「解析函数論」の体系が確立されている．また 1870 年代は，数学史上でも劃期的な時期であって，この年代には，一方では，カントール (1845～1918) の集合論が登場し，他方には，ジョルダン (1838～1922)，フロベニウス (1849～1917) らによってあらたに群論が開拓され，いわゆる現代数学への門戸が開放されたときである．

このような数学史の，とくに解析学の展開史からみれば，マルクスの研究が，それまでの数学史上の諸成果を十分に反映しているものでないことは指摘できるところである．とくに問題となるのは，コーシーの極限概念による微分学の基礎づけの試みを，当時マルクスがまったく知らなかったという事実である．この点について玉木氏は次のように指摘している．「彼がコーシーの業蹟にふれえなかったことを惜しむのも，彼の非凡な科学的洞察力にコーシーの論証——とくにマルクス独自の見解と方向を異にする極限概念の確立——がいかに映ったであろうかという興味をいだくからであり，マルクスにもっと十分な素材を提供して彼の見解を十分発展させてみたかったとおもうからである[(2)]」．玉木氏によれば，コーシーの極限概念の方法は，マルクスの方法とはまったく方向を異にするものとみなされている．氏はマルクスの方法を代数的微分法と名づけて，そのめざす方向について次のような推定をくだしている．「マルクスの考え方を発展させるならば，現代数学の作用素論の方向に立ちむかわざるをえないのではないか[(3)]」．だがこれでは，氏じしんも認めているように，「弁証法的把握」の面をおおいかくしてしまう危険が十分にある．マルクスは，微分概念の弁証法的発展過程をもあとづけているわけであるから，コーシーらの極限概念が登場すべき論理的必然性も，とうぜんそこから説明されるべき性質のものであろう．ここで，マルクスの研究をあまり飛躍させて過大評価することは，むしろマルクスの真意を見誤ること

(2)　『数学遺稿』岩波書店版，134 ページ．

(3)　同書 158～9 ページ．

になりかねない．この点については，玉木氏みずからがまさに警告しているとおりである．つまり，「この考察は，マルクスの位置を，現代の吾々の立場からみて定着するために，その歴史的意義および制約を一そう明かにするために，試みたものであって，あまり多くを附加することはかえってマルクスを誤解せしめ，吾々の企図自体を裏切る結果となることをおそれる(4)」．

ヤノフスカヤは，この点については玉木氏とは異った表現をしている．「たとえ晩年においてマルクスがどこかのより近代的な指導部に近づいたとしても，彼がいくらかでもわかり易い形で，微分学の原理および方法にかんする新しい観点の真実の説明をえたかどうかはうたがわしい(5)」．ここにいう「近代的な指導部」とは，コーシーいらいの極限法の立場をさしていることはあきらかで，ヤノフスカヤも，マルクスがたとえその立場を知ったとしても，そのことによってマルクスの立場が本質的に変化するとは期待できそうにないものとみなしているようである．つまり表現はちがっても，ここでもマルクスの方法は通常の極限概念の方法とは異っていることが指摘されているのである．別の個所で，ヤノフスカヤは次のようにのべている．「現今の数学もまた，導函数を事実上，最初にある有限の差の比をとりのちにそれを《取り除く》ところの，弁証法的な過程の助けをかりて定義している．だがこの《取り除くこと》は……Δx が零になることの形では存在せずして，《Δx にそった零への極限的移行》という形で存在している．なぜマルクスは導函数を極限として定義することを避けるのであろうか？　マルクスはこれに答えている．彼は《たんなる無限の近似云々の逃げ口上》を避けようと欲するからである．この逃げ口上は，……微分学の公式がたんに近似的な性質のものにすぎぬかのごとき印象を創り出しつつ，じっさいにこの定義に迷惑をかけているのである(6)」．

たしかにコーシーの極限概念のなかには，まだ曖昧な痕跡が残って

---

(4)　同書 163 ページ．
(5)　『数学遺稿』橘書店版，116 ページ．
(6)　同書 137 ページ．

いることは否定しきれないところである．しかしコーシーの基礎づけをとおして 19 世紀の解析学が堅実に発展していったことを思うとき，マルクスの微分概念をそれとは異ったものとして特徴づけることは，弁証法的唯物論の立場からみても，むしろ自殺行為に等しいといわれなければならないのではなかろうか．ソ連アカデミー版の『数学通論』では，極限概念の弁証法を次のように説明している．「極限法の思想は簡単で次のようなものである．ある量を求めるためには，はじめからその量じしんを求めるのではなくて，まずある近似値を求める．ただし近似値を一つだけ定めるのではなくて，しだいに正確になってゆく近似値の系列を定める．それから，この近似値の系列を研究すること，つまり近似の過程そのものを研究することによって，求める量の真の値が完全に一意的に定まる．この本質的に深い弁証法的方法によって，固定した不変のものが変化と運動の結果であると認められるようになった」．また，「……上のような定義を下したのはコーシーであり，それまでは数学ではもっとあいまいな概念が用いられていた．極限や変数としての無限小や実数についての現代の考えは数学解析の進歩の成果であり，またその進歩を形づくり保証する手段でもある[7]」．

極限概念は，数学の弁証法的発展過程のなかから，とうぜんの帰結として発生したものとみなすべきであって，マルクスの微分学の弁証法的基礎づけの試みのなかにもそのような観点は十分によみとることができるのである．すでにヤノフスカヤもしばしば指摘しているように，マルクスの数学学習はきわめて制約されていた．専門的な数学家でなかったマルクスは，当時，数学の専門的な文献をみる機会にはほとんどめぐまれていなかったといってよい．「専門的雑誌文献は一般に非常に限られた数学専門家の仲間にしか手に入らなかった[8]」．と

（7） “МАТЕМАТИКА, ее содержание, методы и значение” АКАДЕМИЯ НАУК СССР, МОСКВА, 1056. 遠山啓監訳『数学通論』I II III，商工出版社，1958 年．I の 114～5 ページおよび 138～9 ページ．
（8） 『数学遺稿』橘書店版，116 ページ．

くに何よりも，マルクスの数学学習が通俗的な教科書を中心に行われていたことが指摘されなければならない(9)．このような制約のなかでえられたマルクスの成果を評価するばあいには，制約のために十分に展開されなかった規定なり概念なりを，マルクスの本質的な見解と直接的に結びつけないように心がけることである．むしろそのような制約にもかかわらず微分学の基礎と方向を正当に規定しているかどうか，という点が問題とならなければならない．そのような観点からみれば，代数的な色彩のこいその微分法にのみ焦点をあわせることはマルクスの本質を正しく反映するものとはいいがたい．むしろそのような制約された古典的な微分法をとりあつかいながらも，そこにマルクス独自の極限概念が示されていることをよみとるべきである．以下若干検討してみよう．

マルクスが学習の対象とした教科書では，次のように説明されるのがふつうであった．たとえばブーシャルラを例にとろう(10)．$y=x^2$ とすると，

$$y_1=(x+h)^2=x^2+2hx+h^2$$

$$y_1-y=2hx+h^2$$

これを h でわれば，

$$\frac{y_1-y}{h}=2x+h$$

h が減少するにつれて，右辺は $2x$ に近づき，左辺の分母子がそれぞれ小ささの最後の段階にたっしたとき（傍点引用者），すなわち 0 になったとき，右辺は $2x$ となり

$$\frac{0}{0}=2x$$

に変る．この分数$\frac{0}{0}$は変数についてのなんらの痕跡も残していない．函数が y で変数が x であることを思いだすために，これを$\frac{dy}{dx}$であ

(9)　同書 98～101 ページ．

(10)　『数学遺稿』橘書店版，119～122 ページ．教科書は，J. L. Bouch-arlat; Elément du calcul différentiel et du calcul intégral, である．

らわすことにしよう．そうすれば

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

がえられる．

ブーシャルラは，マルクスによれば，「この人は有名な《優雅な》フランス人とまったく異った意味で明快に微分的方法をラグランジュの代数的方法にむすびつけた」とみなされているが，このようなたぐいの教科書を出発点として，マルクスの微分概念は次のように弁証法的に導かれている．$y=x^2$ として x を x_1 まで増すならば，

$$y_1-y=(x_1-x)^2=(x_1-x)(x_1+x)$$

がえられる．しかるのち x_1 を x まで減少させれば，これは $0=0$ にかわってしまう．「最初に差を仮定し，次にそれを取り除くこと」，つまり「否定（x を x_1 まで変化させること）の否定（逆に x_1 を x まで変化させること）はなんでもないものに導く」．これからは微分はえられない．否定の否定が，あらたな有効な概念なり形式なりを導きだすことを知るためには，次のように考えなければならない．いま両辺を x_1-x でわり，$x_1-x=\Delta x$, $y_1-y=\Delta y$ とおくならば

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=x_1+x$$

がえられる．これをマルクスは「予備的導函数」と名づけている．左辺の「比の分母において x_1 を x にむかって近づけつつ減少させよう．その減少の限界はそれが x になるや否や達せられる」．すなわち $x_1-x=\Delta x=0$，それにおうじてまた $y_1-y=\Delta y=0$ となる．こうして「絶対的極小的表現の比」

$$\frac{0}{0}=2x$$

がえられる．この式では左辺に，「超越的あるいは象徴的不幸」が生じている．「ところがそれはすでに威嚇的な姿をうしなっている．なんとなれば，いまやその実質的内容がすでに等式の右辺にあばかれている過程の表現として生れてきているにすぎない」からである（傍点

引用者).「$\frac{0}{0}$なる表現では，それの起源と意義とのあらゆる痕跡が蒸発してしまっている」.「函数yと変数xとの間の質的関係も同様に消滅してしまっている」.「そこで$\frac{0}{0}$の由来と意義とを表現するために」$\frac{0}{0}$を$\frac{dy}{dx}$という記号でおきかえる．こうして$\frac{\Delta y}{\Delta x}$は$\frac{dy}{dx}$に転化し，「終局的導函数」

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

がえられることになる．これはあくまでも，「$\frac{0}{0}$を導くべき過程を示す記号である」．また「たんに$\frac{0}{0}$の発生過程を跡づけるばかりでなく，同時にまた$\frac{\Delta y}{\Delta x}$から$\frac{0}{0}$への転化を示すための象徴$\frac{dy}{dx}$へとわれわれを導くのである」．こうして，「否定にさいして否定される質的関係が保存」されることになる(11).

ここで注意されなければならないのは，マルクスはあくまでも，微分を運動のないしは変化の「過程」として理解している点である．マルクスが極限概念を拒否する理由は，極限概念がこのような変化の過程とはみなされずに，そこに，「無限に小さい量の比」,「無限小」,「モメント」というようなたぐいの特定の非連続量がもちこまれ，また「無限の近似」というような曖昧な表現が混入されていたことにあるたしかに，18 世紀末までの極限概念の理解の仕方は，そのような不明確なものであったし，また，マルクスの学習の対象となった多くの教科書でも，旧態いぜんとしてそのような誤った見解が巾をきかしていたわけである．マルクスが批判するのはまさにこの点であって，けっしてコーシーいらいの極限概念を批判しているわけではない．前記のソ連の『数学通論』からの引用にも示されているように，「近似の過程」を研究すること，「固定した不変のものが変化と運動の結果である」という弁証法的性格をあきらかにすること，それが極限概念の基本であるとすれば，マルクスもまた，上に示したところからあきらかなように，正しい極限概念を洞察していたということができよう．た

(11)　以上は，『数学遺稿』I，導函数および象徴的微係数，の要約である．

だマルクスの難点は，いぜんとして$\frac{0}{0}$という誤った操作にわざわいされて，コーシーのように具体的な形式を付与することがさまたげられていたところにある．しかしそれができれば，マルクスはまた，れっきとした数学者の地位をも獲得していたことになるだろう．

ところで，いったん$\frac{dy}{dx}=f'(x)$の意味が確立されてしまえば，微分をあらわす等式

$$dy=f'(x)dx$$

でおきかえてもさしつかえない，とマルクスはいう．つまり，「$x_1-x=0$ が，いつも独立変数 x の消滅せる差としてそれをあらわす dx なる形をうるやいなや，したがって dy が x の函数あるいは従属変数 y の消滅せる差をあらわすやいなや，分母を分子から引きはなすことはまったく許されうる操作となる．dx がどこにいようと，その位置の変更はそれにたいする dy の関係を傷つけるものではない．こうして $dy=f'(x)dx$ は，$\frac{dy}{dx}=f'(x)$ の別の形式としてわれわれの眼前にあらわれ」，象徴的微係数は象徴的演算的記号に転化する．つまり，「y の微分というものは，このように代数的発展の終点であり，それは独自の地盤の上に動く微分学の出発点となる．孤立的に，すなわちそれじしんの等価物なしに考えられる dy……はここでとつぜん，Δy が代数的方法のなかで演ずると同じ役割を演ずる．そして dx……はかしこで演ずると同じ役割を演ずる」ことになる(12)．

微分学の歴史的発展過程からみれば，このような微分記号の方がはじめに登場したわけで，ニュートン，ライプニッツはこの立場から，次のようにして導函数を導きだしている．$y=x^2$ として，

$$y+dy=(x+dx)^2=x^2+2xdx+dx^2$$

ここで dx^2 は，dx にくらべてよりすみやかに消滅する二次の無限小である．だからこれをとりのぞくことができ，$dy=2xdx$ となる．さらに両辺を dx でわれば$\frac{dy}{dx}=2x$ がえられる．このようなニュートン，ライプニッツの方法を，マルクスは，神秘的微分学と名づけて反

(12)　以上は，『数学遺稿』II，微分および微分学，の要点である．

駁している．はじめに差を仮定することなしに，ただちに dx, dy を採用するときには，「絶対的極小的表現」として $x_1-x=0$ および $y_1-y=0$ をとることができない．もしそうしたとすれば，$0=0$ というなんでもないものがえられてしまう．だからここでは，差の比をとって，まず $\frac{dy}{dx}=2x$ を導き，そのあとで $dy=2xdx$ へと転化しなければならない．したがって，この過程をとらずに dx^2 を「強制的に抹殺」するという神秘的微分学の立場から正確な結果がえられたのは，「ちょろまかし」によるものであり，象徴的微係数もまた「あらかじめ盗まれていた」からである．このような神秘的微分学の難点を克服したのはダランベールであるが，その方法は，前に示したブーシャルラのものと基本的には同じである．ダランベールについてマルクスは次のように指摘している．「微分学から神秘的な晴着をはぎとって，ダランベールは巨大な一歩前進をした．彼の Traité des fluides は 1744 年にあらわれたとはいえ，……（その支配は）あれやこれやの修正はあったが，現在までつずいている」．このような指摘は，一面ではマルクスが当時の数学界の情勢に通暁していなかったことを示すものであるが，他方また，一般の教科書の水準と学界の水準のあいだの開きのはげしさをも端的にものがたっている．それはともかくとしても，マルクスはそのような評価を与えながらも，しかしダランベールの方法が，「なんとなく神秘的恐怖をひきおこす」ことに注意を換起している(13)．

ダランベールにあっては，「積極的表現」として増分 $h(=\varDelta x)$ がとられているけれども，マルクスはこれにたいして「消極的表現」として，x_1-x という差を対置させている．もちろんこの両者には形式的なちがいはない．しかしそこには，表現上，質的なちがいが発生する．マルクスは，ダランベールの方法があまりにも確定的にすぎることに疑惑の目をむけるのである．つまり，ダランベールの方法では，二項定理によって展開された第二項に，つねにできあいの導函数が定着し

(13)　以上は，『数学遺稿』III，歴史的概説の要約である．

てしまっている．マルクスは，微分概念をより不確定的に運動のないしは変化の過程としてとらえようとする．たとえば，前の例でいえば，予備的導函数は，x_1+x と与えられ，変化の過程の最後に終局的導函数 $2x$ が確定する，というわけである．われわれはここでも，マルクスの試みのなかに，コーシーいらいの極限概念にもとづく微分法への弁証法的洞察にもとづく萠芽が形成されていることをはっきりと認めることができるであろう．